El teorema de foliación simpléctica y la Grassmanniana restringida

Claudia Damaris Alvarado

Dpto. de Matemática, FCE - UNLP

Introducción

1. Teorema de foliación simpléctica: Caso finito.
2. Teorema de foliación simpléctica: Caso infinito.
3. La Grassmanniana restringida.

Variedades de Poisson

Definición (Variedad de Poisson)

*Una **variedad de Poisson** es un par $(M, \{\cdot,\cdot\})$ donde M es una variedad y $\{\cdot,\cdot\}$ es una operación bilineal en $\mathcal{C}^\infty(M)$ tal que:*

- *$(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ es un álgebra de Lie;*
- *$\{\cdot,\cdot\}$ es una derivación en cada factor, es decir,*

$$\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\},$$

para toda $f,g,h \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Observación: si $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\exists! X_h$ en M tal que

$$\{g,h\} = X_h[g] = -X_g[h] = \mathbf{d}g(X_h) = -\mathbf{d}h(X_g),$$

para todo $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Llamamos X_h el **campo vectorial Hamiltoniano** de h.

Variedades de Poisson

Definición (Variedad de Poisson)

*Una **variedad de Poisson** es un par* $(M, \{\cdot,\cdot\})$ *donde* M *es una variedad y* $\{\cdot,\cdot\}$ *es una operación bilineal en* $\mathcal{C}^\infty(M)$ *tal que:*

- $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ *es un álgebra de Lie;*
- $\{\cdot,\cdot\}$ *es una derivación en cada factor, es decir,*

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\},$$

para toda $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Observación: si $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\exists! X_h$ en M tal que

$$\{g, h\} = X_h[g] = -X_g[h] = \mathbf{d}g(X_h) = -\mathbf{d}h(X_g),$$

para todo $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Llamamos X_h el **campo vectorial Hamiltoniano** de h.
Consideramos el conjunto:

$$S_{z_0}(M) = \{v \in T_{z_0}M : \ \exists f \in \mathcal{C}^\infty(M), \ X_f(z_0) = v\}, \quad z_0 \in M.$$

Es llamada la ***distribución característica*** de la variedad de Poisson M.

Foliación simpléctica

Teorema (Teorema de Foliación Simpléctica)

La distribución característica $S(M)$ *de la variedad de Poisson* $(M, \{\cdot, \cdot\})$ *es completamente integrable, y la estructura de Poisson induce estructuras simplécticas en las hojas de* $S(M)$*.*

Foliación simpléctica

Teorema (Teorema de Foliación Simpléctica)

La distribución característica $S(M)$ *de la variedad de Poisson* $(M, \{\cdot,\cdot\})$ *es completamente integrable, y la estructura de Poisson induce estructuras simplécticas en las hojas de* $S(M)$.

Ejemplo ($\mathfrak{g}$ = álgebra de Lie)

1. $\mathfrak{g}^*$ *es una variedad de Poisson con respecto a cada* ***corchete de Lie-Poisson*** $\{\cdot,\cdot\}_\pm$ *definido por* $\{f,g\}_\pm(x) = \pm\langle x, [\boldsymbol{d}f(x), \boldsymbol{d}g(x)]\rangle$, *para todo* $x \in \mathfrak{g}^*$. *Hojas simplécticas = las órbitas de la representación coadjunta de cualquier grupo de Lie conexo G.*

Foliación simpléctica

Teorema (Teorema de Foliación Simpléctica)

La distribución característica $S(M)$ de la variedad de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ es completamente integrable, y la estructura de Poisson induce estructuras simplécticas en las hojas de $S(M)$.

Ejemplo ($\mathfrak{g}$ = álgebra de Lie)

1. $\mathfrak{g}^*$ *es una variedad de Poisson con respecto a cada* ***corchete de Lie-Poisson*** $\{\cdot,\cdot\}_\pm$ *definido por* $\{f,g\}_\pm(x) = \pm\langle x, [\boldsymbol{d}f(x), \boldsymbol{d}g(x)]\rangle$*, para todo* $x \in \mathfrak{g}^*$.
   Hojas simplécticas = *las órbitas de la representación coadjunta de cualquier grupo de Lie conexo G.*
2. Θ = *2-cociclo simpléctico de* $\mathfrak{g}$. *Sea*
   $\{f,g\}_\Theta(x) = \langle x, [\boldsymbol{d}f(x), \boldsymbol{d}g(x)]\rangle - \Theta(\boldsymbol{d}f(x), \boldsymbol{d}g(x))$, $\forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, *y* $\forall x \in \mathfrak{g}^*$.
   Se denomina la ***estructura de Lie-Poisson modificada*** *de* $\mathfrak{g}^*$ *asociada al 2-cociclo simpléctico* Θ.
   Hojas simplécticas = *las órbitas de la acción afín* $a_\theta : G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ *definida por* $a_\theta(g,\xi) = Ad_g^*\xi + \theta(g)$*, para G grupo de Lie conexo y* θ= *cociclo simpléctico de G.*

Espacios de Banach Lie-Poisson

$\mathfrak{b}$ = espacio de Banach. $\mathfrak{b}^*$ = espacio de Banach dual de $\mathfrak{b}$.

Espacios de Banach Lie-Poisson

$\mathfrak{b}$ = espacio de Banach. $\mathfrak{b}^*$ = espacio de Banach dual de $\mathfrak{b}$.
Vimos: $\mathfrak{g}$ = álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^*$ su dual, admite la estructura de Lie-Poisson.

Definición (EBLP)

$\mathfrak{b}$ *es un* ***espacio de Banach Lie-Poisson*** *si su dual* $\mathfrak{b}^*$ *es un álgebra de Lie-Banach tal que* $ad_x^*\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{**}$, $\forall x \in \mathfrak{b}^*$.

Espacios de Banach Lie-Poisson

$\mathfrak{b}$ = espacio de Banach. $\mathfrak{b}^*$ = espacio de Banach dual de $\mathfrak{b}$.
Vimos: $\mathfrak{g}$ = álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^*$ su dual, admite la estructura de Lie-Poisson.

Definición (EBLP)

$\mathfrak{b}$ *es un **espacio de Banach Lie-Poisson** si su dual* $\mathfrak{b}^*$ *es un álgebra de Lie-Banach tal que* $ad_x^*\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{**}$, $\forall x \in \mathfrak{b}^*$.

El corchete de Poisson de $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ está dado por

$$\{f, g\}(b) = \langle [Df(b), Dg(b)], b \rangle.$$

Si $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$, el campo vectorial Hamiltoniano asociado a h está dado por

$$X_h(b) = -\mathrm{ad}^*_{Dh(b)} b.$$

Espacios de Banach Lie-Poisson

$\mathfrak{b}$ = espacio de Banach. $\mathfrak{b}^*$ = espacio de Banach dual de $\mathfrak{b}$.
Vimos: $\mathfrak{g}$ = álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^*$ su dual, admite la estructura de Lie-Poisson.

Definición (EBLP)

$\mathfrak{b}$ *es un* ***espacio de Banach Lie-Poisson*** *si su dual* $\mathfrak{b}^*$ *es un álgebra de Lie-Banach tal que* $ad_x^*\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{**}$, $\forall x \in \mathfrak{b}^*$.

El corchete de Poisson de $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ está dado por

$$\{f, g\}(b) = \langle [Df(b), Dg(b)], b\rangle.$$

Si $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$, el campo vectorial Hamiltoniano asociado a h está dado por

$$X_h(b) = -\mathrm{ad}^*_{Dh(b)} b.$$

El subespacio vectorial

$$S_\rho := \{\mathrm{ad}^*_\xi \rho : \ \xi \in \mathfrak{b}^*\} \subset \mathfrak{b}$$

es llamado ***subespacio característico*** en ρ.

$$S := \{S_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{b}}$$

la distribución característica de la estructura de Poisson.

Teorema de foliación simpléctica: caso infinito

Estructura de Lie-Poisson: consideramos G grupo de Lie y L_g la traslación a izquierda. Supongamos que

- $\mathfrak{g}$ admite un predual $\mathfrak{g}_*$;
- $\mathrm{Ad}_g^*(\mathfrak{g}_*) \subset \mathfrak{g}_*$, para cualquier g;
- fijando $\rho \in \mathfrak{g}_*$, el grupo $G_\rho := \{g \in G : \ \mathrm{Ad}_g^* \rho = \rho\}$ es un subgrupo de Lie de G.

Teorema de foliación simpléctica: caso infinito

Estructura de Lie-Poisson: consideramos G grupo de Lie y L_g la traslación a izquierda. Supongamos que

- $\mathfrak{g}$ admite un predual $\mathfrak{g}_*$;
- $\mathrm{Ad}_g^*(\mathfrak{g}_*) \subset \mathfrak{g}_*$, para cualquier g;
- fijando $\rho \in \mathfrak{g}_*$, el grupo $G_\rho := \{g \in G : \ \mathrm{Ad}_g^* \rho = \rho\}$ es un subgrupo de Lie de G.

Entonces

- G/G_ρ admite una estructura de variedad suave débilmente simpléctica relativa a la 2-forma

$$(\omega_\rho)_{[g]} \left(T_g\pi(T_e L_g \xi), T_g\pi(T_e L_g \eta)\right) := \langle \rho, [\xi, \eta] \rangle$$

  donde $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $[g] := \pi(g) = gG_\rho$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}_* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la bilineal canónica entre $\mathfrak{g}_*$ y $\mathfrak{g}$;
- Hojas simplécticas del EBLP $\mathfrak{g}_*$: las componenetes conexas de la órbita coadjunta $\mathcal{O} = \{\mathrm{Ad}_g^* \rho : \ g \in G\}$.

El espacio proyectivo infinito dimensional

$\mathcal{H}$ = espacio de Hilbert.
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$ = operadores unitarios. Su álgebra de Lie está dada por
$\mathfrak{u}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) :\ A^* = -A\}$.
$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{g}_* = \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{u}(\mathcal{H})$.

El espacio proyectivo infinito dimensional

$\mathcal{H}$ = espacio de Hilbert.
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$ = operadores unitarios. Su álgebra de Lie está dada por $\mathfrak{u}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) :\ A^* = -A\}$.
$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{g}_* = \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{u}(\mathcal{H})$.
Corchete de Lie-Poisson: sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_*)$, $x \in \mathfrak{g}_*$

$$\{f, g\}(x) = \mathrm{tr}(x[Df(x), Dg(x)]).$$

Espacio Proyectivo: $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$, $p_x = \langle \cdot, x\rangle x$

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \{upu^* :\ u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\} \cong S_{\mathcal{H}}/\mathbb{T}$$

es una hoja simpléctica fuerte en $\mathfrak{g}_*$.
Estructura simpléctica a través de $p_{x_0} \in \mathfrak{g}_*$:

$$(\omega_{p_{x_0}})_{up_{x_0}u^*}([x, up_{x_0}u^*], [y, up_{x_0}u^*]) = i\mathrm{tr}(p_{x_0}[x, y]) = 2\mathrm{Im}\langle xx_0, yx_0\rangle,$$

donde $x, y \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$

La Grassmanniana restringida

$\mathcal{H}$ = espacio de Hilbert separable: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$.
p_+ y p_- las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$.
$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ = operadores de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{H}$.

La Grassmanniana restringida

$\mathcal{H}$ = espacio de Hilbert separable: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$.
p_+ y p_- las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$.
$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ = operadores de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{H}$.

Definición

La ***Grassmanniana restringida****, Gr_{res}, es el conjunto de todos los subespacios cerrados W de $\mathcal{H}$ tales que:*

1. *la proyección ortogonal $p_+ \mid_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_+$ es un operador de Fredholm, y*
2. *la proyección ortogonal $p_- \mid_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_-$ es un operador de Hilbert-Schmidt.*

La Grassmanniana restringida

$\mathcal{H}$ = espacio de Hilbert separable: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$.
p_+ y p_- las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$.
$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ = operadores de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{H}$.

Definición

*La **Grassmanniana restringida**, Gr_{res}, es el conjunto de todos los subespacios cerrados W de $\mathcal{H}$ tales que:*

1. *la proyección ortogonal $p_+ |_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_+$ es un operador de Fredholm, y*
2. *la proyección ortogonal $p_- |_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_-$ es un operador de Hilbert-Schmidt.*

Observación

1. $W \in Gr_{res}$ *si y sólo si* $p_W = \begin{pmatrix} x & a \\ a^* & y \end{pmatrix}$, *donde x es Fredholm y $a, y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*
2. $W \in Gr_{res} \Rightarrow dim W = dim W^{\perp} = \infty$.

El grupo unitario restringido

Definición

$$\mathcal{U}_{res} = \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ [d, U] \text{ es un operador de Hilbert-Schmidt}\},$$

donde $d := i(p_+ - p_-) \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$. *Es decir,*

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{res} \iff u_{12}, u_{21} \text{ son H-S}$$

Componentes conexas de $\mathcal{U}_{res}$:

$$\mathcal{U}_{res}^k = \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ \text{índ}(u_{11}) = k\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Componentes conexas de Gr_{res}:

$$\mathrm{Gr}_{res}^k := \{W \in \mathrm{Gr}_{res} : \ \text{índ}(p_+ |_W) = k\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$\mathcal{U}_{res} \curvearrowright \mathrm{Gr}_{res}$: $U \cdot W = U(W) \iff U \cdot p_W = U p_W U^*$.

La acción es transitiva.

El grupo unitario restringido

Definición

$$\mathcal{U}_{res} = \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ [d, U] \textit{ es un operador de Hilbert-Schmidt}\},$$

donde $d := i(p_+ - p_-) \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$. *Es decir,*

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{res} \iff u_{12}, u_{21} \textit{ son H-S}$$

Componentes conexas de $\mathcal{U}_{res}$:

$$\mathcal{U}^k_{res} = \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ \text{índ}(u_{11}) = k\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Componentes conexas de Gr_{res}:

$$\text{Gr}^k_{res} := \{W \in \text{Gr}_{res} : \ \text{índ}(p_+ |_W) = k\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$\mathcal{U}_{res} \curvearrowright \text{Gr}_{res}$: $U \cdot W = U(W) \iff U \cdot p_W = U p_W U^*$.
La acción es transitiva.
$\text{Gr}_{res} = \mathcal{U}_{res}/(\mathcal{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}_-)) \Rightarrow \text{Gr}_{res}$ es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{res}$.

Gr_{res} espacio homogéneo

Identificamos

$$T_{\mathcal{H}_+}\mathrm{Gr}_{res} \cong \mathfrak{u}_{res}/(\mathfrak{u}(\mathcal{H}_+) \times \mathfrak{u}(\mathcal{H}_-)) \cong \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, H_-)$$

Podemos definir $\omega_{Gr}(X, Y) := 2\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(XY^*))$, donde $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$.
Así definida, $\omega_{Gr}(X, Y)$ es una forma simpléctica fuerte.

Gr_{res} espacio homogéneo

Identificamos

$$T_{\mathcal{H}_+}\mathrm{Gr}_{res} \cong \mathfrak{u}_{res}/(\mathfrak{u}(\mathcal{H}_+) \times \mathfrak{u}(\mathcal{H}_-)) \cong \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, H_-)$$

Podemos definir $\omega_{Gr}(X, Y) := 2\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(XY^*))$, donde $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$.
Así definida, $\omega_{Gr}(X, Y)$ es una forma simpléctica fuerte.

¿Es la Grassmanniana restringida una hoja simpléctica de un EBLP?

Gr_{res} espacio homogéneo

Identificamos

$$T_{\mathcal{H}_+}\mathrm{Gr}_{res} \cong \mathfrak{u}_{res}/(\mathfrak{u}(\mathcal{H}_+) \times \mathfrak{u}(\mathcal{H}_-)) \cong \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, H_-)$$

Podemos definir $\omega_{Gr}(X, Y) := 2\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(XY^*))$, donde $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$.
Así definida, $\omega_{Gr}(X, Y)$ es una forma simpléctica fuerte.

¿Es la Grassmanniana restringida una hoja simpléctica de un EBLP?

Consideramos el grupo de Lie-Hilbert

$$U_2 = \{a \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ a - id \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})\},$$

y su álgebra de Lie

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Tomando $\mathrm{Gr}^0_{res} = \{W \in \mathrm{Gr}_{res} : \ \mathrm{índ}(p_+ |_W) = 0\}$, tenemos que $U_2 \curvearrowright \mathrm{Gr}^0_{res}$. Más aún esta acción es transitiva.

$\tilde{\mathfrak{u}}_2$ EBLP

Definición

$\tilde{\mathfrak{u}}_2 := \mathfrak{u}_2 \oplus \mathbb{R}$ *es el álgebra de Lie dotada con el corchete*

$$[(A,a),(B,b)]_d = ([A,B], s(A,B)).$$

donde, $s(A,B) := tr(A[d,B])$ *para* $A, B \in \mathfrak{u}_2$.

$\tilde{\mathfrak{u}}_2$ es un EBLP, con el corchete de Poisson dado por

$$\{f,g\}_d(\mu,\gamma) := \langle \mu, [D_\mu f(\mu), D_\mu g(\mu)] \rangle + \gamma s(D_\mu f, D_\mu g).$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\mathfrak{u}}_2)$, $(\mu,\gamma) \in \tilde{\mathfrak{u}}_2$.

$\tilde{\mathfrak{u}}_2$ EBLP

Definición

$\tilde{\mathfrak{u}}_2 := \mathfrak{u}_2 \oplus \mathbb{R}$ *es el álgebra de Lie dotada con el corchete*

$$[(A,a),(B,b)]_d = ([A,B], s(A,B)).$$

donde, $s(A,B) := tr(A[d,B])$ *para* $A, B \in \mathfrak{u}_2$.

$\tilde{\mathfrak{u}}_2$ es un EBLP, con el corchete de Poisson dado por

$$\{f,g\}_d(\mu,\gamma) := \langle \mu, [D_\mu f(\mu), D_\mu g(\mu)] \rangle + \gamma s(D_\mu f, D_\mu g).$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\mathfrak{u}}_2)$, $(\mu,\gamma) \in \tilde{\mathfrak{u}}_2$.

Teorema

1. Gr^0_{res} *de* Gr_{res} *es una hoja simpléctica fuerte en el EBLP* $\tilde{\mathfrak{u}}_2$.
2. *La distribución característica de* $\tilde{\mathfrak{u}}_2$ *es integrable.*

Muchas gracias