Congruencias que preservan aniquiladores en DN-álgebras

Ismael Calomino y Sergio Celani

XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca

1 de Junio de 2017

Introducción

$\mathbf{L}$ retículo distributivo y $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ su espacio de Priestley:

Introducción

$\mathbf{L}$ retículo distributivo y $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ su espacio de Priestley:

- Congruencias de $\mathbf{L}$ $\Longleftrightarrow$ cerrados de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$

Introducción

$\mathbf{L}$ retículo distributivo y $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ su espacio de Priestley:

- Congruencias de $\mathbf{L} \Longleftrightarrow$ cerrados de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$

$\mathbf{L}$ retículo distributivo pseudocomplementado:

Introducción

$\mathbf{L}$ retículo distributivo y $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ su espacio de Priestley:

- Congruencias de $\mathbf{L} \Longleftrightarrow$ cerrados de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$

$\mathbf{L}$ retículo distributivo pseudocomplementado:

- Congruencias de $\mathbf{L} \Longleftrightarrow$ cerrados Y de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ tal que

$$\forall P \in Y (maxX(\mathbf{L}) \cap [P) \subseteq Y)$$

Introducción

$\mathbf{L}$ retículo distributivo y $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ su espacio de Priestley:

- Congruencias de $\mathbf{L} \iff$ cerrados de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$

$\mathbf{L}$ retículo distributivo ~~pseudocomplementado~~:

- **???** $\iff$ cerrados Y de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ tal que

$$\forall P \in Y(maxX(\mathbf{L}) \cap [P) \subseteq Y)$$

Introducción

$\mathbf{L}$ retículo distributivo y $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ su espacio de Priestley:

- Congruencias de $\mathbf{L} \Longleftrightarrow$ cerrados de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$

$\mathbf{L}$ retículo distributivo ~~pseudocomplementado~~:

- **AP-congruencias** $\Longleftrightarrow$ cerrados Y de $\langle X(\mathbf{L}), \mathcal{T}_P \rangle$ tal que

$$\forall P \in Y (maxX(\mathbf{L}) \cap [P) \subseteq Y)$$

Introducción

- Janowitz M.: *Annihilator preserving congruence relations of lattices.* Algebra Universalis **5** (1975), 391-394.

Definición

Sea **L** *un retículo distributivo acotado y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$. *Diremos que* θ *es una* **AP-conguencia** *si:*

$$a \wedge b \equiv_\theta 0 \Longrightarrow \exists c \in L \, (a \wedge c = 0 \;\; \& \;\; c \equiv_\theta b) \qquad \text{(AP)}$$

Introducción

- Janowitz M.: *Annihilator preserving congruence relations of lattices.* Algebra Universalis **5** (1975), 391-394.

Definición

Sea **L** *un retículo distributivo acotado y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$*. Diremos que* θ *es una* **AP-conguencia** *si:*

$$a \wedge b \equiv_\theta 0 \Longrightarrow \exists c \in L\ (a \wedge c = 0\ \ \&\ \ c \equiv_\theta b) \qquad \text{(AP)}$$

- Celani S.: *Remarks on annihilators preserving congruence relations.* Mathematica Slovaca **62** (2012), 389-398.

$$a \equiv_\theta b \Longrightarrow \forall x \in a^\circ\ \exists y \in b^\circ\ \ (x \equiv_\theta y) \qquad \text{(AP)}$$

donde $a^\circ = \{c \in L : a \wedge c = 0\}$ es el *aniquilador de a*.

DN-álgebras

Definición

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1\rangle$ *un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es una* **DN-álgebra** *si para cada* $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A : a \leq x\}$$

es un retículo distributivo acotado.

DN-álgebras

Definición

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1\rangle$ *un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es una* **DN-álgebra** *si para cada* $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A : a \leq x\}$$

es un retículo distributivo acotado.

- Cornish W.; Hickman R.: *Weakly distributive semilattices.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), 5-16.

DN-álgebras

Definición

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1 \rangle$ *un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es una* **DN-álgebra** *si para cada* $a \in A$*,*

$$[a) = \{x \in A : a \leq x\}$$

es un retículo distributivo acotado.

- Cornish W.; Hickman R.: *Weakly distributive semilattices.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), 5-16.
- Hickman R.: *Join algebras.* Communications in Algebra **8** (1980), 1653-1685.

DN-álgebras

Definición

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1 \rangle$ *un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es una* **DN-álgebra** *si para cada* $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A : a \leq x\}$$

es un retículo distributivo acotado.

- Cornish W.; Hickman R.: *Weakly distributive semilattices.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), 5-16.
- Hickman R.: *Join algebras.* Communications in Algebra **8** (1980), 1653-1685.
- Chajda I.; Halaš R.; Kühr J.: *Semilattices Structures.* Research and Exposition in Mathematics, Heldermann Verlag (2007).

DN-álgebras

- Abbott J.: *Semi-boolean algebra.* Mat. Vestnik **4** (1967), 177-198.

Ejemplo

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \to, 1 \rangle$ *un álgebra de implicación. Para cada* $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A : a \leq x\} = \{x \in A : a \to x = 1\}$$

es un álgebra de Boole, donde:

- $x \vee y = (x \to y) \to y$,
- $x \wedge_a y = (x \to (y \to a)) \to a$,
- $\bar{x}_a = x \to a$,

para todo $x, y \in [a)$.

AP-congruencias

AP-congruencias

- Calomino I.; Celani S.: *A note on annihilators in distributive nearlattices.* Miskolc Mathematical Note **16** (2015), 65-78.

Definición

Sea **A** *un supremo-semirretículo con último elemento y* $a \in A$. *El* **aniquilador de a** *es el conjunto*

$$a^{\top} = \{x \in A : x \vee a = 1\}.$$

AP-congruencias

- Calomino I.; Celani S.: *A note on annihilators in distributive nearlattices.* Miskolc Mathematical Note **16** (2015), 65-78.

Definición

Sea **A** *un supremo-semirretículo con último elemento y* $a \in A$*. El* **aniquilador de a** *es el conjunto*

$$a^{\top} = \{x \in A : x \vee a = 1\}.$$

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*. Diremos que* θ *es una* **AP-conguencia** *si:*

$$a \equiv_{\theta} b \Longrightarrow \forall x \in a^{\top}\ \exists y \in b^{\top}\ \ (x \equiv_{\theta} y) \tag{AP}$$

AP-congruencias

$\mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$ el conjunto de todas las AP-congruencias de $\mathbf{A}$.

AP-congruencias

$\mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$ el conjunto de todas las AP-congruencias de $\mathbf{A}$.

Ejemplo

Sean $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *DN-álgebras y* $h : A \to B$ *homomorfismo tal que si* $h(a) = 1$*, entonces* $a = 1$*. Entonces* $\mathrm{Ker}\, h \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.*

AP-congruencias

$\mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$ el conjunto de todas las AP-congruencias de $\mathbf{A}$.

Ejemplo

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ DN-álgebras y $h : A \to B$ homomorfismo tal que si $h(a) = 1$, entonces $a = 1$. Entonces $\mathrm{Ker}\, h \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.

Sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Entonces $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$ y

$$(a, b) \in \theta_1 \vee \theta_2 \iff \begin{array}{l} \text{existen } c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b \in A \text{ tal que} \\ (c_i, c_{i+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2 \text{ for all } i = 0, \ldots, n-1. \end{array}$$

AP-congruencias

$\mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$ el conjunto de todas las AP-congruencias de $\mathbf{A}$.

Ejemplo

Sean $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *DN-álgebras y* $h : A \to B$ *homomorfismo tal que si* $h(a) = 1$, *entonces* $a = 1$. *Entonces* $\mathrm{Ker}\, h \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.

Sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Entonces $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$ y

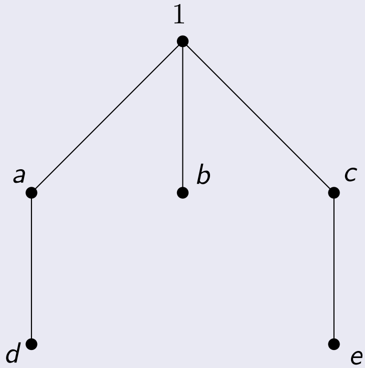
$$(a, b) \in \theta_1 \vee \theta_2 \iff \begin{array}{l} \text{existen } c_0 = a, c_1, ..., c_n = b \in A \text{ tal que} \\ (c_i, c_{i+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2 \text{ for all } i = 0, ..., n-1. \end{array}$$

Lema

$\mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$ *es un subretículo de* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$.

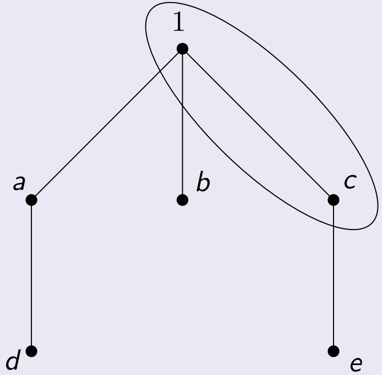
AP-congruencias

Observación



AP-congruencias

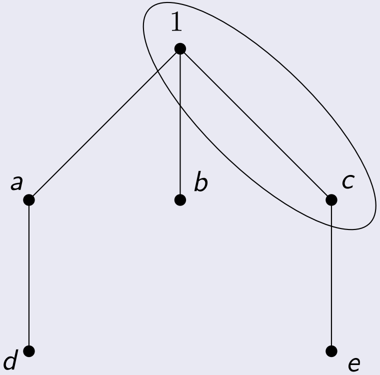
Observación



$$\theta(1, c) \notin \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$$

AP-congruencias

Observación



$$\theta(1, c) \notin \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$$

$$e \in 1^{\top} = A \textit{ pero } \nexists y \in c^{\top} \textit{ tal que } e \equiv_{\theta} y$$

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.
Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$.

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.
Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$. *Entonces* $x \vee a = 1$.

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.*

Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*.*

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.

Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$. *Entonces* $x \vee a = 1$. *Luego,* $(a \to x) \to x = 1$, *i.e.,* $a \to x \leq x$. *Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$.

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.*
Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*.*

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$.

Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$. *Entonces* $x \vee a = 1$. *Luego,* $(a \to x) \to x = 1$, *i.e.,* $a \to x \leq x$. *Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$. *Sea* $y = b \to x$. *Como* $a \equiv_\theta b$,

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$.

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.* *Sea* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*. Como* $a \equiv_\theta b$*,*

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$*. Si* $b \vee y < 1$*,*

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*. Sea* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*. Como* $a \equiv_\theta b$*,*

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$*. Si* $b \vee y < 1$*, existe sistema deductivo maximal* P *tal que*

$$b \vee y = (b \to y) \to y \notin P,$$

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*. Sea* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*. Como* $a \equiv_\theta b$*,*

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$*. Si* $b \vee y < 1$*, existe sistema deductivo maximal* P *tal que*

$$b \vee y = (b \to y) \to y \notin P, \text{ i.e., } b \to y \in P \text{ e } y = b \to x \notin P.$$

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.*
Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*. Como* $a \equiv_\theta b$*,*

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$*. Si* $b \vee y < 1$*, existe sistema deductivo maximal* P *tal que*

$$b \vee y = (b \to y) \to y \notin P, \text{ i.e., } b \to y \in P \text{ e } y = b \to x \notin P.$$

Luego, $b \in P$ *y* $x \notin P$*.*

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.* *Sea* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*. Como* $a \equiv_\theta b$*,*

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$*. Si* $b \vee y < 1$*, existe sistema deductivo maximal* P *tal que*

$$b \vee y = (b \to y) \to y \notin P, \text{ i.e., } b \to y \in P \text{ e } y = b \to x \notin P.$$

Luego, $b \in P$ *y* $x \notin P$*. Como* $b, b \to y \in P$*, entonces* $y \in P$ *lo cual es absurdo.*

AP-congruencias

Observación

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación, entonces* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.* *Sea* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $a \equiv_\theta b$ *y* $x \in a^\top$*. Entonces* $x \vee a = 1$*. Luego,* $(a \to x) \to x = 1$*, i.e.,* $a \to x \leq x$*. Por otro lado, siempre vale que* $x \leq a \to x$ *en* $\mathbf{A}$ *y* $x = a \to x$*. Sea* $y = b \to x$*. Como* $a \equiv_\theta b$*,*

$$x = a \to x \equiv_\theta b \to x = y.$$

Así, $x \equiv_\theta y$*. Si* $b \vee y < 1$*, existe sistema deductivo maximal* P *tal que*

$$b \vee y = (b \to y) \to y \notin P, \text{ i.e., } b \to y \in P \text{ e } y = b \to x \notin P.$$

Luego, $b \in P$ *y* $x \notin P$*. Como* $b, b \to y \in P$*, entonces* $y \in P$ *lo cual es absurdo. Por lo tanto* $y \in b^\top$ *y* $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$*.*

AP-congruencias

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. *si* $a \vee b \equiv_\theta 1$, *entonces existe* $c \in a^\top$ *tal que* $c \equiv_\theta b$,
3. $| \, a^\top \, |_\theta = | \, a \, |_\theta^\top$.

AP-congruencias

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. *si* $a \vee b \equiv_\theta 1$, *entonces existe* $c \in a^\top$ *tal que* $c \equiv_\theta b$,
3. $\mid a^\top \mid_\theta = \mid a \mid_\theta^\top$.

Un homomorfismo $h : A \to B$ es un $\top$-**homomorfismo** si

$$F(h(a^\top)) = h(a)^\top.$$

AP-congruencias

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. *si* $a \vee b \equiv_\theta 1$, *entonces existe* $c \in a^\top$ *tal que* $c \equiv_\theta b$,
3. $\mid a^\top \mid_\theta = \mid a \mid_\theta^\top$.

Un homomorfismo $h : A \to B$ es un $\top$-**homomorfismo** si

$$F(h(a^\top)) = h(a)^\top.$$

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. $q_\theta : A \to A/\theta$ *es un* $\top$*-homomorfismo.*

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Consideremos la familia

$$D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Sea Y un subconjunto de X.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Consideremos la familia

$$D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Sea Y un subconjunto de X.

- Diremos que Y es **saturado básico** si es intersección de abiertos básicos.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Consideremos la familia

$$D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Sea Y un subconjunto de X.

- Diremos que Y es **saturado básico** si es intersección de abiertos básicos.
- La **saturación básica** de Y es el menor saturado básico que lo contiene y lo denotaremos por $\mathrm{Sb}(Y)$.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Consideremos la familia

$$D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Sea Y un subconjunto de X.

- Diremos que Y es **saturado básico** si es intersección de abiertos básicos.
- La **saturación básica** de Y es el menor saturado básico que lo contiene y lo denotaremos por $\mathrm{Sb}(Y)$.
- Diremos que Y es **irreducible** si para cada $U, V \in D(X)$ tal que $U \cap V \in D(X)$ e $Y \cap (U \cap V) = \emptyset$, entonces $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un espacio topológico donde $\mathcal{K}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ sobre X. Consideremos la familia

$$D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Sea Y un subconjunto de X.

- Diremos que Y es **saturado básico** si es intersección de abiertos básicos.
- La **saturación básica** de Y es el menor saturado básico que lo contiene y lo denotaremos por $\mathrm{Sb}(Y)$.
- Diremos que Y es **irreducible** si para cada $U, V \in D(X)$ tal que $U \cap V \in D(X)$ e $Y \cap (U \cap V) = \emptyset$, entonces $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$.
- Diremos que Y es **dualmente compacto** si es no vacío y para toda familia $\{U_i\} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $\bigcap U_i \subseteq Y$, entonces existen $U_1, ..., U_n$ tal que $U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq Y$.

Representación topológica

- Celani S.; Calomino I.: *Stone style duality for distributive nearlattices.* Algebra Universalis **71** (2014), 127-153.

Definición

Un **DN-espacio** *es un espacio topológico* $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ *tal que:*

- $\mathcal{K}$ *es una base de abiertos, compactos y dualmente compactos para una topología* $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ *definida sobre* X.
- *Para cada* $U, V, W \in \mathcal{K}$, $(U \cap W) \cup (V \cap W) \in \mathcal{K}$.
- *Para cada saturado básico irreducible* Y *de* X*, existe un único* $y \in X$ *tal que* $Y = \mathrm{Sb}(y)$.

Representación topológica

- Celani S.; Calomino I.: *Stone style duality for distributive nearlattices.* Algebra Universalis **71** (2014), 127-153.

Definición

Un **DN-espacio** *es un espacio topológico* $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ *tal que:*

- $\mathcal{K}$ *es una base de abiertos, compactos y dualmente compactos para una topología* $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ *definida sobre* X*.*
- *Para cada* $U, V, W \in \mathcal{K}$, $(U \cap W) \cup (V \cap W) \in \mathcal{K}$.
- *Para cada saturado básico irreducible* Y *de* X*, existe un único* $y \in X$ *tal que* $Y = \mathrm{Sb}(y)$.

Si $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es un DN-espacio, entonces

$$\langle D(X), \cup, X \rangle$$

es una DN-álgebra, lo cual llamaremos **DN-álgebra dual**.

Representación topológica

$X(\mathbf{A})$ el conjunto de todos los ideales primos de $\mathbf{A}$.

Representación topológica

$X(\mathbf{A})$ el conjunto de todos los ideales primos de $\mathbf{A}$.
Si $\mathbf{A}$ es una DN-álgebra, entonces el par

$$\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{K}_{\mathbf{A}} \rangle$$

es un DN-espacio, donde la familia

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}} = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$$

es una base de abiertos, compactos y dualmente compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ sobre $X(\mathbf{A})$, siendo

$$\varphi(a) = \{P \in X(\mathbf{A}) : a \notin P\}.$$

Diremos que el DN-espacio $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$ es el **DN-espacio dual**.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y $Y \subseteq X$.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y $Y \subseteq X$.

Definición

Diremos que Y es un **DN-subespacio** *si el par $\langle Y, \mathcal{K}_Y \rangle$ es un DN-espacio, donde $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{K}\}$.*

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un DN-espacio y $Y \subseteq X$.

Definición

Diremos que Y es un **DN-subespacio** *si el par $\langle Y, \mathcal{K}_Y \rangle$ es un DN-espacio, donde $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{K}\}$.*

Si $\mathbf{A}$ es una DN-álgebra y $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$,

$$Y_\theta = \left\{ q_\theta^{-1}(P) : P \in X\left(\mathbf{A}/\theta\right) \right\} \subseteq X(\mathbf{A}).$$

Así $\langle Y_\theta, \mathcal{K}_{Y_\theta} \rangle$ es un DN-subespacio.

Representación topológica

Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un DN-espacio y $Y \subseteq X$.

Definición

Diremos que Y es un **DN-subespacio** *si el par $\langle Y, \mathcal{K}_Y\rangle$ es un DN-espacio, donde $\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{K}\}$.*

Si $\mathbf{A}$ es una DN-álgebra y $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$,

$$Y_\theta = \left\{q_\theta^{-1}(P) : P \in X\left(\mathbf{A}/\theta\right)\right\} \subseteq X(\mathbf{A}).$$

Así $\langle Y_\theta, \mathcal{K}_{Y_\theta}\rangle$ es un DN-subespacio. Si $Y \subseteq X(\mathbf{A})$ DN-subespacio,

$$\theta(Y) = \{(a, b) \in A \times A : \varphi(a) \cap Y = \varphi(b) \cap Y\} \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$$

de manera tal que $\theta = \theta(Y_\theta)$.

Representación topológica

Para cada $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$, sea $\gamma(F) = \{P \in X(\mathbf{A}) : P \cap F \neq \emptyset\}$.

Representación topológica

Para cada $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$, sea $\gamma(F) = \{P \in X(\mathbf{A}) : P \cap F \neq \emptyset\}$.

Lema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra e* Y *un DN-subespacio de* $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta(Y) \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. *si* $a \equiv_{\theta(Y)} b$, *entonces* $\gamma(a^{\top}) \cap Y = \gamma(b^{\top}) \cap Y$.

Representación topológica

Para cada $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$, sea $\gamma(F) = \{P \in X(\mathbf{A}) : P \cap F \neq \emptyset\}$.

Lema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra e* Y *un DN-subespacio de* $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta(Y) \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. *si* $a \equiv_{\theta(Y)} b$, *entonces* $\gamma(a^{\top}) \cap Y = \gamma(b^{\top}) \cap Y$.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra e* Y *un DN-subespacio de* $\langle X(\mathbf{A}), \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \rangle$. *Entonces son equivalentes:*

1. $\theta(Y) \in \mathrm{Con}_{\mathrm{AP}}(\mathbf{A})$,
2. $\forall P \in Y (maxX(\mathbf{A}) \cap [P) \subseteq Y)$.

Fin

GR∀CI∀S POR ∃SCUCH∀RM∃!!!!!!