

LOS CAMPOS DE JACOBI DEL GRUPO DE LIE DE LAS TRANSFORMACIONES DE MOEBIUS DE LA CIRCUNFERENCIA

Natalí R. Vansteenkiste
Daniela Emmanuele

F.C.E.I.A. - Universidad Nacional de Rosario
Proy. ING 478 - Movimientos básicos libres de fuerza en \mathbb{R} -espacios simétricos. Parte II

XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, 31 de Mayo, 1 y 2 de Junio de 2017

LOS MOVIMIENTOS DE MOEBIUS DE LA CIRCUNFERENCIA

El grupo de Lie de los movimientos de Moebius de la circunferencia \mathcal{M} es isométrico al producto riemanniano $\mathbb{S}^1 \times \Delta$ cuando la métrica elegida en la circunferencia \mathbb{S}^1 es la usual, y la métrica en el disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, en coordenadas polares, es la siguiente:

LOS MOVIMIENTOS DE MOEBIUS DE LA CIRCUNFERENCIA

El grupo de Lie de los movimientos de Moebius de la circunferencia \mathcal{M} es isométrico al producto riemanniano $\mathbb{S}^1 \times \Delta$ cuando la métrica elegida en la circunferencia \mathbb{S}^1 es la usual, y la métrica en el disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, en coordenadas polares, es la siguiente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{2(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{1 - r^2} \\ &= \underbrace{\frac{2}{1 - r^2}}_E dr^2 + \underbrace{0}_F drd\theta + \underbrace{\frac{2r^2}{1 - r^2}}_G d\theta^2 \end{aligned}$$

LOS MOVIMIENTOS DE MOEBIUS DE LA CIRCUNFERENCIA

El grupo de Lie de los movimientos de Moebius de la circunferencia \mathcal{M} es isométrico al producto riemanniano $\mathbb{S}^1 \times \Delta$ cuando la métrica elegida en la circunferencia \mathbb{S}^1 es la usual, y la métrica en el disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, en coordenadas polares, es la siguiente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{2(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{1 - r^2} \\ &= \underbrace{\frac{2}{1 - r^2}}_E dr^2 + \underbrace{0}_F drd\theta + \underbrace{\frac{2r^2}{1 - r^2}}_G d\theta^2 \end{aligned}$$

Como la variedad es un producto riemanniano, el espacio tangente en un punto de la variedad se descompone como sigue:

$$(p_1, p_2) \in \mathcal{M} \Rightarrow T_{(p_1, p_2)} \mathcal{M} = T_{p_1} \mathbb{S}^1 \times T_{p_2} \Delta$$

En tanto estamos considerando la métrica producto tenemos que:

$$\langle u, v \rangle_{(p_1, p_2)}^{\mathcal{M}} = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_{(p_1, p_2)}^{\mathcal{M}} = \langle u_1, v_1 \rangle_{p_1}^{\mathbb{S}^1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{p_2}^{\Delta};$$

$$\forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in T_{p_1} \mathbb{S}^1 \times T_{p_2} \Delta.$$

En tanto estamos considerando la métrica producto tenemos que:

$$\langle u, v \rangle_{(p_1, p_2)}^{\mathcal{M}} = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_{(p_1, p_2)}^{\mathcal{M}} = \langle u_1, v_1 \rangle_{p_1}^{\mathbb{S}^1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{p_2}^{\Delta};$$

$$\forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in T_{p_1} \mathbb{S}^1 \times T_{p_2} \Delta.$$

Asimismo, la conexión de Levi-Civita y la curvatura se descomponen en cada factor riemanniano como sigue:

$$\nabla_X^{\mathcal{M}} Y = \nabla_{X_1}^{\mathbb{S}^1} Y_1 + \nabla_{X_2}^{\Delta} Y_2; \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

$$R(X, Y)Z = R^{\mathbb{S}^1}(X_1, Y_1)Z_1 + R^{\Delta}(X_2, Y_2)Z_2; \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

En tanto estamos considerando la métrica producto tenemos que:

$$\langle u, v \rangle_{(p_1, p_2)}^{\mathcal{M}} = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_{(p_1, p_2)}^{\mathcal{M}} = \langle u_1, v_1 \rangle_{p_1}^{\mathbb{S}^1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{p_2}^{\Delta};$$

$$\forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in T_{p_1} \mathbb{S}^1 \times T_{p_2} \Delta.$$

Asimismo, la conexión de Levi-Civita y la curvatura se descomponen en cada factor riemanniano como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathcal{M}} Y &= \nabla_{X_1}^{\mathbb{S}^1} Y_1 + \nabla_{X_2}^{\Delta} Y_2; \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}) \\ R(X, Y)Z &= R^{\mathbb{S}^1}(X_1, Y_1)Z_1 + R^{\Delta}(X_2, Y_2)Z_2; \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

Los campos de Jacobi J (en tanto son campos vectoriales) también se descomponen como $J = (J_1, J_2)$ donde $J_1 \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^1)$ y $J_2 \in \mathcal{X}(\Delta)$.

En [3] se probó que las geodésicas de \mathcal{M} son (vía la isometría \mathcal{F}) de la forma $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ donde γ_1 parametriza la circunferencia con rapidez constante y γ_2 es una geodésica en el disco Δ ,

En [3] se probó que las geodésicas de \mathcal{M} son (vía la isometría \mathcal{F}) de la forma $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ donde γ_1 parametriza la circunferencia con rapidez constante y γ_2 es una geodésica en el disco Δ ,

de *tipo I*, aquellas cuya trayectoria coincide con la imagen de

$$c_1(r) = (r, \theta_0); r \in (0, 1)$$

En [3] se probó que las geodésicas de \mathcal{M} son (vía la isometría \mathcal{F}) de la forma $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ donde γ_1 parametriza la circunferencia con rapidez constante y γ_2 es una geodésica en el disco Δ ,

de *tipo I*, aquellas cuya trayectoria coincide con la imagen de

$$c_1(r) = (r, \theta_0); r \in (0, 1)$$

o bien, de *tipo II*, aquellas cuya trayectoria coincide con la imagen de

$$c_2(\theta) = (\rho(\theta), \theta)$$

donde ρ satisface la ecuación diferencial

$$(\rho')^2 = \frac{\mu + \rho^2}{(1 - \rho^2)\rho^2}$$

para alguna constante $\mu > -1$.

CAMPOS DE JACOBI A LO LARGO DE \mathbb{S}^1

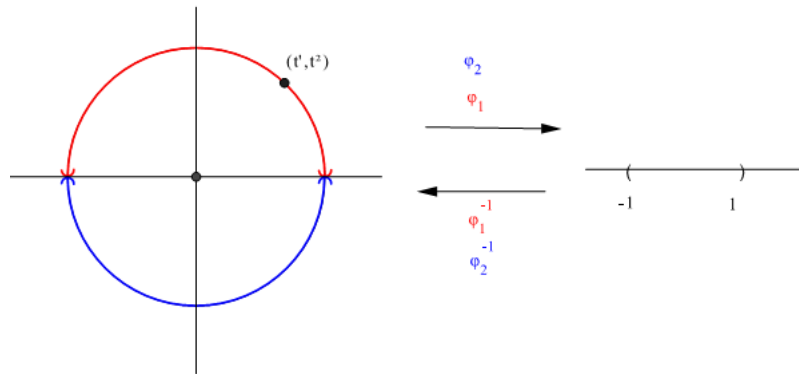
Sea $\mathbb{S}^1 = \left\{ (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^2 (t^i)^2 = 1 \right\}$. Consideramos la topología inducida por \mathbb{R}^2 , de donde resulta Hausdorff y N_2 .

CAMPOS DE JACOBI A LO LARGO DE \mathbb{S}^1

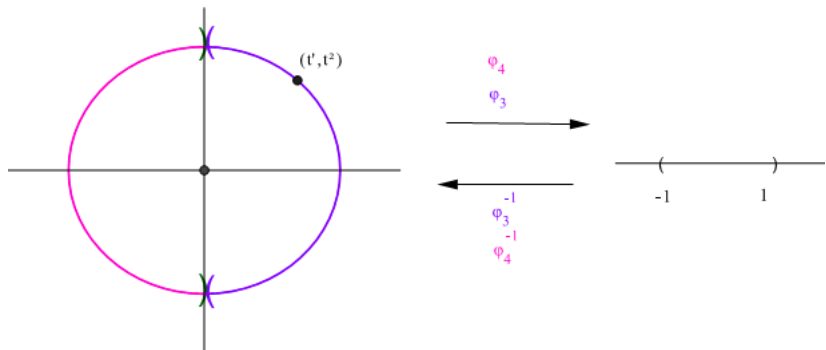
Sea $\mathbb{S}^1 = \left\{ (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^2 (t^i)^2 = 1 \right\}$. Consideramos la topología inducida por \mathbb{R}^2 , de donde resulta Hausdorff y N_2 .

Definimos las cartas:

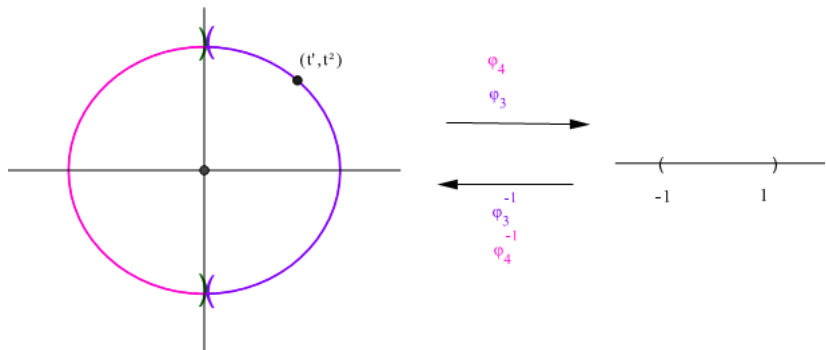
$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R} / (t^1, t^2) \rightarrow t^1, \quad \varphi_2 : U_2 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R} / (t^1, t^2) \rightarrow t^2$$



$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R} / (t^1, t^2) \rightarrow t^2, \varphi_4 : U_4 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R} / (t^1, t^2) \rightarrow t^2$$



$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R} / (t^1, t^2) \rightarrow t^2, \varphi_4 : U_4 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R} / (t^1, t^2) \rightarrow t^2$$



Tomamos la estructura diferenciable dada por el atlas maximal generado por $\{(U_j, \varphi_j) : j = 1, \dots, 4\}$ y como estructura de variedad riemanniana la dada por la métrica inducida.

Sea x la función coordenada dada por φ_j y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\}$ la base de $T_p U_j$.

Sea x la función coordenada dada por φ_j y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\}$ la base de $T_p U_j$.

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\rangle = \left\langle di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right), di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) \right\rangle$$

donde $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión canónica y $p = (t_0^1, t_0^2) \in U_j$.

$$di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{i(p)} - \frac{t_0^1}{t_0^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \Big|_{i(p)} \quad \text{en } U_1 \text{ y } U_2$$

$$di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = -\frac{t_0^2}{t_0^1} \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{i(p)} + \frac{\partial}{\partial t^2} \Big|_{i(p)} \quad \text{en } U_3 \text{ y } U_4$$

Sea x la función coordenada dada por φ_j y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\}$ la base de $T_p U_j$.

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\rangle = \left\langle di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right), di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) \right\rangle$$

donde $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión canónica y $p = (t_0^1, t_0^2) \in U_j$.

$$di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{i(p)} - \frac{t_0^1}{t_0^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \Big|_{i(p)} \quad \text{en } U_1 \text{ y } U_2$$

$$di_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = -\frac{t_0^2}{t_0^1} \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{i(p)} + \frac{\partial}{\partial t^2} \Big|_{i(p)} \quad \text{en } U_3 \text{ y } U_4$$

El coeficiente que nos da la métrica inducida es:

$$g_{11} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{en } U_1 \text{ y } U_2$$

$$g_{11} = \frac{1}{x^2} \quad \text{en } U_3 \text{ y } U_4$$

El símbolo de Christoffel será:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} g_{11} \right\} g^{11} = \frac{x}{(1-x^2)} \text{ para } U_1 \text{ y } U_2$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{x} \text{ para } U_3 \text{ y } U_4$$

El símbolo de Christoffel será:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} g_{11} \right\} g^{11} = \frac{x}{(1-x^2)} \text{ para } U_1 \text{ y } U_2$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{x} \text{ para } U_3 \text{ y } U_4$$

El coeficiente de su tensor de curvatura:

$$R_{111}^1 = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 = 0$$

El símbolo de Christoffel será:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} g_{11} \right\} g^{11} = \frac{x}{(1-x^2)} \text{ para } U_1 \text{ y } U_2$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{x} \text{ para } U_3 \text{ y } U_4$$

El coeficiente de su tensor de curvatura:

$$R_{111}^1 = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 = 0$$

y el de su conexión:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial x} \text{ para } U_1 \text{ y } U_2$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \text{ para } U_3 \text{ y } U_4$$

Si γ es una geodésica en $U_j \subset \mathbb{S}^1$, y J un campo de Jacobi a lo largo de γ será

$$\mathcal{V}(x), J(x) \in T_{\gamma(x)}U_j \text{ con } \mathcal{V}'(x) = a(x) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)}, J(x) = b(x)\mathcal{V}(x).$$

Si γ es una geodésica en $U_j \subset \mathbb{S}^1$, y J un campo de Jacobi a lo largo de γ será

$$\gamma'(x), J(x) \in T_{\gamma(x)}U_j \text{ con } \gamma'(x) = a(x) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)}, J(x) = b(x)\gamma'(x).$$

Luego

$$R(\gamma'(x), J(x))\gamma'(x) = a^3(x)b(x) \underbrace{R_{111}^1}_{=0} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)} = 0$$

Si γ es una geodésica en $U_j \subset \mathbb{S}^1$, y J un campo de Jacobi a lo largo de γ será

$$\gamma'(x), J(x) \in T_{\gamma(x)}U_j \text{ con } \gamma'(x) = a(x) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)}, J(x) = b(x)\gamma'(x).$$

Luego

$$R(\gamma'(x), J(x))\gamma'(x) = a^3(x)b(x) \underbrace{R_{111}^1}_{=0} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)} = 0$$

La ecuación de Jacobi queda entonces:

$$\begin{aligned} J''(x) + R(\gamma'(x), J(x))\gamma'(x) &= 0 \\ b''(x)\gamma'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Si γ es una geodésica en $U_j \subset \mathbb{S}^1$, y J un campo de Jacobi a lo largo de γ será

$$\gamma'(x), J(x) \in T_{\gamma(x)}U_j \text{ con } \gamma'(x) = a(x) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)}, J(x) = b(x)\gamma'(x).$$

Luego

$$R(\gamma'(x), J(x))\gamma'(x) = a^3(x)b(x) \underbrace{R_{111}^1}_{=0} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(x)} = 0$$

La ecuación de Jacobi queda entonces:

$$\begin{aligned} J''(x) + R(\gamma'(x), J(x))\gamma'(x) &= 0 \\ b''(x)\gamma'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Tomando las condiciones iniciales $J(0) = 0, J'(0) = 1$ resulta $J(x) = x\gamma'(x)$

CAMPOS DE JACOBI EN Δ

Consideramos en Δ las coordenadas dadas por la carta:

$$\varphi : U = \Delta \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2 / (r, \theta) \rightarrow \varphi(r, \theta) = (r, \theta)$$

CAMPOS DE JACOBI EN Δ

Consideramos en Δ las coordenadas dadas por la carta:

$$\varphi : U = \Delta \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2 / (r, \theta) \rightarrow \varphi(r, \theta) = (r, \theta)$$

Veamos cuáles son los símbolos de Christoffel en Δ : Como

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-r^2} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{1-r^2} \end{pmatrix}, \text{ resulta}$$

Consideramos en Δ las coordenadas dadas por la carta:

$$\varphi : U = \Delta \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2 / (r, \theta) \rightarrow \varphi(r, \theta) = (r, \theta)$$

Veamos cuáles son los símbolos de Christoffel en Δ : Como

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-r^2} & 0 \\ 0 & \frac{2r^2}{1-r^2} \end{pmatrix}, \text{ resulta}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{r}{1-r^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r(1-r^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-r}{1-r^2}$$

Sea $p_2 \in \Delta$. Los coeficientes del tensor métrico R^Δ en la base

$\mathcal{C} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{p_2}, \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{p_2} \right\}$ de $T_{p_2}\Delta$ son:

Sea $p_2 \in \Delta$. Los coeficientes del tensor métrico R^Δ en la base

$\mathcal{C} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{p_2}, \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{p_2} \right\}$ de $T_{p_2}\Delta$ son:

$$\begin{aligned} R_{111}^1 &= R_{111}^2 = R_{112}^1 = R_{112}^2 = R_{121}^1 = R_{122}^2 = R_{211}^1 \\ &= R_{212}^2 = R_{221}^1 = R_{221}^2 = R_{222}^1 = R_{222}^2 = 0 \end{aligned}$$

$$R_{121}^2 = \frac{-2}{(1-r^2)^2}, \quad R_{122}^1 = \frac{2r^2}{(1-r^2)^2}$$

$$R_{211}^2 = \frac{2}{(1-r^2)^2}, \quad R_{212}^1 = \frac{-2r^2}{(1-r^2)^2}$$

Sea $p_2 \in \Delta$. Los coeficientes del tensor métrico R^Δ en la base

$\mathcal{C} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{p_2}, \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{p_2} \right\}$ de $T_{p_2}\Delta$ son:

$$\begin{aligned} R_{111}^1 &= R_{111}^2 = R_{112}^1 = R_{112}^2 = R_{121}^1 = R_{122}^2 = R_{211}^1 \\ &= R_{212}^2 = R_{221}^1 = R_{221}^2 = R_{222}^1 = R_{222}^2 = 0 \end{aligned}$$

$$R_{121}^2 = \frac{-2}{(1-r^2)^2}, \quad R_{122}^1 = \frac{2r^2}{(1-r^2)^2}$$

$$R_{211}^2 = \frac{2}{(1-r^2)^2}, \quad R_{212}^1 = \frac{-2r^2}{(1-r^2)^2}$$

La curvatura seccional en $p_2 = (r, \theta)$ es: $K(r, \theta) = \frac{-1}{1-r^2}$

Sea $p_2 \in \Delta$. Los coeficientes del tensor métrico R^Δ en la base

$\mathcal{C} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{p_2}, \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{p_2} \right\}$ de $T_{p_2}\Delta$ son:

$$\begin{aligned} R_{111}^1 &= R_{111}^2 = R_{112}^1 = R_{112}^2 = R_{121}^1 = R_{122}^2 = R_{211}^1 \\ &= R_{212}^2 = R_{221}^1 = R_{221}^2 = R_{222}^1 = R_{222}^2 = 0 \end{aligned}$$

$$R_{121}^2 = \frac{-2}{(1-r^2)^2}, \quad R_{122}^1 = \frac{2r^2}{(1-r^2)^2}$$

$$R_{211}^2 = \frac{2}{(1-r^2)^2}, \quad R_{212}^1 = \frac{-2r^2}{(1-r^2)^2}$$

La curvatura seccional en $p_2 = (r, \theta)$ es: $K(r, \theta) = \frac{-1}{1-r^2}$

Resulta variable, negativa e independiente de θ .

CAMPOS DE JACOBI EN Δ A LO LARGO DE GEODÉSICAS DE TIPO I

Buscamos los campos de Jacobi no triviales (normales).

Buscamos los campos de Jacobi no triviales (normales).

Reparametrizando la geodésica c_1 por longitud de arco

$$\begin{aligned} c_1 : (0, 1) &\rightarrow \Delta \\ r &\rightarrow c_1(r) = (r, \theta_0) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\tilde{c}_1(s) = c_1(r(s)) = \left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \theta_0 \right)$$

Buscamos los campos de Jacobi no triviales (normales).

Reparametrizando la geodésica c_1 por longitud de arco

$$\begin{aligned} c_1 : (0, 1) &\rightarrow \Delta \\ r &\rightarrow c_1(r) = (r, \theta_0) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\tilde{c}_1(s) = c_1(r(s)) = \left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \theta_0 \right)$$

Así:

$$0 < r < 1 \implies 0 < s < \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Sea $[a, b] = \left[0 + \varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \tilde{\varepsilon} \right]$ para ciertos $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, y sea $\gamma(s) = \tilde{c}_1(s)|_{[a, b]}$.

Sea $[a, b] = \left[0 + \varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \tilde{\varepsilon} \right]$ para ciertos $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, y sea $\gamma(s) = \tilde{c}_1(s)|_{[a, b]}$.

Llamemos $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$. Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J_2'(a)\| = 1$.

Sea $[a, b] = \left[0 + \varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \tilde{\varepsilon} \right]$ para ciertos $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, y sea $\gamma(s) = \tilde{c}_1(s)|_{[a, b]}$.

Llamemos $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$. Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J'_2(a)\| = 1$.

$\mathcal{B}(a) = \left\{ e_1(a) = \gamma'(a)|_{p_2}; e_2(a) = J'_2(a)|_{p_2} \right\}$ bon de $T_{p_2}\Delta$.

Sea $[a, b] = \left[0 + \varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \tilde{\varepsilon} \right]$ para ciertos $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, y sea $\gamma(s) = \tilde{c}_1(s)|_{[a, b]}$.

Llamemos $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$. Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J_2'(a)\| = 1$.

$\mathcal{B}(a) = \left\{ e_1(a) = \gamma'(a)|_{p_2}; e_2(a) = J_2'(a)|_{p_2} \right\}$ bon de $T_{p_2}\Delta$.

Tomando el transporte paralelo a largo de γ obtenemos bon $\mathcal{B}(s) = \{e_1(s); e_2(s)\}$ de $T_{\gamma(s)}\Delta; \forall s \in [a, b]$.

Sea $[a, b] = \left[0 + \varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \tilde{\varepsilon} \right]$ para ciertos $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, y sea $\gamma(s) = \tilde{c}_1(s)|_{[a, b]}$.

Llamemos $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$. Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J_2'(a)\| = 1$.

$\mathcal{B}(a) = \left\{ e_1(a) = \gamma'(a)|_{p_2}; e_2(a) = J_2'(a)|_{p_2} \right\}$ bon de $T_{p_2}\Delta$.

Tomando el transporte paralelo a largo de γ obtenemos bon $\mathcal{B}(s) = \{e_1(s); e_2(s)\}$ de $T_{\gamma(s)}\Delta; \forall s \in [a, b]$.

Resulta que $J_2(s) = u(s)e_2(s)$ para alguna función $u(s)$. Intentaremos explicitar cuál es la función $u = u(s)$.

Sea $[a, b] = \left[0 + \varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} \pi - \tilde{\varepsilon} \right]$ para ciertos $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, y sea $\gamma(s) = \tilde{c}_1(s)|_{[a, b]}$.

Llamemos $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$. Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J_2'(a)\| = 1$.

$\mathcal{B}(a) = \left\{ e_1(a) = \gamma'(a)|_{p_2}; e_2(a) = J_2'(a)|_{p_2} \right\}$ bon de $T_{p_2}\Delta$.

Tomando el transporte paralelo a largo de γ obtenemos bon

$\mathcal{B}(s) = \{e_1(s); e_2(s)\}$ de $T_{\gamma(s)}\Delta; \forall s \in [a, b]$.

Resulta que $J_2(s) = u(s)e_2(s)$ para alguna función $u(s)$. Intentaremos explicitar cuál es la función $u = u(s)$.

Como e_2 es paralelo a lo largo de γ , tenemos que:

$$J_2(s) = u(s)e_2(s), \quad J_2'(s) = u'(s)e_2(s), \quad J_2''(s) = u''(s)e_2(s)$$

$$\gamma'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r(s), \theta_0)} = e_1(s)$$

$$\gamma'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r(s), \theta_0)} = e_1(s)$$

En la base $\mathcal{B}(s)$:

$$\begin{aligned} R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s) &= \sum_{i=1}^2 \langle R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s), e_i(s) \rangle e_i(s) \\ &= u(s) \underbrace{\tilde{R}_{1211}}_{=0} e_1(s) + u(s) \tilde{R}_{1212} e_2(s) \\ &= K(r(s), \theta) u(s) e_2(s) \end{aligned}$$

$$\gamma'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r(s), \theta_0)} = e_1(s)$$

En la base $\mathcal{B}(s)$:

$$\begin{aligned} R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s) &= \sum_{i=1}^2 \langle R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s), e_i(s) \rangle e_i(s) \\ &= u(s) \underbrace{\tilde{R}_{1211}}_{=0} e_1(s) + u(s) \tilde{R}_{1212} e_2(s) \\ &= K(r(s), \theta) u(s) e_2(s) \end{aligned}$$

Nótese que a lo largo de $\gamma(s)$

$$K(r(s), \theta) = \frac{-1}{1 - r^2(s)} = \frac{-1}{1 - \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)} = -\sec^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

La ecuación a resolver queda entonces

$$\begin{aligned} J_2''(s) + R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s) &= 0 \\ \left(u''(s) - \sec^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)u(s) \right) e_2 &= 0 \\ u''(s) - \sec^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)u(s) &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación a resolver queda entonces

$$\begin{aligned} J_2''(s) + R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s) &= 0 \\ \left(u''(s) - \sec^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)u(s) \right) e_2 &= 0 \\ u''(s) - \sec^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)u(s) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, buscamos la solución del PVI:

$$\begin{cases} u''(s) - \sec^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)u(s) = 0 \\ u(a) = 0; u'(a) = 1 \end{cases}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, a coeficientes variables, cuya solución viene dada por

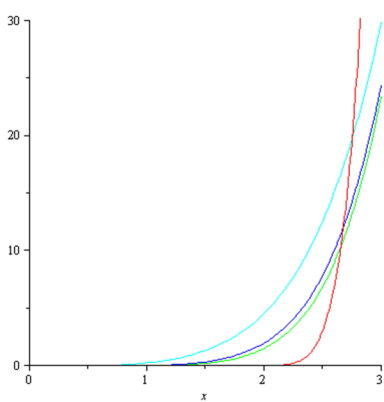
$$\begin{aligned}
 u(s) = & (s-a) + \frac{1}{6 \cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^3 + \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}{\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^4 \\
 & + \frac{1}{120} \frac{1 + 3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + 9 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^5 + O((s-a)^6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(s) = & (s-a) + \frac{1}{6 \cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^3 + \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}{\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^4 \\
 & + \frac{1}{120} \frac{1 + 3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + 9 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^5 + O((s-a)^6)
 \end{aligned}$$

Así encontramos que en la base $\mathcal{B}(s)$ resulta

$$\begin{aligned}
 J_2(s) = & \left((s-a) + \frac{1}{6 \cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^3 + \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}{\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^4 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{120} \frac{1 + 3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + 9 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}(s-a)^5 + O((s-a)^6) \right) e_2(s)
 \end{aligned}$$

Cuando graficamos $|J(s)|^2$ para $s \in [a, b]$



$$a = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \text{ (turquesa)}$$

$$a = 1 \text{ (azul)}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \text{ (verde)}$$

$$a = 2 \text{ (rojo)}$$

Al resolver la ecuación

$$(r'(\theta))^2 = \frac{\mu + r^2(\theta)}{(1 - r^2(\theta))r^2(\theta)}$$

obtenemos que $r(\theta)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\pm \left(\frac{\sqrt{\mu+1}}{2} \sqrt{1-r^2} \cdot \sin \left(\arccos \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\mu+1}} \right) + \frac{\mu+1}{2} \arccos \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\mu+1}} \right) = \theta + cte$$

Al resolver la ecuación

$$(r'(\theta))^2 = \frac{\mu + r^2(\theta)}{(1 - r^2(\theta))r^2(\theta)}$$

obtenemos que $r(\theta)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\pm \left(\frac{\sqrt{\mu+1}}{2} \sqrt{1-r^2} \cdot \sin \left(\arccos \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\mu+1}} \right) + \frac{\mu+1}{2} \arccos \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\mu+1}} \right) = \theta + cte$$

No es posible parametrizar la curva c_2 por longitud de arco, pues no se puede explicitar $r(\theta)$

Sea $\tilde{c}_2(s) = c_2(\theta(s))$ la reparametrización de la curva c_2 por longitud de arco

$$\tilde{c}_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta \\ s \rightarrow \tilde{c}_2(s) = (r(\theta(s)), \theta(s)) \quad \text{y} \quad \|\tilde{c}_2(s)\| = 1$$

Sea $\tilde{c}_2(s) = c_2(\theta(s))$ la reparametrización de la curva c_2 por longitud de arco

$$\tilde{c}_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta \\ s \rightarrow \tilde{c}_2(s) = (r(\theta(s)), \theta(s)) \quad \text{y} \quad \|\tilde{c}_2'(s)\| = 1$$

Sea $[a, b] \subset I$, $\gamma(s) = \tilde{c}_2(s)|_I$ y $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$.

Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J_2'(a)\| = 1$.

$\mathcal{B}(a) = \left\{ e_1(a) = \gamma'(a)|_{\gamma(a)} ; e_2(a) = J_2'(a)|_{\gamma(a)} \right\}$ es una bon de $T_{p_2}\Delta$.

Sea $\tilde{c}_2(s) = c_2(\theta(s))$ la reparametrización de la curva c_2 por longitud de arco

$$\tilde{c}_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta \\ s \rightarrow \tilde{c}_2(s) = (r(\theta(s)), \theta(s)) \quad \text{y} \quad \|\tilde{c}_2(s)\| = 1$$

Sea $[a, b] \subset I, \gamma(s) = \tilde{c}_2(s)|_I$ y $p_2 = \gamma(a) \in \Delta$.

Sea $J_2(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de $\gamma(s)$ con $\|J_2'(a)\| = 1$.

$\mathcal{B}(a) = \left\{ e_1(a) = \gamma'(a)|_{\gamma(a)}; e_2(a) = J_2'(a)|_{\gamma(a)} \right\}$ es una bon de $T_{p_2}\Delta$.

Tomando el transporte paralelo a largo de γ obtenemos bases ortonormales

$\mathcal{B}(s) = \{e_1(s); e_2(s)\}$ de $T_{\gamma(s)}\Delta; \forall s \in I$.

$$J_2(s) = u(s)e_2(s), \quad J_2'(s) = u'(s)e_2(s), \quad J_2''(s) = u''(s)e_2(s)$$

$$\gamma'(s) = \tilde{c}_2'(s) \Big|_{(r(\theta(s)), \theta(s))} = e_1(s)$$

En la base $\mathcal{B}(s)$:

$$\begin{aligned} R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s) &= \sum_{i=1}^2 \langle R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s), e_i(s) \rangle e_i(s) \\ &= K(s)u(s)e_2(s) \end{aligned}$$

$$\gamma'(s) = \tilde{c}_2'(s) \Big|_{(r(\theta(s)), \theta(s))} = e_1(s)$$

En la base $\mathcal{B}(s)$:

$$\begin{aligned} R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s) &= \sum_{i=1}^2 \langle R(\gamma'(s), J_2(s))\gamma'(s), e_i(s) \rangle e_i(s) \\ &= K(s)u(s)e_2(s) \end{aligned}$$

y la ecuación de Jacobi queda:

$$u''(s) - \frac{1}{1 - r^2(\theta(s))} \cdot u(s) = 0$$

CONCLUSIÓN

Hemos probado que vale la siguiente

Proposición: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco en una variedad riemanniana de dimensión dos M y sea $J(s)$ un campo de Jacobi normal a lo largo de γ tal que $J(a) = 0$ y $|J'(a)| = 1$. Tomando el transporte paralelo de $e_1(a) = \gamma'(a)$ y $e_2(a) = J'(a)$ a lo largo de γ obtenemos bases ortonormales $\{e_1(s), e_2(s)\}$ del $T_{\gamma(s)}M$ para todo $s \in [a, b]$. En esta base resulta que $J(s) = u(s)e_2(s)$ para alguna función $u = u(s)$ y la ecuación de Jacobi que verifica se reduce a

$$u''(s) + K(s)u(s) = 0$$

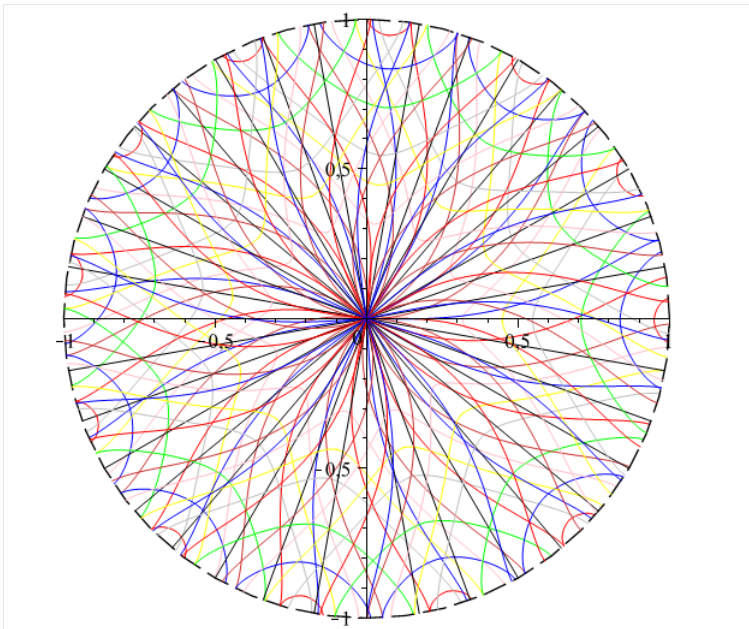
con condiciones iniciales $u(a) = 0$ y $u'(a) = 1$.

REFLEXIONES FINALES











Se han podido establecer los campos de Jacobi normales en la variedad Δ :

- Geodésicas de tipo I, en forma explícita
- Geodésicas de tipo II, encontramos la ecuación diferencial que los define

Aún así podemos graficar estas geodésicas en el siguiente diagrama



BIBLIOGRAFÍA

-  Arnold, V.I.; *Mathematical methods of classical Mechanics*, Graduate Texts in Math. **60** Springer, Berlin, 1989.
-  Do Carmo, Manfredo P; *Riemannian Geometry*. Series Mathematics: Theory and Applications. Birkhauser Boston. USA, 1992.
-  Emmanuele, D.; Salvai, M.; *Force Free Moebius Motions of the Circle*. Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 27, pp 59-65. Sofía, Bulgaria, 2012.
-  Kobayashi, S.; Nomizu, K.; *Foundations of Differential Geometry*, Volúmenes I y II. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1969.
-  Lee, John; *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Math. **218**. Springer, Berlin, 2003.
-  Lee, John M. - *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag. New York, 1997.
-  O'Neill, B.; *Semi-riemannian Geometry*, Academic Press Inc, New York (1983).
-  O'Neill, B.; *Elementos de Geometría Diferencial*, Editorial Limusa-Wiley, S.A., México (1972).
-  Spivak, Michael - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*; Vol. I; 2ª Edición; Publish or Perish, Inc; Berkeley (USA), 1979.
-  Warner, F. - *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.