ACTAS DEL IX CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2007), Páginas 69–77

DESCOMPOSICIÓN DE LA ACCIÓN SIGNADA DEL GRUPO SIMÉTRICO SOBRE SUS TRANSPOSICIONES

JOSÉ ARAUJO

1. Introducción

Un *modelo de Gelfand* para un grupo finito G, es una representación ordinaria del grupo cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de G (ver [18]). Después de la construcción de Bernstein, Gelfand y Gelfand de este tipo de modelos para grupos de Lie compactos en [6], el primero en introducir un modelo de Gelfand para grupo finito es Klyachko en [14], en este caso, para el grupo general lineal sobre un cuerpo finito, este modelo es también tratado por Howlett y Zworestine en [8] y por Inglis y Saxl en [10]. Pantoja y Soto-Andrade presentan un modelo para un grupo de movimientos en [18].

Modelos de Gelfand para el grupo simétrico generalizado y grupos de Weyl de tipos A_n, B_n y D_n fueron tratados en [1], [2], [3] y [4]. Desde un enfoque diferente, *modelos por involuciones* son presentados por Baddeley en [5] y un modelo para el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ es también estudiado por Kodiyalam y Verma en [15].

Estamos interesados en esta última realización del modelo de Gelfand para $\mathfrak{S}_n$, principalmente en la descomposición de los espacios que lo conforman, con el objeto de entender mejor esta construcción y evaluar la posibilidad de extenderla a otros grupos de Weyl.

En las referencias [9] y [13] puede encontrarse la información relativa a grupos de Weyl y a grupos de reflexiones en general.

2. La acción signada

En ciertos grupos de Weyl, puede considerarase una representación sobre el espacio de involuciones del grupo como se indica a continuación.

Según Carter en [7] toda involución τ en G puede ser expresada como producto de reflexiones en G:

$$\tau = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son raíces ortogonales dos a dos. Es claro que estas raíces pueden tomarse todas positivas en un orden previamente establecido.

En algunos grupos de reflexiones, como por ejemplo los de tipo A_n, esta descomposición es única. Para estos casos podemos considerar el conjunto de involuciones I de G y V el subespacio del álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ generado por los elementos en I. Definimos una acción de G sobre V dada por:

$$\sigma \cdot \tau = (-1)^{m_{\sigma,\tau}} \sigma\tau\sigma^{-1} \qquad (\sigma \in G,\ \tau \in I)$$

donde $m_{\sigma,\tau}$ es el número de raíces en la descomposición $\tau = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k}$ que σ transforma en raíces negativas.

Proposición 2.1. *La operación $\cdot$ es una acción.*

Demostración. Es claro que $1 \cdot \tau = \tau$. Para completar la demostración es suficiente mostrar que:

$$m_{\sigma,\tau} + m_{\mu,\sigma\tau\sigma^{-1}} \equiv m_{\mu\sigma,\tau} \bmod (2) \qquad (\sigma, \mu \in G, \tau \in I)$$

Escribiendo:

$$\begin{array}{rcl} \tau & = & s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k} \\ \sigma\tau\sigma^{-1} & = & s_{\beta_1} s_{\beta_2} \cdots s_{\beta_k} \\ \mu\sigma\tau(\mu\sigma)^{-1} & = & s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_k} \end{array}$$

donde $\beta_i = \pm\sigma(\alpha_i)$ y $\gamma_i = \pm\mu(\beta_i) = \pm\mu\sigma(\alpha_i)$. Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} m_{\sigma,\tau} & = & |\{i : \beta_i = -\sigma(\alpha_i)\}| \\ m_{\mu,\sigma\tau\sigma^{-1}} & = & |\{i : \gamma_i = -\mu(\beta_i)\}| \\ m_{\mu\sigma,\tau} & = & |\{i : \gamma_i = -\mu\sigma(\alpha_i)\}| \end{array}$$

Por otra parte, resulta claro que dada una raíz positiva α, la raíz $\mu\sigma(\alpha)$ es negativa sólo en los casos en que $\sigma(\alpha)$ y $\mu\sigma(\alpha)$ no sean ambas positivas o ambas negativas, de modo que el número de raíces positivas α_i que $\mu\sigma$ aplica en raíces negativas coincide con el cardinal de la diferencia simétrica:

$$|\{i : \beta_i = -\sigma(\alpha_i)\} \triangle \{i : \gamma_i = -\mu(\beta_i)\}|$$

pero este número tiene la misma paridad que:

$$|\{i : \beta_i = -\sigma(\alpha_i)\}| + |\{i : \gamma_i = -\mu(\beta_i)\}|$$

y esto concluye con la demostración. □

Kodiyalam y Verma prueban que V es un modelo de Gelf and en el caso que G sea el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ y plantean la posibilidad de extender este hecho al caso de otros grupos de Weyl.

Naturalmente, el espacio V puede ser descompuesto como:

$$V = \bigoplus_{\mathscr{C}} V_{\mathscr{C}}$$

donde $\mathscr{C}$ recorre las clases de conjugación de las involuciones en G y $V_{\mathscr{C}}$ es el espacio generado por los elementos en $\mathscr{C}$.

Como primera medida, estamos interesados en estudiar la descomposición de los espacios $V_{\mathscr{C}}$, particularmente cuando el grupo G es el grupo simétrico, con el objeto de contar con mayor información a la hora de considerar la estructura de V en el caso de grupos de Weyl emparentados con el grupo simétrico, como ocurre con los grupos de Weyl de tipo B_n y D_n.

Si $\mathscr{C}$ es la clase de conjugación de una reflexión, la acción anteriormente planteada está bien definida en cualquier caso y aquí daremos su descomposición para los casos en que G sea un grupo de Weyl de tipo A_n, B_n o D_n.

El tratamiento de los grupos de Weyl puede hacerse sobre los número racionales, ya que en virtud del trabajo de Springer en [19], todas las representaciones irreducibles de un grupo de Weyl pueden ser realizadas sobre los número racionales.

Hacemos notar que, en el caso del grupo simétrico, el espacio a estudiar se corresponde con el que detallamos a continuación:

Sea $\mathscr{R}$ el conjunto de transposiciones del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$. Para $(i,j) \in \mathscr{R}$ y $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ definimos:

$$\sigma^{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) \text{ no es inversión para } \sigma \\ -1 & \text{si} \quad (i,j) \text{ es inversión para } \sigma \end{cases}$$

donde un par (i,j) *es una inversión para* σ si $(\sigma(i)-\sigma(j))(i-j)$ es un número negativo.

Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales y $V_{\mathscr{R}}$ el subespacio de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ generado por las transposiciones. Para $t=(i,j) \in \mathscr{R}$ y $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ consideramos la acción de $\mathfrak{S}_n$ dada por:

$$\sigma \cdot t = \sigma^{(i,j)} \sigma \tau \sigma^{-1}$$

Esta acción, que llamamos *acción signada sobre las transposiciones*, da lugar a una representación $\rho_{\mathscr{R}}$ de $\mathfrak{S}_n$ sobre el espacio $V_{\mathscr{R}}$.

Del mismo modo, si G es un grupo de Weyl y $\mathscr{R}$ es el conjunto de reflexiones de G, tenemos la acción definida sobre $V_{\mathscr{R}}$ y la correspondiente representación $\rho_{\mathscr{R}}$.

Asociado con cada grupo de Weyl G se tiene una representación como grupos de reflexiones en un espacio ecuclídeo, usualmente llamada *representación geométrica de G*.

Proposición 2.2. *La representación geométrica de un grupo de Weyl G, con diagrama de Dynkin conexo, es una subrepresentación de $\rho_{\mathscr{R}}$.*

Demostración. Sea V el espacio de raíces de la representación geométrica asociada con el grupo G. La aplicación lineal $\theta : V_{\mathscr{R}} \to V$ definida por:

$$\theta(s) = r$$

donde $s \in \mathscr{R}$ y r es una raíz positiva de s en un orden fijado, es claramente un morfismo sobreyectivo de G-módulos. Como el diagrama de Dynkin de G es conexo, V resulta irreducible y en consecuencia es isomorfo con un submódulo de $V_{\mathscr{R}}$. □

Se establece la siguiente descomposición para los casos de grupos de Weyl de tipos A_n, B_n y D_n.

Teorema 2.3. *Con las notaciones precedentes, se tiene:*

$$\begin{array}{rl} \rho_{\mathscr{R}} \simeq \rho_{[n-1,1]} \oplus \rho_{[n-2,1^2]} & \textit{si} \quad G \textit{ es de tipo } A_{n-1} \simeq \mathfrak{S}_n \\ \rho_{\mathscr{R}} \simeq 2\rho_{[[n-1],[1]]} \oplus \rho_{[[n-2,1],[1]]} & \textit{si} \quad G \textit{ es de tipo} B_n \\ \rho_{\mathscr{R}} \simeq \rho_{[[n-1],[1]]} \oplus \rho_{[[n-2,1],[1]]} & \textit{si} \quad G \textit{ es de tipo} D_n \end{array}$$

donde las representaciones irreducibles de $\mathfrak{S}_n$ están parametrizadas por las particiones de n y en los otros casos, por las biparticiones de n.

Demostración. Para que las expresiones dadas a continuación tengan sentido, es necesario asumir que $n \geq 4$.

En el caso del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, si $\chi_{\mathscr{R}}$ denota el carácter asociado con $\rho_{\mathscr{R}}$, es posible expresar el valor que $\chi_{\mathscr{R}}$ toma sobre una permutación π, en términos del número de puntos fijos y el número de transposiciones en la estructura cíclica de π. Más concretamente:

$$\chi_{\mathscr{R}}(\pi) = \binom{f_\pi}{2} - t_\pi$$

donde f_π es el número de puntos fijos de π en $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ y t_π es el número de transposiciones en la descomposición cíclica de π.

En efecto, dada la transposición (i,j) con $i<j$ se tiene:

$$\pi\cdot(i,j)=\pm(\pi(i),\pi(j))$$

correspondiendo el signo $+$ si $\pi(i)<\pi(j)$ y el signo menos en el caso contrario. Se sigue que una transposición contribuye en una unidad al carácter en π, si está compuesta por dos puntos fijos de π, mientras que resta una a unidad si coincide con una transposición de la descomposición cíclica de π.

Por otra parte, f_π y $\binom{f_\pi}{2}+t_\pi$ son caracteres permutacionales, inducidos por el carácter trivial de subgrupos de tipos:

$$\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_{n-1}\quad \text{y}\quad \mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_{n-2}$$

luego (ver [12]):

$$f_\pi=\chi_{[n]}+\chi_{[n-1,1]}\quad \text{y}\quad \binom{f_\pi}{2}+t_\pi=\chi_{[n]}+\chi_{[n-1,1]}+\chi_{[n-2,2]}$$

y se sigue que:

$$\begin{aligned}\chi_{\mathscr{R}}(\pi) &= 2\binom{f_\pi}{2}-\left(\chi_{[n]}+\chi_{[n-1,1]}+\chi_{[n-2,2]}\right)(\pi)\\ &= \left(\chi^2_{[n-1,1]}-\chi_{[n]}-\chi_{[n-2,2]}\right)(\pi)\end{aligned}$$

y usando la desomposición de $\chi^2_{[n-1,1]}$ (ver [11]):

$$\chi_{\mathscr{R}}=\chi_{[n-1,1]}+\chi_{[n-2,1^2]}$$

Si G es de tipo B_n, hay dos órbitas de raíces cuyos cardinales son $2n$ y $2\binom{n}{2}$ respectivamente. Si notamos con S y T a los respectivos subespacios de $V_{\mathscr{R}}$ generados por las reflexiones con raíces en una misma órbita, tenemos que:

$$V_{\mathscr{R}}=S\oplus T$$

De la proposición 2.2 se sigue que la subrepresentación sobre S es equivalente a la representación geométrica, mientras que la subrepresentación sobre T contiene a la representación geométrica. El carácter sobre T puede ser expresado como:

$$\chi_T(\sigma)=2\left(\binom{f_\sigma}{2}-\binom{a_\sigma}{2}\right)=(f_\sigma-a_\sigma)(f_\sigma+a_\sigma-1)$$

donde f_σ es el número de 1-ciclos positivos y a_σ es el número de 1-ciclos negativos en la descomposición cíclica de σ. En este caso, el carácter de la representación geométrica está dado por:

$$\chi_{[[n-1],[1]]}=f-a$$

Por otra parte se tiene:

$$\chi_{[[n-1,1],[0]]}=f+a-1$$

de donde:

$$\chi_T=\chi_{[[n-1],[1]]}\times\chi_{[[n-1,1],[0]]}$$

Luego, podemos pensar a T como el espacio asociado con el producto tensorial de representaciones de Macdonald:

$$T\simeq\left\langle x_i^2-x_j^2 : i,j\in I_n,\ i<j\right\rangle\otimes\langle x_i : i\in I_n\rangle$$

la aplicación:

$$\left(x_k^2-x_l^2\right)\otimes x_i\to\left(x_k^2-x_l^2\right)x_i$$

contiene en su imagen una subrepresentación de Macdonald de G, tomando ternas (i,k,l) con elementos distintos entre si, correspondiente a la bipartición $[[n-2,1],[1]]$. El grado de esta representación es $n(n-2)$ y como también podemos encontrar la representación geométrica de grado n al descomponer T, por razones de dimensión la representación sobre T se descompone como:

$$\rho_{[[n-1],[1]]} \oplus \rho_{[[n-2,1],[1]]}$$

Se concluye que:

$$\rho_{\mathscr{R}} \simeq 2\rho_{[[n-1],[1]]} \oplus \rho_{[[n-2,1],[1]]}$$

Para finalizar, si G es de tipo D_n, podemos identificar $V_{\mathscr{R}}$ con T y notar que, según [3], las restricciones de $\rho_{[[n-1],[1]]}$ y $\rho_{[[n-2,1],[1]]}$ a G se mantienen irreducibles. □

De la identidad obtenida para el tipo B_n, se concluye que la construcción de Kodiyalam y Verma no puede ser extendida, al menos en forma natural, para este caso. En realidad puede anticiparse que la construcción mencionada no resulta un modelo de Gelfand si el grupo tiene dos órbitas de raíces, dado que es posible obtener una copia de la representación geométrica en $V_{\mathscr{R}}$ por cada órbita de raíces, si procedemos en la misma forma que en la proposición con el subespacio generado por cada órbita.

En particular, se obtienen las identidades combinatorias:

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\left(\binom{f_\pi}{2}-t_\pi\right)^2 = 2n! \quad \text{y} \quad \sum_{\sigma\in G}\left(\binom{f_\sigma}{2}-\binom{a_\sigma}{2}\right)^2 = 2^{n-1}n!$$

donde G es un grupo de Weyl de tipo B_n.

Es oportuno hacer notar que dada una estructura cíclica φ correspondiente a una permutación de grado k, con $k \leq n$, si para cada permutación $\pi \in \mathfrak{S}_n$ denotamos con φ_π al número de subconjuntos π-invariantes de I_n con cardinal k y tales que las restricciones de π a estos conjuntos tenga φ por estructura cíclica, resulta $\pi \to \varphi_\pi$ una función de clases y en consecuencia es expresable en términos de caracteres permutacionales. En el caso del grupo simétrico, es posible expresar el carácter $\chi_{\mathscr{C}}$ asociado con el espacio $V_{\mathscr{C}}$ en términos de las funciones φ asociadas con ciertas estructuras cíclicas. Sin embargo, parece extremadamente complicado intentar descomponer $\chi_{\mathscr{C}}$ como en el caso $\mathscr{C} = \mathscr{R}$.

Por ejemplo si $\mathscr{C}$ es la clase de conjugación de dobles transposiciones, entonces:

$$\chi_{\mathscr{C}}(\pi) = \frac{1}{2}\binom{f_\pi}{2}\binom{f_\pi-2}{2} - \binom{f_\pi}{2}\binom{t_\pi}{2} + \frac{1}{2}\binom{t_\pi}{2}\binom{t_\pi-2}{2} - c_\pi$$

donde c_π es el número de cuatriciclos en la descomposición cíclica de π.

Sin embargo, hay esperanzas de obtener la descomposición de $V_{\mathscr{C}}$ usando otros métodos, particularmente en el caso del grupo simétrico.

Si $\mathscr{C}$ es la clase de conjugación de dobles transposiciones conjeturamos que:

$$\chi_{\mathscr{C}} = \chi_{[n-2,2]} + \chi_{[n-3,2,1]} + \chi_{[n-3,1^3]} + \chi_{[n-4,2^2]} + \chi_{[n-4,1^4]} \qquad (n \geq 6)$$

3. La Función Signo

Sea $k \leq n$ y $\mathfrak{S}_k$ el grupo simétrico de $I_k = \{1,2,\ldots,k\}$. Para $k \geq 2$ notamos con $\mathscr{C}_k$ a la clase de conjugación de las involuciones en $\mathfrak{S}_n$ que son producto de $\left[\frac{k}{2}\right]$ transposiciones disjuntas. Si k es impar, asociada con una involución $\iota \in \mathscr{C}_k$ existe una única involución

$\widehat{\iota} \in \mathscr{C}_{k+1}$ tal que $\iota\,\widehat{\iota}$ es una transposición de la forma $(j,k+1)$. Definimos $\delta_k \in V_{\mathscr{C}_k}$ como sigue:

$$\begin{array}{ll} \delta_2 = (1,2) & \\ \delta_k = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)(\delta_{k-1}) & \text{si } k \text{ es impar} \\ \delta_k = \sum_{\iota \in \mathscr{C}_k} \varepsilon_\iota \widehat{\iota} & \text{si } k \text{ es par y } \delta_{k-1} = \sum_{\iota \in \mathscr{C}_{k-1}} \varepsilon_\iota\, \iota \end{array}$$

Aquí, ε_ι toma valores en $\{-1,1\}$.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= (1,2) \\ \delta_3 &= (1,2) - (1,3) + (2,3) \\ \delta_4 &= (1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (2,3)(1,4) \end{aligned}$$

En la siguiente proposición mostramos que δ_k está asociado con la función signo de $\mathfrak{S}_k$ y que su $\mathfrak{S}_n$-órbita genera una componente irreducible de $V_{\mathscr{C}_k}$.

Proposición 3.1.

i) $\delta_k \neq 0$ *y verifica*

$$\pi\delta_k = sg(\pi)\,\delta_k \qquad \forall \pi \in \mathfrak{S}_k$$

ii) *El proyector dado por*

$$\Delta_m = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} sg(\pi)\, \pi \qquad k \leq m \leq n$$

es idénticamente nulo sobre $V_{\mathscr{C}_k}$ *si* $\left[\frac{m}{2}\right] > \left[\frac{k}{2}\right]$ *y* Δ_k *tiene rango* 1 *sobre* $V_{\mathscr{C}_k}$ *cuando* k *es un número impar.*

iii) *El carácter de* $\mathfrak{S}_n$ *asociado al subespacio de* $V_{\mathscr{C}_k}$ *generado por la* $\mathfrak{S}_n$*-órbita de* δ_k *es* $\chi_{[n-k,1^k]}$.

Demostración. i) Por la definición, resulta claro que δ_k es una suma signada que involucra a todos los elementos en $\mathscr{C}_k \cap \mathfrak{S}_k$, y en consecuencia δ_k es distinto de cero.

Notemos con τ_i la transposición $(i-1,i)$. Se tiene que $\tau_2,\ldots,\tau_k$ generan $\mathfrak{S}_k$ y además se verifican:

$$\tau_j\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)\tau_j \quad \text{si} \quad j < k$$

$$\tau_k(i,k) = (i,k)(i,k-1) \qquad \text{si} \quad i < k-1$$

Luego, si k es impar, de las identidades precedentes se sigue inductivamente, si $j < k$:

$$\begin{aligned} \tau_j\delta_k &= \tau_j\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)\delta_{k-1} = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)\tau_j\delta_{k-1} \\ &= -\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)\delta_{k-1} = -\delta_k \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\tau_k\delta_k &= \tau_k\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)\delta_{k-1} = \left(\tau_k-\sum_{i=1}^{k-1}(i,k)(i,k-1)\right)\delta_{k-1}\\ &= -\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}(i,k)\right)\delta_{k-1} = -\delta_k\end{aligned}$$

Ahora, si k es par, para cada $\iota\in\mathscr{C}_k$ tenemos que τ_i intercambia los pares $\widehat{\iota},\tau_i\widehat{\iota}$. Si $i<k$, haciendo uso que $\tau_i\delta_{k-1}=-\delta_{k-1}$, resulta que el par $\widehat{\iota},\tau_i\widehat{\iota}$ aparece con signos opuestos en δ_k si $\iota\,\widehat{\iota}=(i,k)$ o $\iota\,\widehat{\iota}=(i-1,k)$, y en caso contrario $\tau_i\widehat{\iota}=-\widehat{\iota}$ si $\iota\,\widehat{\iota}\neq(i,k),(i-1,k)$, de esto se sigue que $\tau_i\delta_k=-\delta_k$. Para analizar la acción de τ_k en δ_k consideramos las involuciones ι en cuyos factores interviene $(k-1,k)$ o interviene $(i,k-1)(j,k)$. En el primer caso $\tau_k\,\iota=-\iota$. En el segundo caso τ_k intercambia una involución ι que incluye los factores $(i,k-1)(j,k)$ con otra donde sólo estos dos factores son reemplazados por $(i,k)(j,k-1)$. En este caso, asumiendo inductivamente que $(i,j)\,\delta_{k-1}=-\delta_{k-1}$ y teniendo en cuenta que $\widehat{\iota},\tau_k\widehat{\iota}$ son intercambiados por (i,j), se concluye que $\widehat{\iota},\tau_k\widehat{\iota}$ intervienen con signos opuestos en la expresión de δ_k y consecuentemente se tiene $\tau_k\delta_k=-\delta_k$.

ii) Sea $v=\sum_{\iota\in\mathscr{C}_k}\lambda_\iota\,\iota$ en la imagen del operador Δ_m. Se tiene:

$$\pi v = sg(\pi)\,v \qquad \forall\pi\in\mathfrak{S}_m$$

Si $\left[\frac{m}{2}\right]>\left[\frac{k}{2}\right]$, para cada $\iota\in\mathscr{C}_k$ existe una transposición $\tau_\iota\in\mathfrak{S}_m$ que no es un factor de ι, pero de la identidad $\tau_\iota v=-v$ se concluye que λ_ι debe ser cero, y así $v=0$.

Si $m=k$ y k es un número impar. Se tiene:

$$\Delta_k(\iota)=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_k} sg(\pi)(-1)^{m_{\pi,\iota}}\ \pi\iota\pi^{-1}$$

es claro que, en los términos de la expresión, aparecen todos los elementos de $\mathscr{C}_k\cap\mathfrak{S}_k$ y cada elemento $\zeta=\nu\iota\nu^{-1}$ se acompaña del coeficiente:

$$sg(\nu)\sum_{\pi\in\mathscr{Z}_\zeta} sg(\pi)(-1)^{m_{\pi,\zeta}}$$

siendo $\mathscr{Z}_\zeta$ el centralizador de ζ en $\mathfrak{S}_k$. No es difícil ver que $sg(\pi)=(-1)^{m_{\pi,\zeta}}$ para $\pi\in\mathscr{Z}_\zeta$, luego:

$$\Delta_k(\iota)=\frac{|\mathscr{Z}_\zeta|}{k!}\sum_{\iota\in\mathscr{C}_k\cap\mathfrak{S}_k}\varsigma_\iota\,\iota$$

donde ς_ι toma valores en $\{-1,1\}$. Se sigue que existe $\lambda\in\mathbb{Q}$ tal que $\Delta_k(\iota)-\lambda\,\delta_k$ no involucre en su desarrollo al menos una involución σ de $\mathscr{C}_k\cap\mathfrak{S}_k$. Sea τ una transposición que no pertenezca al centralizador de σ en $\mathfrak{S}_k$, de la identidad:

$$\tau\left(\Delta_k(\iota)-\lambda\,\delta_k\right)=-\left(\Delta_k(\iota)-\lambda\,\delta_k\right)$$

resulta que $\tau\sigma\tau^{-1}$ no interviene en la expresión $\Delta_k(\iota)-\lambda\,\delta_k$. Del hecho que $\mathfrak{S}_k$ actúa transitivamente en $\mathscr{C}_k$ se desprende que $\Delta_k(\iota)=\lambda\,\delta_k$ y consecuentemente, el rango de Δ_k es igual a 1.

iii) Sea k impar. A la involución $\iota = (1,2)(3,4)\cdots(k-2,k-1) \in \mathscr{C}_k$ le asignamos el polinomio $e_\iota \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ definido como sigue:

$$e_\iota = \sum_{\pi \in \mathscr{N}_\iota} sg(\pi)\, x^{\pi\alpha}$$

donde $\mathscr{N}_\iota$ es el centralizador de ι en $\mathfrak{S}_k$ y $\alpha = (1,2,\dots,k,0,\dots,0)$ es un multiíndice. Dada la independencia lineal de las involuciones y la compatibilidad:

$$\pi\iota = sg(\pi)\,\iota \qquad \forall \pi \in \mathscr{N}_\iota$$

podemos definir un morfismo de $\mathfrak{S}_n$-módulos $\theta : V_{\mathscr{C}_k} \to \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ inducido por:

$$\theta(\sigma\iota) = \sigma e_\iota \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Encontramos que si ι y $\sigma\iota$ son involuciones distintas, entonces e_ι y σe_ι no tienen monomios comunes, luego θ es un isomorfismo y verifica:

$$\Delta_k(\theta(\delta_k)) = \theta(\delta_k)$$

Pero la imagen de Δ_k en el subespacio de $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ generado por $x^{\sigma\alpha}$ con $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ es de rango 1 generada por el producto de las raíces positivas de $\mathfrak{S}_n$ (ver [7] o [16]), es decir, la $\mathfrak{S}_n$-órbita de $\theta(\delta_k)$ genera un espacio de Macdonald cuyo carácter se corresponde con $\chi_{[n-k,1^k]}$. □

REFERENCIAS

[1] Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *A Gelfand model for the symmetric group*, Communications in Algebra, **29** (4), 1841–1851 (2001).

[2] Araujo, J.O., *A Gelfand model for a Weyl group of type Bn*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **44**, no. 2 (2003) 359–373.

[3] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Weyl group of type Dn and the branching rules Dn $\hookrightarrow$ Bn*. Journal of Algebra, vol. 294, (2005), 97–116.

[4] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Symmetric Generalized Group*, por aparecer en Communications in Algebra.

[5] Baddeley, R., *Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups*. Journal of London Mathematical Society no. **44**, serie 2 (1991) 55–74.

[6] Bernstein, I, Gelfand, I. and Gelfand, S. *Models of representations of Lie groups*, Selected. Math. Soviet **1** (2) (1981) 121-142.

[7] Carter, R., *Conjugacy Classes in theWeyl Group*. Compositio Mathematica **25**, no. 1 (1972) 1–59.

[8] Howlett, R. and Zworestine, C., *On Klyachkos model for the representations of finite linear groups*. China Higher Education Press (Beijing), and Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg), (2000), 229–246.

[9] Humphreys, J., *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.

[10] Inglis, N. F. J. and Saxl, J., *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*, Archiv der Mathematik **57** (1991), 424–431.

[11] James, G. and Kerber, A., *The representation theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 16. Addison Wesley 1981.

[12] James, G. y Liebeck, M., *Representations and Characters of Groups.* Cambridge University Press, 1995.

[13] Kane, R., *Reflection Groups and Invariant Theory*. Springer-Verlag, 2001.

[14] Klyachko, A. A., *Models for the complex representations of the groups $GL(n,q)$*, Math. USSR Sbornik **48** (1984), 365–379.

[15] Kodiyalam, V. and Verma, D.N., *A natural representation model for symmetric groups*. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.

[16] Lusztig, G., *A class of irreducible representations of a Weyl Group*. Indagationes Mathematicae 41 (1979) 323–335.

[17] Macdonald, I. G., *Some Irreducible Representations Of Weyl Groups*. Bulletin of the London Mathematical Society 4 (1972) 148–150.

[18] Pantoja, J. and Soto-Andrade, J., *Fonctions sphériques et modèles de Gelfand pour le groupe de mouvements rigides d'un espace paraeuclidien sur un corps local.* Comptes Rendus de L.Académie des Sciences **302**, (1986), 463–466.
[19] Springer, T. A., *A Construction of Representations of Weyl Groups*. Inventiones Mathematicae **44** (1978) 279–293.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, UNCPBA - TANDIL