Descomposición de la acción signada del grupo simétrico sobre sus transposiciones

José Araujo
Facultad de Ciencias Exactas
UNCPBA - Tandil

Notaremos con K un cuerpo de característica cero. Sea T el conjunto de transposiciones del grupo simétrico S_n. Para $(i,j) \in I_n$ y $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ definimos:

$$\sigma^{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) \text{ no es inversión para } \sigma \\ -1 & \text{si} \quad (i,j) \text{ es inversión para } \sigma \end{cases}$$

Sea V el K-espacio vectorial libre genreado por las transposiciones. Para $t = (i,j) \in T$ y $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ consideramos la acción de $\mathfrak{S}_n$ dada por:

$$\sigma t = \sigma^{(i,j)} \sigma \tau \sigma^{-1}$$

Esta acción da lugar a una representación ρ de $\mathfrak{S}_n$ sobre el espacio V y corresponde a la acción signada de $\mathfrak{S}_n$ sobre su sistema de raíces positivas cuando es pensado como un grupo de Weyl de Tipo A_{n-1}.
Se establece la siguiente descomposición:

$$\rho \simeq \rho_{[n-1,1]} \oplus \rho_{[n-2,1,1]}$$

donde ρ_γ es la representación irreducible de $\mathfrak{S}_n$ asociada con la partición γ.
En particular, se obtiene la identidad combinatoria:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\binom{f_\sigma}{2} - t_\sigma \right)^2 = 2n!$$

donde f_σ es el número de puntos fijos de σ en I_ny t_σ es el número de transposiciones en la descomposición cíclica de σ.
Se intenta estudiar descomposiciones de espacios similares para grupos de Weyl, los que estarían relacionados con modelos de Gelfand asociados a dichos grupos.

Referencias:

[1] J. L. Aguado and J. O. Araujo, A Gelfand model for the symmetric group, Communications in Algebra, 29(4), 1841 - 1851 (2001).
[2] Vijay Kodiyalam and D.N. Verma: *A natural representation model for symmetric groups.* arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.