Hamiltonización en teorías de campo y triples de Tulczyjew

S. Capriotti[1]

[1]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina y CONICET

Trabajo conjunto con Juan Carlos Marrero (ULL)

XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, 2017

La comunicación

Mecánica y teoría de campos

- Versión Hamiltoniana de teorías de campo de primer orden
- Breve intro a triples de Tulczyjew en teorías de campo

Sistemas diferenciales exteriores y ecuaciones de movimiento

- EDS, Grassmanianos y jets
- EDS y ecuaciones de movimiento

Problemas inversos en teorías de campo

- Subvariedades Lagrangianas y elementos integrales
- Hamiltonización

Donde andamos...

Mecánica y teoría de campos
- Versión Hamiltoniana de teorías de campo de primer orden
- Breve intro a triples de Tulczyjew en teorías de campo

Sistemas diferenciales exteriores y ecuaciones de movimiento
- EDS, Grassmanianos y jets
- EDS y ecuaciones de movimiento

Problemas inversos en teorías de campo
- Subvariedades Lagrangianas y elementos integrales
- Hamiltonización

Preliminares

- ¡Suma sobre índices repetidos!
- Dado un fibrado $\pi : E \to M^m$, tenemos la siguiente construcción

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{M}\pi := \wedge^m_2 E \arrow[ll, "\nu"'] \arrow[dl, "\pi\circ\nu"] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] \arrow[dll, bend left, "(\pi\circ\nu)_1"] \\
& M & &
\end{tikzcd}
$$

- Fijar forma de volumen $\eta \in \Omega^m(M)$. Si (x^i) son coordenadas sobre $U \subset M$, se define

$$\eta_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \eta \in \Omega^{m-1}(U).$$

- Tenemos las coordenadas inducidas
  - $\pi : (x^i, u^A) \mapsto (x^i)$ sobre E.
  - En $\mathscr{M}\pi$, $\rho = (x^i, u^A, p, p^i_A)$ sii $\rho = p\eta + p^i_A du^A \wedge \eta_i$.
  - $\left(x^i, u^A, p, p^i_A; \overline{u}^A_i, \overline{p}_i, \overline{p}^i_{Aj}\right)$ on $J^1(\pi\circ\nu)$.

Preliminares

- ¡Suma sobre índices repetidos!
- Dado un fibrado $\pi : E \to M^m$, tenemos la siguiente construcción

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{M}\pi := \wedge^m_2 E \arrow[ll, "\nu"'] \arrow[dl, "\pi\circ\nu"'] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] \arrow[dll, bend left, "(\pi\circ\nu)_1"] \\ & M & & \end{tikzcd}$$

- Fijar forma de volumen $\eta \in \Omega^m(M)$. Si $\left(x^i\right)$ son coordenadas sobre $U \subset M$, se define
$$\eta_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \eta \in \Omega^{m-1}(U).$$
- Tenemos las coordenadas inducidas
  - $\pi : \left(x^i, u^A\right) \mapsto \left(x^i\right)$ sobre E.
  - En $\mathscr{M}\pi$, $\rho = \left(x^i, u^A, p, p^i_A\right)$ sii $\rho = p\eta + p^i_A du^A \wedge \eta_i$.
  - $\left(x^i, u^A, p, p^i_A; \overline{u}^A_i, \overline{p}_i, \overline{p}^i_{Aj}\right)$ on $J^1(\pi\circ\nu)$.

Preliminares

- ¡Suma sobre índices repetidos!
- Dado un fibrado $\pi : E \to M^m$, tenemos la siguiente construcción

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{M}\pi := \wedge^m_2 E \arrow[ll, "\nu"'] \arrow[dl, "\pi\circ\nu"'] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] \arrow[dll, bend left, "(\pi\circ\nu)_1"] \\
& M & &
\end{tikzcd}
$$

- Fijar forma de volumen $\eta \in \Omega^m(M)$. Si $\left(x^i\right)$ son coordenadas sobre $U \subset M$, se define

$$\eta_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \eta \in \Omega^{m-1}(U).$$

- Tenemos las coordenadas inducidas
  - $\pi : \left(x^i, u^A\right) \mapsto \left(x^i\right)$ sobre E.
  - En $\mathscr{M}\pi$, $\rho = \left(x^i, u^A, p, p^i_A\right)$ sii $\rho = p\eta + p^i_A du^A \wedge \eta_i$.
  - $\left(x^i, u^A, p, p^i_A; \overline{u}^A_i, \overline{p}_i, \overline{p}^i_{Aj}\right)$ on $J^1(\pi\circ\nu)$.

Teoría de campos Hamiltoniana extendida[1]

- Datos básicos: Fibrado E, densidad Hamiltoniana $\mathscr{H} : \mathscr{M}\pi \to \wedge^m M$.
- m-form de Cartan: $\lambda_{\mathscr{H}} := \lambda_{\mathscr{M}\pi} - \mathscr{H} \in \Omega^m(\mathscr{M}\pi)$.

Ecuaciones (extendidas) de De Donder-Hamilton

$\overline{\sigma} : M \to \mathscr{M}\pi$ es una solución de las ecs de Hamilton sii

$$\overline{\sigma}^*(Z \lrcorner d\lambda_{\mathscr{H}}) = 0$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}^{V(\pi\circ\nu)}(\mathscr{M}\pi)$.

[1] Campos 2010.

Lado Hamiltoniano del triple de Tulczyjew

$S_{\mathscr{H}}$

$$
\begin{tikzcd}
J^1(\pi\circ\nu) \arrow[r, "\flat_\Omega"] \arrow[d, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] & \wedge_2^{m+1}\mathscr{M}\pi \arrow[dl] \\
\mathscr{M}\pi \arrow[ur, dashed, bend right, "d\mathscr{H}"'] \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dd, bend right=60, "\pi\circ\nu"'] & \\
E \arrow[d, "\pi"'] & \\
M &
\end{tikzcd}
$$

Definimos

$$S_{\mathscr{H}} := \flat_\Omega^{-1}\left(d\mathscr{H}\left(\mathscr{M}\pi\right)\right).$$

Teorema (Campos, Guzmán y Marrero 2012)

$\overline{\sigma} : M \to \mathscr{M}\pi$ solución de las ecs de Hamilton para $\mathscr{H}$ sii

$$j^1\overline{\sigma}(M) \subset S_{\mathscr{H}}.$$

Lado Hamiltoniano del triple de Tulczyjew

$$
\begin{tikzcd}
S_{\mathscr{H}} \arrow[r, hook] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[r, "\flat_\Omega"] \arrow[d, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] & \wedge_2^{m+1}\mathscr{M}\pi \arrow[dl] \\
& \mathscr{M}\pi \arrow[ur, dashed, bend right, "d\mathscr{H}"'] \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dd, bend right=60, "\pi\circ\nu"'] & \\
& E \arrow[d, "\pi"'] & \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

Definimos

$$S_{\mathscr{H}} := \flat_\Omega^{-1}\left(d\mathscr{H}\left(\mathscr{M}\pi\right)\right).$$

Teorema (Campos, Guzmán y Marrero 2012)

$\overline{\sigma} : M \to \mathscr{M}\pi$ solución de las ecs de Hamilton para $\mathscr{H}$ sii

$$j^1\overline{\sigma}(M) \subset S_{\mathscr{H}}.$$

Lado Hamiltoniano del triple de Tulczyjew

$$
\begin{tikzcd}
S_{\mathscr{H}} \arrow[r, hook] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[r, "\flat_\Omega"] \arrow[d, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] & \wedge_2^{m+1}\mathscr{M}\pi \arrow[dl] \\
 & \mathscr{M}\pi \arrow[d, "\nu"] \arrow[ur, dashed, bend right, "d\mathscr{H}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\pi\circ\nu"'] & \\
 & E \arrow[d, "\pi"] & \\
 & M \arrow[uu, dashed, bend right=60, "\overline{\sigma}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Definimos

$$S_{\mathscr{H}} := \flat_\Omega^{-1}\left(d\mathscr{H}(\mathscr{M}\pi)\right).$$

Teorema (Campos, Guzmán y Marrero 2012)

$\overline{\sigma} : M \to \mathscr{M}\pi$ solución de las ecs de Hamilton para $\mathscr{H}$ sii

$$j^1\overline{\sigma}(M) \subset S_{\mathscr{H}}.$$

Donde andamos...

Definiciones básicas I

- Un *sistema diferencial exterior (EDS)* es un ideal en $\Omega^{\bullet}(P)$ cerrado por diferncciación exterior.
- **Elemento integral de dimensión n para $\mathscr{I}$:** Es un subespacio $E \subset T_x P$ de dimensión n tal que
$$\alpha_x|_E = 0$$
para cada $\alpha \in \mathscr{I} \cap \Omega^n(P)$.
- $V_n(\mathscr{I}) =$ conjunto de elementos n-integrales de $\mathscr{I}$.

Definición

Sea P una N-variedad, $0 < k \leq N$. El *fibrado de Grassmann $G_k(TP)$ de dimensión k* es el conjunto de k-subespacios de $T_x P$ para cada $x \in P$. La proyección canónica $\pi_k : G_k(TP) \to P$ es
$$E \in T_x P \mapsto x.$$

Ecuaciones Hamiltonianas como EDS

Observación

- Si η es una k-forma, indicamos con $G_k(TP,\eta)$ el conjunto de k-planos $E \in G_k(TP)$ tales que $\eta|_E \neq 0$.
- Sea $p : P \to M^m$ un fibrado, η una forma de volumen en M. Entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^*\eta).$$

- Definamos

$$E_{\mathscr{H}} := \left\{ Z \lrcorner d\lambda_{\mathscr{H}} : Z \in \mathfrak{X}^{V(\pi\circ\nu)}(\mathscr{M}\pi) \right\}.$$

- Sea $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$ el EDS generado por dichas formas; localmente

$$\mathscr{E}_{\mathscr{H}} = \left\langle dp_A^i \wedge \eta_i + \frac{\partial H}{\partial u^A}\eta, du^A \wedge \eta_i - \frac{\partial H}{\partial p_A^i}\eta \right\rangle, \qquad \mathscr{H} = H\eta.$$

Teorema

$\overline{\sigma} : M \to \mathscr{M}\pi$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton sii es una sección integral de $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$.

Donde andamos...

Lado Hamiltoniano y elementos integrales

Recordar que...

Si $p : P \to M^m$ es un fibrado y η una forma de volumen sobre M, entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^*\eta).$$

$$\begin{tikzcd}
S_{\mathscr{H}} \arrow[r, hook] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
& \mathscr{M}\pi & V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}}) \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, hook, dotted]
\end{tikzcd}$$

Teorema

El conjunto

$$S_{\mathscr{H}} = \flat_{\Omega}^{-1}(-d\mathscr{H})$$

coincide con $V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}})$.

Lado Hamiltoniano y elementos integrales

Recordar que...

Si $p : P \to M^m$ es un fibrado y η una forma de volumen sobre M, entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^*\eta).$$

$$\begin{tikzcd}
S_{\mathscr{H}} \arrow[r, hook] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] & G_m(T\mathscr{M}\pi, \eta) \\
 & \mathscr{M}\pi & V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}}) \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, hook, dotted]
\end{tikzcd}$$

Teorema

El conjunto

$$S_{\mathscr{H}} = \flat_{\Omega}^{-1}(-d\mathscr{H})$$

coincide con $V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}})$.

Lado Hamiltoniano y elementos integrales

Recordar que...

Si $p : P \to M^m$ es un fibrado y η una forma de volumen sobre M, entonces

$$J^1 p \simeq G_m(TP, p^*\eta).$$

$$\begin{tikzcd}
S_{\mathscr{H}} \arrow[r, hook] & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\pi\circ\nu)_{10}"'] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
& \mathscr{M}\pi & V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}}) \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, hook, dotted]
\end{tikzcd}$$

Teorema

El conjunto

$$S_{\mathscr{H}} = \flat_{\Omega}^{-1}(-d\mathscr{H})$$

coincide con $V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}})$.

Hamiltonización

$$\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
& \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, red, "-d\mathscr{H}"] & \color{red}{V_m(\mathscr{E}_{\mathscr{H}})} \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, dashed, hook]
\end{tikzcd}$$

Caso $m=1$:

- Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs[2]

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

[2] E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización

$$\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathcal{M}\pi) & & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[ll, "\flat_\Omega"'] \arrow[d] \arrow[r, equal] & G_m(T\mathcal{M}\pi,\eta) \\
 & & \mathcal{M}\pi \arrow[ull, dashed, "\Sigma"] & V_m(\mathcal{K}) \arrow[l] \arrow[ul, hook, dashed] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Caso $m = 1$:

- Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- Entonces $\mathcal{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- $\Sigma : (t, s, q^i, p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs[2]

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

[2] E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización

$$\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[d] \arrow[r, equal] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
& \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, "\Sigma"] & V_m(\mathscr{K}) \arrow[l] \arrow[ul, hook, dashed] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Caso $m=1$:

- Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- $\Sigma : (t,s,q^i,p_i) \mapsto (G_i dq^i - F^i dp_i - ds) \wedge dt$.
- Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs[2]

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

[2] E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización

$$
\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
 & \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, "\Sigma"] & V_m(\mathscr{K}) \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, dashed, hook]
\end{tikzcd}
$$

Caso $m=1$:

- Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- $\Sigma : \left(t, s, q^i, p_i\right) \mapsto \left(G_i dq^i - F^i dp_i - ds\right) \wedge dt$.
- Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs[2]

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

[2] E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización

$$\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
& \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, "\Sigma"] & V_m(\mathscr{K}) \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, dashed, hook]
\end{tikzcd}$$

Caso $m=1$:

- Sistema $\dot{q}^i = F^i, \dot{p}_i = G_i$.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle dq^i - F^i dt, dp_i - G_i dt \rangle$.
- $\Sigma : \left(t, s, q^i, p_i\right) \mapsto \left(G_i dq^i - F^i dp_i - ds\right) \wedge dt$.
- Σ cerrada equivale al Teor de Lie-Koenigs[2]

$$\frac{\partial G_i}{\partial q^k} - \frac{\partial G_k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F^k}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial p_k} - \frac{\partial F^k}{\partial p_i} = 0.$$

[2] E. T. Whittaker 1904/1989.

Hamiltonización II

$$\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
 & \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, "\Sigma"] & V_m(\mathscr{K}) \arrow[l] \arrow[ul, hook, dashed] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Para PDEs:

- ¿Qué es $\mathscr{K}$? Usamos una aplicación $G:\mathscr{M}\pi\to J^1\pi$ para definir un EDS $\mathscr{I}$ mediante
$$\mathscr{K}=G^*\mathscr{I}.$$
- Luego $\mathscr{I}\subset\Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$ es *Hamiltonizable* sii
  - Para cada $\rho\in\mathscr{M}\pi$,

    Fibra de $(\pi\circ\nu)_{10}$ sobre ρ intersecada por $V_m(G^*\mathscr{I})\subset$ una fibra de $\flat_\Omega$.
  - Σ es cerrada.

Hamiltonización II

$$\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[d] \arrow[r, equal] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
 & \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, "\Sigma"] & V_m(G^*\mathscr{I}) \arrow[l] \arrow[ul, dashed, hook] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Para PDEs:

- ¿Qué es $\mathscr{K}$? Usamos una aplicación $G:\mathscr{M}\pi\to J^1\pi$ para definir un EDS $\mathscr{I}$ mediante
$$\mathscr{K}=G^*\mathscr{I}.$$
- Luego $\mathscr{I}\subset\Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$ es *Hamiltonizable* sii
  - Para cada $\rho\in\mathscr{M}\pi$,

    Fibra de $(\pi\circ\nu)_{10}$ sobre ρ intersecada por $V_m(G^*\mathscr{I})\subset$ una fibra de $\flat_\Omega$.
  - Σ es cerrada.

Hamiltonización II

$$
\begin{tikzcd}
\wedge_2^{m+1}(\mathscr{M}\pi) & J^1(\pi\circ\nu) \arrow[l, "\flat_\Omega"'] \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_m(T\mathscr{M}\pi,\eta) \\
& \mathscr{M}\pi \arrow[ul, dashed, "\Sigma"] & V_m(G^*\mathscr{I}) \arrow[l] \arrow[u, hook] \arrow[ul, dashed, hook]
\end{tikzcd}
$$

Para PDEs:

- ¿Qué es $\mathscr{K}$? Usamos una aplicación $G:\mathscr{M}\pi\to J^1\pi$ para definir un EDS $\mathscr{I}$ mediante
$$\mathscr{K}=G^*\mathscr{I}.$$
- Luego $\mathscr{I}\subset\Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$ es *Hamiltonizable* sii
  - Para cada $\rho\in\mathscr{M}\pi$,

    Fibra de $(\pi\circ\nu)_{10}$ sobre ρ intersecada por $V_m(G^*\mathscr{I})\subset$ una fibra de $\flat_\Omega$.
  - Σ es cerrada.

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij}u_{ij} - B = 0$

- Supongamos A^{ij} invertible.
- $\mathscr{I} := \left\langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B\eta \right\rangle \subset \Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$.
- $G : \left(x^i, u, p, p^i\right) \mapsto \left(x^i, u, H_i\right) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p^l} dp^l \wedge \eta_k + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \\ - \left(B - A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u}\right)\eta + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- Las condiciones para la Hamiltonización de $\mathscr{I}$ resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj}\frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta^i_k, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij}u_{ij} - B = 0$

- Supongamos A^{ij} invertible.
- $\mathscr{I} := \left\langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B\eta \right\rangle \subset \Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$.
- $G : \left(x^i, u, p, p^i\right) \mapsto \left(x^i, u, H_i\right) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi \rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p^l} dp^l \wedge \eta_k + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \\ - \left(B - A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u}\right)\eta + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- Las condiciones para la Hamiltonización de $\mathscr{I}$ resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj}\frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta^i_k, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij}u_{ij} - B = 0$

- Supongamos A^{ij} invertible.
- $\mathscr{I} := \left\langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B\eta \right\rangle \subset \Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$.
- $G : \left(x^i, u, p, p^i\right) \mapsto \left(x^i, u, H_i\right) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi\rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p^l} dp^l \wedge \eta_k + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \\ - \left(B - A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik}H_k\frac{\partial H_i}{\partial u}\right)\eta + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- Las condiciones para la Hamiltonización de $\mathscr{I}$ resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj}\frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij}C_{jk} = \delta^i_k, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij}u_{ij} - B = 0$

- Supongamos A^{ij} invertible.
- $\mathscr{I} := \left\langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B\eta \right\rangle \subset \Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$.
- $G : \left(x^i, u, p, p^i\right) \mapsto \left(x^i, u, H_i\right) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi\rangle$ con

$$\begin{aligned} G^*\Psi = {} & A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p^l} dp^l \wedge \eta_k + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \\ & - \left(B - A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u}\right)\eta + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k. \end{aligned}$$

- Las condiciones para la Hamiltonización de $\mathscr{I}$ resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \qquad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \qquad C_{lj}\frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta^i_k, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejemplo: Hamiltonización de $A^{ij}u_{ij} - B = 0$

- Supongamos A^{ij} invertible.
- $\mathscr{I} := \left\langle \theta := du - u_k dx^k, \Psi := A^{ij} du_i \wedge \eta_j - B\eta \right\rangle \subset \Omega^\bullet\left(J^1\pi\right)$.
- $G : \left(x^i, u, p, p^i\right) \mapsto \left(x^i, u, H_i\right) \in J^1\pi$ para ciertas funciones H_i.
- Entonces $\mathscr{K} = \langle G^*\theta, G^*\Psi\rangle$ con

$$G^*\Psi = A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p^l} dp^l \wedge \eta_k + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial p} dp \wedge \eta_k - \\ - \left(B - A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} - A^{ik} H_k \frac{\partial H_i}{\partial u}\right)\eta + A^{ik}\frac{\partial H_i}{\partial u} G^*\theta \wedge \eta_k.$$

- Las condiciones para la Hamiltonización de $\mathscr{I}$ resultan

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial A^{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial A^{jk}}{\partial u_i} = 0, \quad C_{lj}\frac{\partial A^{ik}}{\partial u_l} D_k H_i + A^{ik} D_k C_{ij} + \frac{\partial B}{\partial p^j} = 0$$

donde

$$A^{ij} C_{jk} = \delta^i_k, \quad D_k := \frac{\partial}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial}{\partial u}.$$

Bibliography I

Campos, C. M., E. Guzmán y J. C. Marrero (2012). "Classical field theories of first order and Lagrangian submanifolds of premultisymplectic manifolds." English. En: *J. Geom. Mech.* 4.1, págs. 1-26. DOI: 10.3934/jgm.2012.4.1.

Campos, Cédric M. (2010). "Geometric Methods in Classical Field Theory and Continuous Media". Tesis doct. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid.

E. T. Whittaker, Sir William McCrae (1904/1989). *Treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies*. 4.ª ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press.