

Hamiltonización en teorías de campo y triples de Tulczyjew

S. Capriotti¹

¹Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina y CONICET

Trabajo conjunto con Juan Carlos Marrero (ULL)

XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, 2017

La comunicación

Mecánica y teoría de campos

- Versión Hamiltoniana de teorías de campo de primer orden
- Breve intro a triples de Tulczyjew en teorías de campo

Sistemas diferenciales exteriores y ecuaciones de movimiento

- EDS, Grassmanianos y jets
- EDS y ecuaciones de movimiento

Problemas inversos en teorías de campo

- Subvariedades Lagrangianas y elementos integrales
- Hamiltonización

Donde andamos...

Mecánica y teoría de campos

- Versión Hamiltoniana de teorías de campo de primer orden
- Breve intro a triples de Tulczyjew en teorías de campo

Sistemas diferenciales exteriores y ecuaciones de movimiento

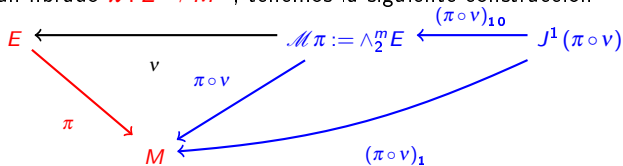
- EDS, Grassmanianos y jets
- EDS y ecuaciones de movimiento

Problemas inversos en teorías de campo

- Subvariedades Lagrangianas y elementos integrales
- Hamiltonización

Preliminares

- ▶ ¡Suma sobre índices repetidos!
- ▶ Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M^m$, tenemos la siguiente construcción



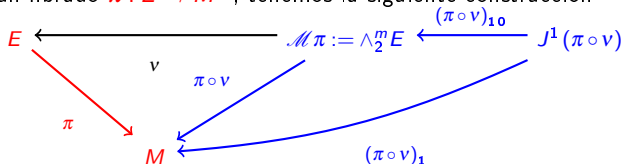
- ▶ Fijar forma de volumen $\eta \in \Omega^m(M)$. Si (x^i) son coordenadas sobre $U \subset M$, se define

$$\eta_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \eta \in \Omega^{m-1}(U).$$

- ▶ Tenemos las coordenadas inducidas
 - ▶ $\pi : (x^i, u^A) \mapsto (x^i)$ sobre E .
 - ▶ En $\mathcal{M}\pi$, $\rho = (x^i, u^A, p, p_A^i)$ sii $\rho = p\eta + p_A^i du^A \wedge \eta_i$.
 - ▶ $(x^i, u^A, p, p_A^i, \bar{u}_i^A, \bar{p}_i, \bar{p}_{Aj}^i)$ on $J^1(\pi \circ v)$.

Preliminares

- ▶ ¡Suma sobre índices repetidos!
- ▶ Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M^m$, tenemos la siguiente construcción



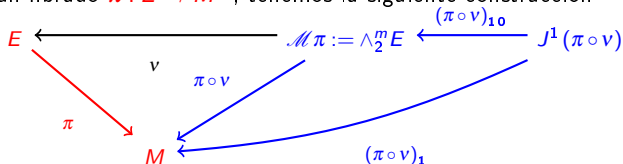
- ▶ Fijar forma de volumen $\eta \in \Omega^m(M)$. Si (x^i) son coordenadas sobre $U \subset M$, se define

$$\eta_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \eta \in \Omega^{m-1}(U).$$

- ▶ Tenemos las coordenadas inducidas
 - ▶ $\pi : (x^i, u^A) \mapsto (x^i)$ sobre E .
 - ▶ En $\mathcal{M}\pi$, $\rho = (x^i, u^A, p, p_A^i)$ sii $\rho = p\eta + p_A^i du^A \wedge \eta_i$.
 - ▶ $(x^i, u^A, p, p_A^i, \bar{u}_i^A, \bar{p}_i, \bar{p}_{Aj}^i)$ on $J^1(\pi \circ v)$.

Preliminares

- ▶ ¡Suma sobre índices repetidos!
- ▶ Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M^m$, tenemos la siguiente construcción



- ▶ Fijar forma de volumen $\eta \in \Omega^m(M)$. Si (x^i) son coordenadas sobre $U \subset M$, se define

$$\eta_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \eta \in \Omega^{m-1}(U).$$

- ▶ Tenemos las coordenadas inducidas
 - ▶ $\pi : (x^i, u^A) \mapsto (x^i)$ sobre E .
 - ▶ En $\mathcal{M}\pi$, $\rho = (x^i, u^A, p, p_A^i)$ sii $\rho = p\eta + p_A^i du^A \wedge \eta_i$.
 - ▶ $(x^i, u^A, p, p_A^i; \bar{u}_i^A, \bar{p}_i, \bar{p}_{Aj}^i)$ on $J^1(\pi \circ v)$.

Teoría de campos Hamiltoniana extendida¹

- ▶ Datos básicos: Fibrado E , densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathcal{M}\pi \rightarrow \wedge^m M$.
- ▶ m -form de Cartan: $\lambda_{\mathcal{H}} := \lambda_{\mathcal{M}\pi} - \mathcal{H} \in \Omega^m(\mathcal{M}\pi)$.

Ecuaciones (extendidas) de De Donder-Hamilton

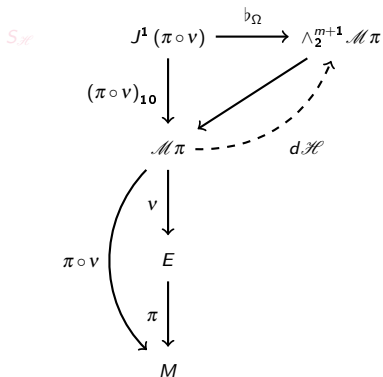
$\bar{\sigma} : M \rightarrow \mathcal{M}\pi$ es una solución de las ecs de Hamilton sii

$$\bar{\sigma}^*(Z \lrcorner d\lambda_{\mathcal{H}}) = 0$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}^{V(\pi \circ \nu)}(\mathcal{M}\pi)$.

¹Campos 2010.

Lado Hamiltoniano del triple de Tulczyjew



Definimos

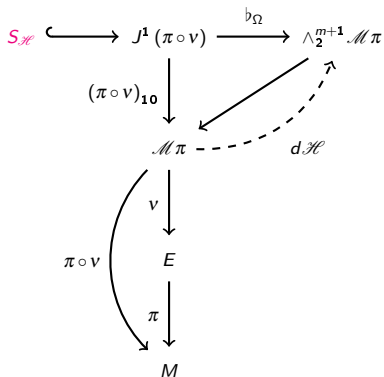
$$S_{\mathcal{H}} := b_{\Omega}^{-1}(d\mathcal{H}(\mathcal{M}\pi)).$$

Teorema (Campos, Guzmán y Marrero 2012)

$\bar{\sigma} : M \rightarrow \mathcal{M}\pi$ solución de las ecs de Hamilton para \mathcal{H} sii

$$j^1 \bar{\sigma}(M) \subset S_{\mathcal{H}}.$$

Lado Hamiltoniano del triple de Tulczyjew



Definimos

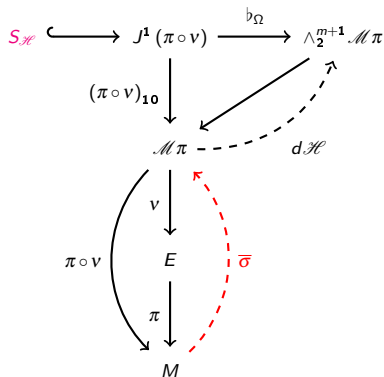
$$S_{\mathcal{H}} := b_{\Omega}^{-1}(d\mathcal{H}(M\pi)).$$

Teorema (Campos, Guzmán y Marrero 2012)

$\bar{\sigma} : M \rightarrow M\pi$ solución de las ecs de Hamilton para \mathcal{H} sii

$$j^1\bar{\sigma}(M) \subset S_{\mathcal{H}}.$$

Lado Hamiltoniano del triple de Tulczyjew



Definimos

$$S_{\mathcal{H}} := b_{\Omega}^{-1}(d\mathcal{H}(M\pi)).$$

Teorema (Campos, Guzmán
 y Marrero 2012)

$\bar{\sigma} : M \rightarrow M\pi$ solución de las ecs
 de Hamilton para \mathcal{H} sii

$$j^1\bar{\sigma}(M) \subset S_{\mathcal{H}}.$$

Donde andamos...

Mecánica y teoría de campos

Versión Hamiltoniana de teorías de campo de primer orden
Breve intro a triples de Tulczyjew en teorías de campo

Sistemas diferenciales exteriores y ecuaciones de movimiento

EDS, Grassmanianos y jets
EDS y ecuaciones de movimiento

Problemas inversos en teorías de campo

Subvariedades Lagrangianas y elementos integrales
Hamiltonización

Definiciones básicas I

- ▶ Un *sistema diferencial exterior (EDS)* es un ideal en $\Omega^\bullet(P)$ cerrado por diferenciación exterior.
- ▶ **Elemento integral de dimensión n para \mathcal{I} :** Es un subespacio $E \subset T_x P$ de dimensión n tal que

$$\alpha_x|_E = 0$$

para cada $\alpha \in \mathcal{I} \cap \Omega^n(P)$.

- ▶ $V_n(\mathcal{I}) =$ conjunto de elementos n -integrales de \mathcal{I} .

Definición

Sea P una N -variedad, $0 < k \leq N$. El *fibrado de Grassmann $G_k(TP)$ de dimensión k* es el conjunto de k -subespacios de $T_x P$ para cada $x \in P$. La proyección canónica $\pi_k : G_k(TP) \rightarrow P$ es

$$E \in T_x P \mapsto x.$$

Ecuaciones Hamiltonianas como EDS

Observación

- ▶ Si η es una k -forma, indicamos con $G_k(TP, \eta)$ el conjunto de k -planos $E \in G_k(TP)$ tales que $\eta|_E \neq 0$.
- ▶ Sea $p: P \rightarrow M^m$ un fibrado, η una forma de volumen en M . Entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^* \eta).$$

- ▶ Definamos

$$E_{\mathcal{H}} := \left\{ Z \lrcorner d\lambda_{\mathcal{H}} : Z \in \mathfrak{X}^{V(\pi_{\text{ov}})}(\mathcal{M}\pi) \right\}.$$

- ▶ Sea $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ el EDS generado por dichas formas; localmente

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}} = \left\langle dp_A^i \wedge \eta_i + \frac{\partial H}{\partial u^A} \eta, du^A \wedge \eta_i - \frac{\partial H}{\partial p_A^i} \eta \right\rangle, \quad \mathcal{H} = H\eta.$$

Teorema

$\bar{\sigma}: M \rightarrow \mathcal{M}\pi$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton sii es una sección integral de $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$.

Donde andamos...

Mecánica y teoría de campos

Versión Hamiltoniana de teorías de campo de primer orden
Breve intro a triples de Tulczyjew en teorías de campo

Sistemas diferenciales exteriores y ecuaciones de movimiento

EDS, Grassmanianos y jets
EDS y ecuaciones de movimiento

Problemas inversos en teorías de campo

Subvariedades Lagrangianas y elementos integrales
Hamiltonización

Lado Hamiltoniano y elementos integrales

Recordar que...

Si $p: P \rightarrow M^m$ es un fibrado y η una forma de volumen sobre M , entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^* \eta).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & J^1(\pi \circ \nu) & \simeq & G_m(T\mathcal{M}\pi, \eta) \\
 & & \downarrow (\pi \circ \nu)_{10} & \nearrow & \uparrow \\
 & & \mathcal{M}\pi & \longleftarrow & V_m(\mathcal{E}\mathcal{H})
 \end{array}$$

Teorema

El conjunto

$$S_{\mathcal{H}} = \flat_{\Omega}^{-1}(-d\mathcal{H})$$

coincide con $V_m(\mathcal{E}\mathcal{H})$.

Lado Hamiltoniano y elementos integrales

Recordar que...

Si $p: P \rightarrow M^m$ es un fibrado y η una forma de volumen sobre M , entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^* \eta).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & J^1(\pi \circ \nu) & \simeq & G_m(T\mathcal{M}\pi, \eta) \\
 & & \downarrow (\pi \circ \nu)_{10} & \swarrow \text{dotted} & \uparrow \\
 & & \mathcal{M}\pi & \longleftarrow & V_m(\mathcal{E}\mathcal{H})
 \end{array}$$

Teorema

El conjunto

$$S_{\mathcal{H}} = b_{\Omega}^{-1}(-d\mathcal{H})$$

coincide con $V_m(\mathcal{E}\mathcal{H})$.

Lado Hamiltoniano y elementos integrales

Recordar que...

Si $p: P \rightarrow M^m$ es un fibrado y η una forma de volumen sobre M , entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^* \eta).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & J^1(\pi \circ \nu) & \simeq & G_m(T\mathcal{M}\pi, \eta) \\
 & & \downarrow (\pi \circ \nu)_{10} & \swarrow \text{dotted} & \uparrow \\
 & & \mathcal{M}\pi & \longleftarrow & V_m(\mathcal{E}\mathcal{H})
 \end{array}$$

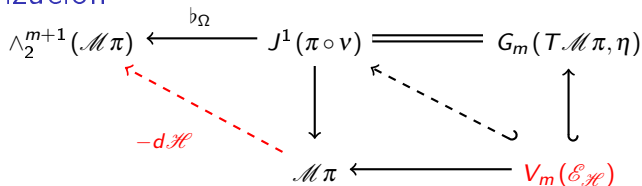
Teorema

El conjunto

$$S_{\mathcal{H}} = \mathfrak{b}_{\Omega}^{-1}(-d\mathcal{H})$$

coincide con $V_m(\mathcal{E}\mathcal{H})$.

Hamiltonización



Caso $m = 1$:

- ▶ Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- ▶ $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- ▶ Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs²

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

²E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda_2^{m+1}(\mathcal{M}\pi) & \xleftarrow{b_\Omega} & J^1(\pi \circ \nu) & \xlongequal{\quad} & G_m(T\mathcal{M}\pi, \eta) \\
 & \swarrow \Sigma & \downarrow & \swarrow & \uparrow \\
 & & \mathcal{M}\pi & \xleftarrow{\quad} & V_m(\mathcal{K})
 \end{array}$$

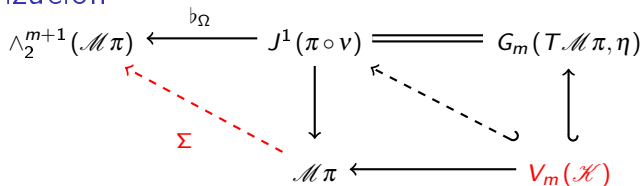
Caso $m = 1$:

- ▶ Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- ▶ $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- ▶ Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs²

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

²E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización



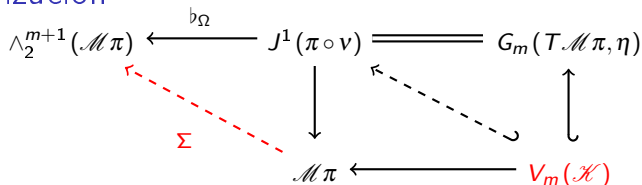
Caso $m = 1$:

- ▶ Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- ▶ Entonces $\mathcal{H} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- ▶ $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- ▶ Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs²

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

²E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización



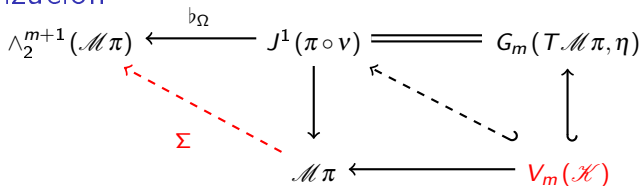
Caso $m = 1$:

- ▶ Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- ▶ Entonces $\mathcal{H} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- ▶ $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- ▶ Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs²

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

²E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización



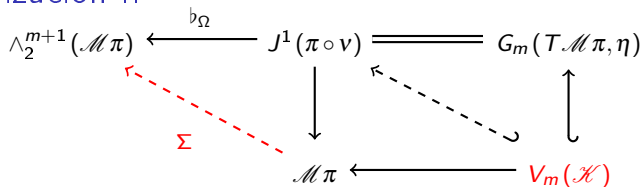
Caso $m = 1$:

- ▶ Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- ▶ Entonces $\mathcal{H} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- ▶ $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- ▶ Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs²

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

²E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización II



Para PDEs:

- ▶ ¿Qué es \mathcal{H} ? Usamos una aplicación $G : \mathcal{M}\pi \rightarrow J^1\pi$ para definir un EDS \mathcal{I} mediante

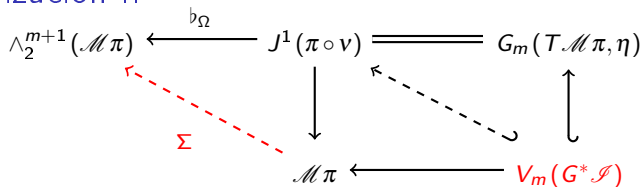
$$\mathcal{H} = G^* \mathcal{I}.$$

- ▶ Luego $\mathcal{I} \subset \Omega^*(J^1\pi)$ es *Hamiltonizable* sii
 - ▶ Para cada $\rho \in \mathcal{M}\pi$,

Fibra de $(\pi \circ \nu)_{10}$ sobre ρ intersecada por $V_m(G^* \mathcal{I}) \subset$ una fibra de b_Ω .

- ▶ Σ es cerrada.

Hamiltonización II



Para PDEs:

- ▶ ¿Qué es \mathcal{H} ? Usamos una aplicación $G : \mathcal{M}\pi \rightarrow J^1\pi$ para definir un EDS \mathcal{I} mediante

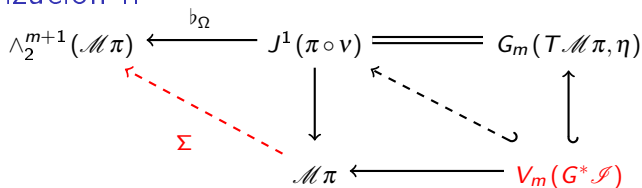
$$\mathcal{H} = G^* \mathcal{I}.$$

- ▶ Luego $\mathcal{I} \subset \Omega^*(J^1\pi)$ es *Hamiltonizable* sii
 - ▶ Para cada $\rho \in \mathcal{M}\pi$,

Fibra de $(\pi \circ \nu)_{10}$ sobre ρ intersecada por $V_m(G^*\mathcal{I}) \subset$ una fibra de b_Ω .

- ▶ Σ es cerrada.

Hamiltonización II



Para PDEs:

- ▶ ¿Qué es \mathcal{H} ? Usamos una aplicación $G : \mathcal{M}\pi \rightarrow J^1\pi$ para definir un EDS \mathcal{I} mediante

$$\mathcal{H} = G^* \mathcal{I}.$$

- ▶ Luego $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(J^1\pi)$ es *Hamiltonizable* sii
 - ▶ Para cada $\rho \in \mathcal{M}\pi$,

Fibra de $(\pi \circ \nu)_{10}$ sobre ρ intersecada por $V_m(G^*\mathcal{I}) \subset$ una fibra de b_Ω .

- ▶ Σ es cerrada.

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij} u_{ij} - B = 0$

- ▶ Supongamos A^{ij} invertible.
- ▶ $\mathcal{I} := \langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B \eta \rangle \subset \Omega^*(J^1\pi)$.
- ▶ $G : (x^i, u, p, p^i) \mapsto (x^i, u, H_i) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i .
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p^j} dp^j \wedge \eta_k + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \left(B - A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u} \right) \eta + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- ▶ Las condiciones para la Hamiltonización de \mathcal{I} resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj} \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta_k^i, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij} u_{ij} - B = 0$

- ▶ Supongamos A^{ij} invertible.
- ▶ $\mathcal{I} := \langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B \eta \rangle \subset \Omega^\bullet(J^1\pi)$.
- ▶ $G : (x^i, u, p, p^i) \mapsto (x^i, u, H_i) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i .
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p^j} dp^j \wedge \eta_k + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \left(B - A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u} \right) \eta + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- ▶ Las condiciones para la Hamiltonización de \mathcal{I} resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj} \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta_k^i, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij} u_{ij} - B = 0$

- ▶ Supongamos A^{ij} invertible.
- ▶ $\mathcal{I} := \langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B \eta \rangle \subset \Omega^\bullet(J^1\pi)$.
- ▶ $G : (x^i, u, p, p^i) \mapsto (x^i, u, H_i) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i .
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p^j} dp^j \wedge \eta_k + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \left(B - A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u} \right) \eta + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- ▶ Las condiciones para la Hamiltonización de \mathcal{I} resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj} \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta_k^i, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij} u_{ij} - B = 0$

- ▶ Supongamos A^{ij} invertible.
- ▶ $\mathcal{I} := \langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B \eta \rangle \subset \Omega^\bullet(J^1\pi)$.
- ▶ $G : (x^i, u, p, p^i) \mapsto (x^i, u, H_i) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i .
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p^j} dp^j \wedge \eta_k + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \left(B - A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u} \right) \eta + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- ▶ Las condiciones para la Hamiltonización de \mathcal{I} resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj} \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta_k^i, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij} u_{ij} - B = 0$

- ▶ Supongamos A^{ij} invertible.
- ▶ $\mathcal{I} := \langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B \eta \rangle \subset \Omega^\bullet(J^1\pi)$.
- ▶ $G : (x^i, u, p, p^i) \mapsto (x^i, u, H_i) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i .
- ▶ Entonces $\mathcal{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p^j} dp^j \wedge \eta_k + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \left(B - A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u} \right) \eta + A^{ik} \frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$




- ▶ Las condiciones para la Hamiltonización de \mathcal{I} resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj} \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta_k^i, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Bibliography I

-  Campos, C. M., E. Guzmán y J. C. Marrero (2012). “Classical field theories of first order and Lagrangian submanifolds of premultisymplectic manifolds.” English. En: *J. Geom. Mech.* 4.1, págs. 1-26. DOI: 10.3934/jgm.2012.4.1.
-  Campos, Cédric M. (2010). “Geometric Methods in Classical Field Theory and Continuous Media”. Tesis doct. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid.
-  E. T. Whittaker, Sir William McCrae (1904/1989). *Treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies*. 4.^a ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press.