Una dualidad para semirretículos distributivos monótonos

XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca

Sergio Celani y Paula Menchón

CONICET - Facultad de Cs. Exactas. UNICEN

1 de junio de 2017

Definición

Un $\wedge$-semirretículo con último elemento, es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1\rangle$ de tipo $(2, 0)$ tal que la operación $\wedge$ es idempotente, conmutativa, asociativa y $a \wedge 1 = a$ para todo $a \in A$.

Un $\wedge$-semirretículo $\mathbf{A}$ es distributivo si para todo $a, b, c \in A$ tales que $a \wedge b \leq c$ existen $a_1, b_1 \in A$ tales que $a \leq a_1$, $b \leq b_1$ y $c = a_1 \wedge b_1$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{DS}$. Consideremos el poset $\langle X(\mathbf{A}), \subseteq \rangle$ y la aplicación $\beta\colon A \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ definida por $\beta(a) = \{P \in X(\mathbf{A}) : a \in P\}$.

Teorema

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{DS}$. Entonces $\mathbf{A}$ es isomorfo a la subálgebra $\beta[A] = \{\beta(a) : a \in A\}$ de $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, X(\mathbf{A}) \rangle$.

Definición

Un DS-espacio es un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ que satisface las siguientes condiciones:

1. *Es conjunto de todos los subconjuntos compactos y abiertos $\mathcal{KO}(X)$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ sobre X.*
2. *$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es sober.*

Si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un DS-espacio, entonces $\langle D(X), \cap, X \rangle$ es un semirretículo distributivo. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{DS}$. Consideremos $\mathcal{K}_{\mathbf{A}} = \{\beta(a)^c : a \in A\}$ y sea $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ la topología generada por la base $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}$. Entonces, $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$ es un DS-espacio, llamado el espacio dual de $\mathbf{A}$.

Definición

Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un DS-espacio. Un saturado S-básico es un subconjunto $Z \subseteq X$ tal que $Z = \bigcap \{W : W \in \mathcal{L}\}$ para alguna familia dualmente dirigida $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{KO}(X)$.

Denotaremos por $\mathcal{S}(X)$ al conjunto de todos los saturados S-básicos de un DS-espacio $\langle X, \mathcal{T} \rangle$.
Todo saturado S-básico es un conjunto saturado de la topología y en particular $\mathcal{S}(X)$ contiene precisamente los subconjutos compactos saturados de la topología.

Lema

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{DS}$. *Los conjuntos ordenados* $\langle Id(\mathbf{A}), \subseteq \rangle$ *y* $\langle \mathcal{S}(X(\mathbf{A})), \subseteq \rangle$ *son dualmente isomorfos.*

Consideremos $\alpha \colon Id(\mathbf{A}) \to \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ la aplicación definida por

$$\alpha(I) = \bigcap \{\beta(a)^c : a \in I\} = \{P \in X(\mathbf{A}) : P \cap I = \emptyset\}$$

y sea $I_{\mathbf{A}} \colon \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \to Id(\mathbf{A})$ la aplicación definida por

$$I_{\mathbf{A}}(Z) = \{a \in A : \beta(a) \cap Z = \emptyset\}.$$

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *un semirretículo. Una completación de* $\mathbf{A}$ *se llama extensión canónica de* $\mathbf{A}$ *si es densa y compacta.*

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *un semirretículo, entonces existe una extensión canónica de* $\mathbf{A}$ *que es única salvo isomorfismos que fijen* $\mathbf{A}$.

Lema

Consideremos el semirretículo distributivo $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, 1 \rangle$. $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, \cup, X(\mathbf{A}), \emptyset \rangle$ *es una extensión canónica de* $\mathbf{A}$, *donde* $A \cong \beta[A] \subseteq \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.

Definición

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{DS}$. *El par* $\langle \mathbf{A}, m \rangle$ *es llamado semirretículo monónoto si* m *es un operador definido sobre* $\mathbf{A}$ *que cumple con la condición de monotonía, es decir, si para todo* $a, b \in A$ *tales que* $a \leq b$ *se cumple que* $ma \leq mb$.

$m : A \to A$ es un operador monónoto si y sólo si $m(a \wedge b) \leq ma \wedge mb$ para todo $a, b \in A$.

Sea $\langle \mathbf{A}, m \rangle \in \mathcal{MDS}$. Las aplicaciones

$$m^{\sigma}, m^{\pi} : \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})) \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$$

definidas por

$$m^{\sigma}(X) = \bigcup \{ \bigcap \{ \beta(ma) : Y \subseteq \beta(a) \} : X \supseteq Y \in \mathcal{C}(X(\mathbf{A})) \}$$

y

$$m^{\pi}(X) = \bigcap \{ \bigcup \{ \beta(ma) : Z \subseteq \beta(a)^c \} : X^c \supseteq Z \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \}$$

son extensiones monótonas de m, es decir, $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), m^{\sigma} \rangle, \langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), m^{\pi} \rangle \in \mathcal{MDS}$ y para todo $a \in A$ se cumple $m^{\sigma}(\beta(a)) = m^{\pi}(\beta(a)) = \beta(ma)$.

Definición

Un DS-espacio $\mathcal{S}$-monotóno es una estructura $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ donde $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un DS-espacio y $R \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ es una multirelación tal que

1. $m_R(U) = \{x \in X : \forall Z \in R(x)[Z \cap U \neq \emptyset]\} \in D(X)$ *para todo* $U \in D(X)$ *y*
2. $R(x) = \bigcap\{L_U : U \in D(X)$ *y* $x \in m_R(U)\}$ *para todo* $x \in X$.

Análogamente, un DS-espacio $\mathcal{C}$-monotóno es una estructura $\langle X, \mathcal{T}, G\rangle$ donde $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un DS-espacio y $G \subseteq X \times \mathcal{C}(X)$ es una multirelación tal que

1. $\mathbf{m}_G(U) = \{x \in X : \exists Y \in G(x)[Y \subseteq U]\} \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$, y
2. $G(x) = \bigcap\{(D_U)^c : U \in D(X)$ y $x \in \mathbf{m}_G(U)^c\}$ para todo $x \in X$.

Sean $m_R \colon \mathrm{Up}(X) \to \mathrm{Up}(X)$ y $\mathbf{m}_G \colon \mathrm{Up}(X) \to \mathrm{Up}(X)$ los operadores definidos por

$$m_R(U) = \{x \in X : \forall Z \in R(x)[Z \cap U \neq \emptyset]\} \text{ y}$$

$$\mathbf{m}_G(U) = \{x \in X : \exists Y \in G(x)[Y \subseteq U]\}$$

Lema

Las álgebras $\langle D(X), m_R \mid_{D(X)} \rangle$ *y* $\langle D(X), \mathbf{m}_G \mid_{D(X)} \rangle$ *son subálgebras de los semirretículos monotónos* $\langle \mathrm{Up}(X), m_R \rangle$ *y* $\langle \mathrm{Up}(X), \mathbf{m}_G \rangle$ *y además* $m_R = (m_R \mid_{D(X)})^\pi$ *y* $\mathbf{m}_G = (\mathbf{m}_G \mid_{D(X)})^\sigma$.

Sea $\langle \mathbf{A}, m \rangle \in \mathcal{MDS}$. Sea $R_m \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ la relación definida por

$$(P, Z) \in R_m \text{ si y sólo si } m^{-1}(P) \cap I_{\mathbf{A}}(Z) = \emptyset.$$

Por otro lado, sea $G_m \subseteq X(\mathbf{A}) \times \mathcal{C}(X(\mathbf{A}))$ la relación definida por

$$(P, Y) \in G_m \text{ si y sólo si } F_Y \subseteq m^{-1}(P).$$

Lema

$\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}, R_m \rangle$ es un DS-espacio $\mathcal{S}$-monotóno y $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}, G_m \rangle$ es un DS-espacio $\mathcal{C}$-monotóno.

Dado $\langle \mathbf{A}, m \rangle \in \mathcal{MDS}$, existe una conexión de Galois entre $\mathcal{P}(\mathcal{S}(X))$ y $\mathcal{P}(\mathcal{C}(X))$ que permite construir un tipo de DS-espacio a partir del otro.

Definición

Dado $\langle \mathbf{A}, m \rangle \in \mathcal{MDS}$, la estructura $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}, R_m \rangle$ es el DS-espacio monótono asociado a $\langle \mathbf{A}, m \rangle$. El álgebra $\langle D(X), m_R \rangle$ es el semirretículo monótono asociado al DS-espacio monótono $\langle X, \mathcal{T}, R \rangle$.

Teorema

Sea $\langle \mathbf{A}, m \rangle \in \mathcal{MDS}$. *La estructura* $\langle \mathrm{Up}(X(\mathbf{A})), \cap, m_{R_m}, X(\mathbf{A}) \rangle$ *es un semirretículo distributivo monotóno y la aplicación* $\beta \colon A \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ *definida por*

$$\beta(a) = \{P \in X(\mathbf{A}) : a \in P\}$$

es un homomorfismo inyectivo de semirretículos monótonos. La aplicación restringida $\beta \colon A \to D(X(\mathbf{A}))$ *es un isomorfismo de semirretículos monótonos.*

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2\rangle$ dos DS-espacios monótonos. Un aplicación $f : X_1 \to X_2$ es un isomorfismo de DS-espacios monótonos si satisface

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *$(x, Z) \in R_1$ si y solo si $(f(x), f[Z]) \in R_2$, para todo $x \in X_1$ y $Z \in \mathcal{S}(X_1)$.*

Teorema

Sea $\langle X, \mathcal{T}, R\rangle$ un DS-espacio monótono. La aplicación $H_X : X \to X(D(X))$ definida por

$$H_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$$

es un isomorfismo de DS-espacios monótonos.

Teorema

Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ *un DS-espacio. Consideremos una relación* $R \subseteq X \times \mathcal{S}(X)$ *tal que* $m_R(U) = \{x \in X : \forall Z \in R(x)[Z \cap U \neq \emptyset]\} \in D(X)$ *para todo* $U \in D(X)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. $R(x) = \bigcap\{L_U : x \in m_R(U)\ y\ U \in D(X)\}$ *para todo* $x \in X$,
2. *Si* $(H_X(x), H_X[Z]) \in R_{m_R}$ *entonces* $(x, Z) \in R$ *Para todo* $x \in X$ *y* $Z \in \mathcal{S}(X)$,
3. $m_R(Z^c) = \bigcup\{m_R(U) : Z \subseteq U^c\ y\ U \in D(X)\}$ *para todo* $Z \in \mathcal{S}(X)$, *y* $R(x)$ *es creciente en* $\langle \mathcal{S}(X), \subseteq \rangle$*para todo* $x \in X$.

Definición

Una $\wedge$-relación entre dos DS-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_2\rangle$ es una relación $S \subseteq X_1 \times X_2$ que satisface las siguiente condiciones

1. $h_S(U) \in D(X_1)$ *para todo* $U \in D(X_2)$, *y*
2. $S(x) = \bigcap\{U \in D(X_2) : S(x) \subseteq U\}$ *para todo* $x \in X_1$.

Si $S \subseteq X_1 \times X_2$ es una $\wedge$-relación, entonces h_S es un homomorfismo entre semirretículos distributivos donde $h_S \colon D(X_2) \to D(X_1)$ es la aplicación definida por

$$h_S(U) = \{x \in X_1 : S(x) \subseteq U\}.$$

Por otra parte, sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{DS}$. Sea $h \colon A \to B$ un homomorfismo. La relación $S_h \subseteq X(\mathbf{B}) \times X(\mathbf{A})$ definida por

$$(P, Q) \in S_h \text{ iff } h^{-1}[P] \subseteq Q$$

es una $\wedge$-relación.

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_1, R_1 \rangle$ *y* $\langle X_2, \mathcal{T}_2, R_2 \rangle$ *dos DS-espacios monótonos. Consideremos una* $\wedge$*-relación* $S \subseteq X_1 \times X_2$*. Diremos que* S *es una* $\wedge$*-relación monótona si para todo* $x \in X_1$ *y para cada* $U \in D(X_2)$ *satisface*

$$U^c \in R_2[S(x)] \text{ si y sólo si } S^{-1}[U^c] \in R_1(x)$$

donde $R_2[S(x)] = \{Z \in \mathcal{S}(X_2) : \exists y \in S(x)\ [(y, Z) \in R_2]\}$.

Teorema

Sea $S \subseteq X_1 \times X_2$ una $\wedge$-relación. S es monótona si y sólo si $h_S \colon D(X_2) \to D(X_1)$ es un homomorfismo de semirretículos monótonos.

Teorema

Sean $\langle \mathbf{A}, m_{\mathbf{A}} \rangle, \langle \mathbf{B}, m_{\mathbf{B}} \rangle \in \mathcal{MDS}$. Sea $h \colon A \to B$ un homomorfismo. h es un homomorfismo de semirretículos monótonos si y sólo si S_h es una $\wedge$-relación monótona.

El funtor $\mathbb{D} : \mathcal{MDSR} \to \mathcal{MDSH}$ definido por

1. $\mathbb{D}(X) = \langle D(X), m_R \rangle$ si $\langle X, \mathcal{T}, R \rangle$ es un DS-espacio monótono,
2. $\mathbb{D}(S) = h_S$ si S es una $\wedge$-relación monótona

es un funtor contravariante.
El funtor $\mathbb{X} : \mathcal{MDSH} \to \mathcal{MDSR}$ definido por

1. $\mathbb{X}(\mathbf{A}) = \langle X(\mathbf{A}); \mathcal{T}_A, R_m \rangle$ si $\langle \mathbf{A}, m \rangle$ es un semirretículo monótono,
2. $\mathbb{X}(h) = S_h$ si h es un homomorfismo de semirretículos monótonos

es un funtor contravariante.

Corolario

Las categorías $\mathcal{MDSH}$ y $\mathcal{MDSR}$ son dualmente equivalentes.

Muchas Gracias