

# Generación de ciclos en redes neuronales competitivas

Andrea L. Bel <sup>1,2</sup>    Walter A. Reartes <sup>1</sup>    Horacio G. Rotstein <sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, <sup>2</sup>CONICET, Argentina

<sup>3</sup>Department of Mathematical Sciences, New Jersey Institute of Technology, USA

XIV Congreso Dr. A. Monteiro - Mayo 2017

# Modelo no diferenciable para una red competitiva

Consideramos la siguiente red lineal por sectores

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

$x_i$ : nivel de actividad del nodo  $i$ ,

$W_{ij}$ : conexión dirigida de  $j$  a  $i$ ,

$\theta_i \in \mathbb{R}^+$ : impulso externo constante,

$[\cdot]_+$ : función definida por  $[y]_+ = \max(0, y)$ .

---

<sup>1</sup>R. H. R. Hahnloser and H. S. Seung and J. J. Slotine, Neural Comp, 2003

<sup>2</sup>C. Curto, K. Morrison, Neural Comp, 2016

<sup>3</sup>K. Morrison and A. Degeratu and V. Itskov and C. Curto, arXiv, 2016

# Modelo no diferenciable para una red competitiva

Consideramos la siguiente red lineal por sectores

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

$x_i$ : nivel de actividad del nodo  $i$ ,

$W_{ij}$ : conexión dirigida de  $j$  a  $i$ ,

$\theta_i \in \mathbb{R}^+$ : impulso externo constante,

$[\cdot]_+$ : función definida por  $[y]_+ = \max(0, y)$ .

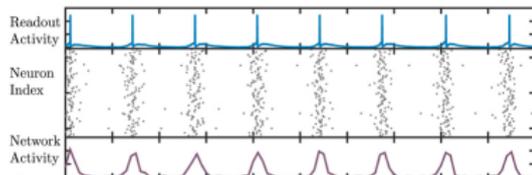


Figura de Z. G. Esfahani et al,  
Scientific Report, 2016

<sup>1</sup>R. H. R. Hahnloser and H. S. Seung and J. J. Slotine, Neural Comp, 2003

<sup>2</sup>C. Curto, K. Morrison, Neural Comp, 2016

<sup>3</sup>K. Morrison and A. Degeratu and V. Itskov and C. Curto, arXiv, 2016

# Modelo no diferenciable para una red competitiva

Consideramos la siguiente red lineal por sectores

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

$x_i$ : nivel de actividad del nodo  $i$ ,

$W_{ij}$ : conexión dirigida de  $j$  a  $i$ ,

$\theta_i \in \mathbb{R}^+$ : impulso externo constante,

$[\cdot]_+$ : función definida por  $[y]_+ = \max(0, y)$ .

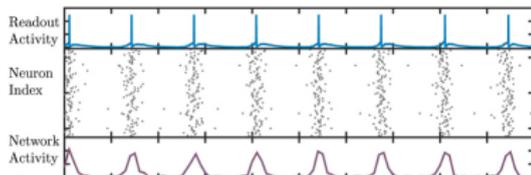


Figura de Z. G. Esfahani et al,  
Scientific Report, 2016

Resultados sobre los equilibrios: en redes simétricas con impulsos distintos<sup>1</sup> y en redes **competitivas** ( $W_{ij} \leq 0$ ) con impulsos iguales<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>R. H. R. Hahnloser and H. S. Seung and J. J. Slotine, Neural Comp, 2003

<sup>2</sup>C. Curto, K. Morrison, Neural Comp, 2016

<sup>3</sup>K. Morrison and A. Degeratu and V. Itskov and C. Curto, arXiv, 2016

# Modelo no diferenciable para una red competitiva

Consideramos la siguiente red lineal por sectores

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

$x_i$ : nivel de actividad del nodo  $i$ ,

$W_{ij}$ : conexión dirigida de  $j$  a  $i$ ,

$\theta_i \in \mathbb{R}^+$ : impulso externo constante,

$[\cdot]_+$ : función definida por  $[y]_+ = \max(0, y)$ .

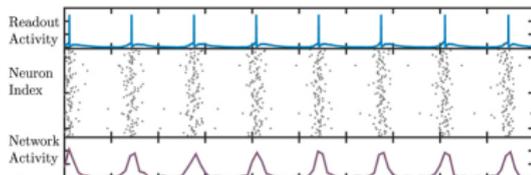


Figura de Z. G. Esfahani et al,  
Scientific Report, 2016

Resultados sobre los equilibrios: en redes simétricas con impulsos distintos<sup>1</sup> y en redes **competitivas** ( $W_{ij} \leq 0$ ) con impulsos iguales<sup>2</sup>.

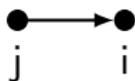
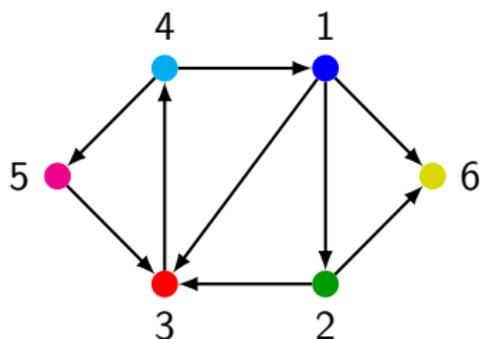
En estas últimas se prueba que la actividad de cada nodo es acotada si  $x_i(0) \in [0, \theta_i]$ . Se han observado **ciclos límite** y **atractores caóticos**<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>R. H. R. Hahnloser and H. S. Seung and J. J. Slotine, Neural Comp, 2003

<sup>2</sup>C. Curto, K. Morrison, Neural Comp, 2016

<sup>3</sup>K. Morrison and A. Degeratu and V. Itskov and C. Curto, arXiv, 2016

## Ejemplo: Red competitiva no simétrica con seis nodos

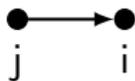
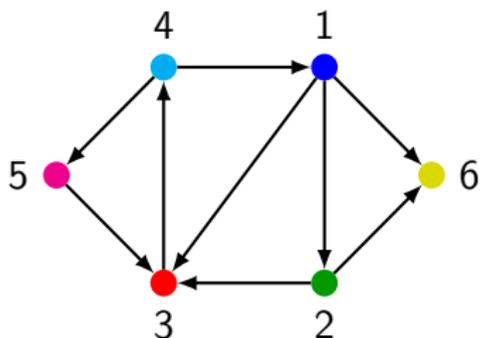


Inhibición

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{débil: } W_{ij} = -1 + \frac{1}{4} \\ \text{fuerte: } W_{ji} = -1 - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Impulsos externos:  $\theta_i = 1, \forall i$ .

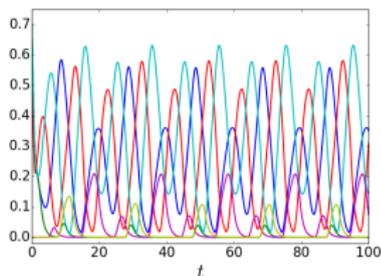
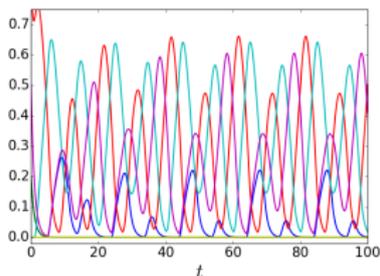
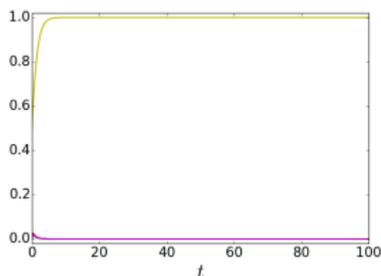
# Ejemplo: Red competitiva no simétrica con seis nodos



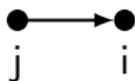
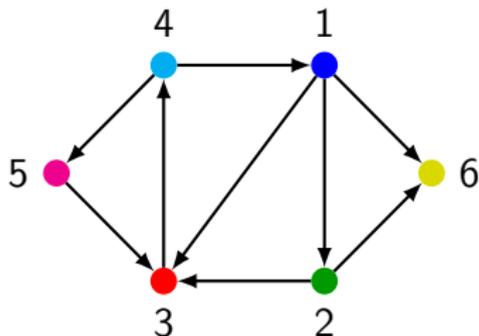
Inhibición  $\left\{ \begin{array}{l} \text{débil: } W_{ij} = -1 + \frac{1}{4} \\ \text{fuerte: } W_{ij} = -1 - \frac{1}{2} \end{array} \right.$

Impulsos externos:  $\theta_i = 1, \forall i.$

Para distintas condiciones iniciales observamos



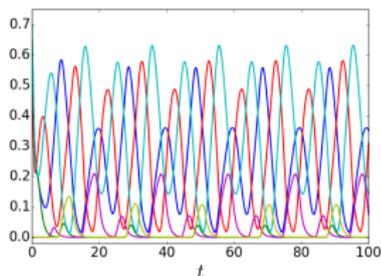
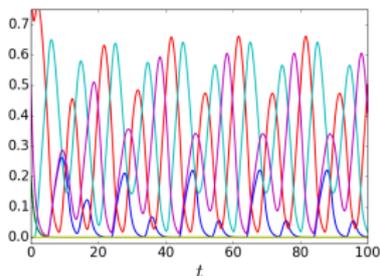
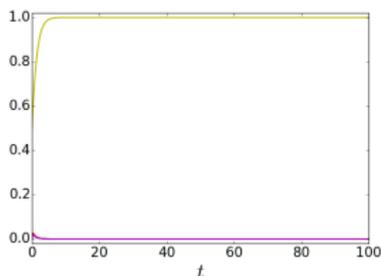
# Ejemplo: Red competitiva no simétrica con seis nodos



Inhibición  $\left\{ \begin{array}{l} \text{débil: } W_{ij} = -1 + \frac{1}{4} \\ \text{fuerte: } W_{ji} = -1 - \frac{1}{2} \end{array} \right.$

Impulsos externos:  $\theta_i = 1, \forall i$ .

Para distintas condiciones iniciales observamos



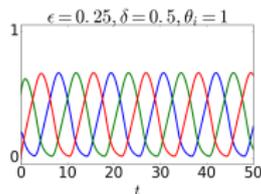
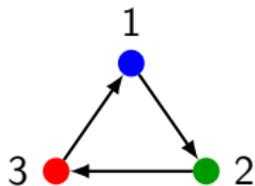
¿Cómo la topología de la red determina los ciclos? ¿Cómo influyen los valores de las conexiones? **¿Cómo se generan los ciclos límite?**

## Red competitiva de tres nodos

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^3 W_{ij} x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, 2, 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \delta & -1 + \epsilon \\ -1 + \epsilon & 0 & -1 - \delta \\ -1 - \delta & -1 + \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta \in \mathbb{R}^+, \quad \epsilon \in (0, 1)$$



## Red competitiva de tres nodos

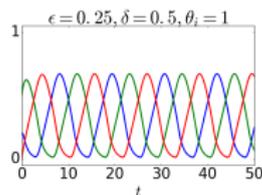
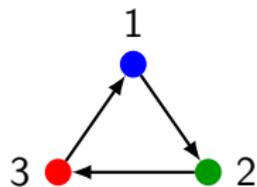
$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^3 W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, 2, 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \delta & -1 + \epsilon \\ -1 + \epsilon & 0 & -1 - \delta \\ -1 - \delta & -1 + \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta \in \mathbb{R}^+, \quad \epsilon \in (0, 1)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta \in \mathbb{R}^+,$$

$\theta_3 > 0$     **parámetro de bifurcación**



## Red competitiva de tres nodos

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[ \sum_{j=1}^3 W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, 2, 3$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \delta & -1 + \epsilon \\ -1 + \epsilon & 0 & -1 - \delta \\ -1 - \delta & -1 + \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta \in \mathbb{R}^+, \quad \epsilon \in (0, 1)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta \in \mathbb{R}^+,$$

$\theta_3 > 0$     **parámetro de bifurcación**

Sea  $f_i(x) = \sum_{j=1}^3 W_{ij}x_j + \theta_i$  definimos

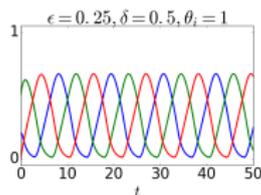
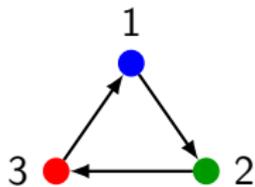
**Varietades de transición:**  $\Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : f_i(x) = 0\}, \quad i = 1, 2, 3$

Regiones:

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : f_i(x) > 0, \forall i\}$$

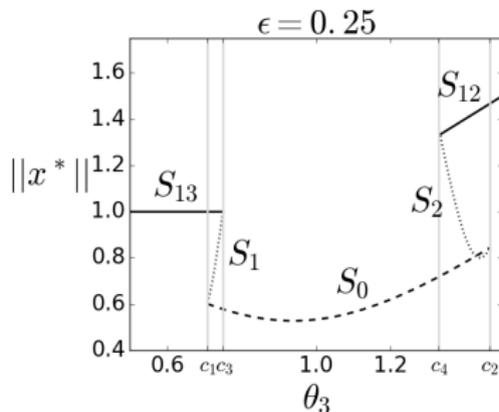
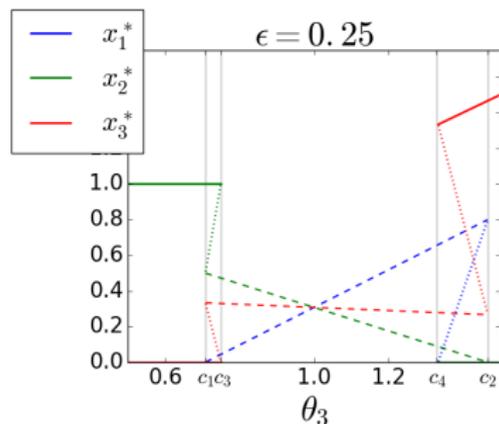
$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : f_i(x) < 0, \quad f_k(x) > 0, \quad k \neq i\}$$

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^3 : f_i(x) < 0, \quad f_j(x) < 0, \quad f_k(x) > 0, \quad k \neq i, j\}, \text{ con } i < j$$



# Red competitiva de tres nodos. Equilibrios y su estabilidad

Ejemplo fijando  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{4}$  y  $\theta = 1$ .

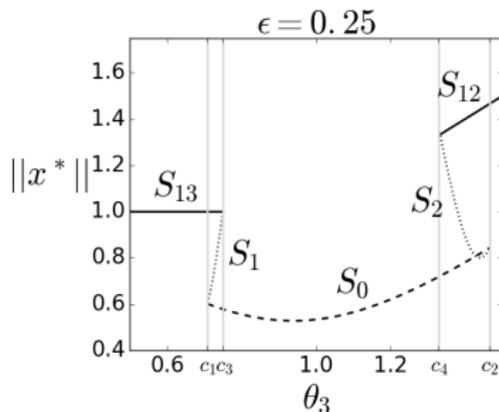
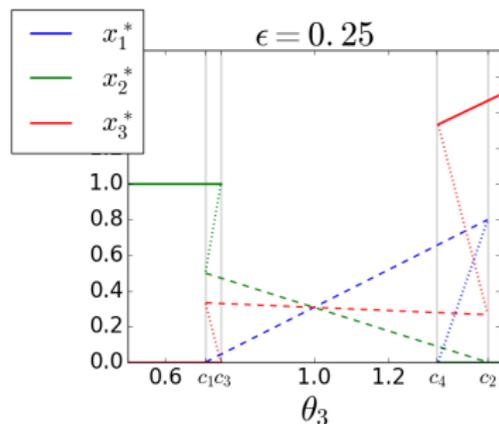


Con  $c_1 = \frac{17}{24}$ ,  $c_2 = \frac{22}{15}$ ,  $c_3 = \frac{3}{4}$  y  $c_4 = \frac{4}{3}$ .

<sup>4</sup>M. di Bernardo and C. J. Budd and A. R. Champneys and P. Kowalczyk, Piecewise-smooth Dynamical Systems. Theory and Applications, Springer-Verlag, 2008

# Red competitiva de tres nodos. Equilibrios y su estabilidad

Ejemplo fijando  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{4}$  y  $\theta = 1$ .



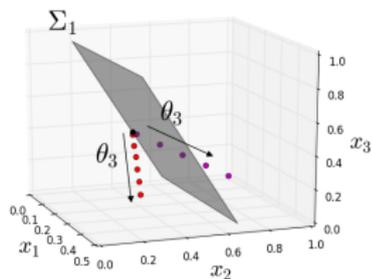
Con  $c_1 = \frac{17}{24}$ ,  $c_2 = \frac{22}{15}$ ,  $c_3 = \frac{3}{4}$  y  $c_4 = \frac{4}{3}$ .

Existen valores de  $\theta_3$  en los que coexisten tres equilibrios. Las ramas de equilibrios se conectan en distintas **bifurcaciones discontinuas**<sup>4</sup>.

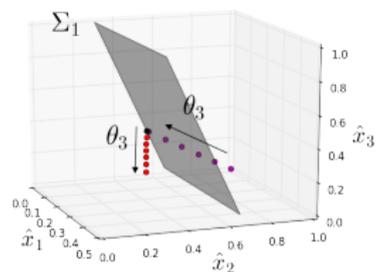
<sup>4</sup>M. di Bernardo and C. J. Budd and A. R. Champneys and P. Kowalczyk, Piecewise-smooth Dynamical Systems. Theory and Applications, Springer-Verlag, 2008

# Bifurcaciones discontinuas en la red de tres nodos

## Fold no diferenciable

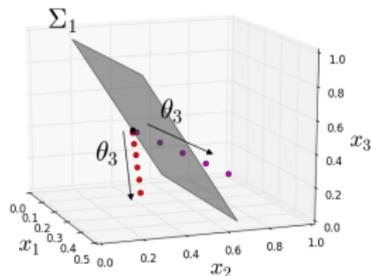


## Persistente

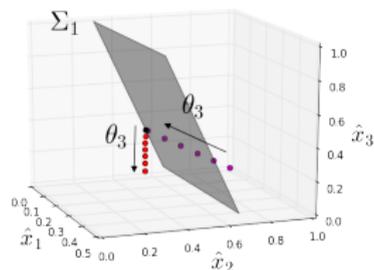


# Bifurcaciones discontinuas en la red de tres nodos

## Fold no diferenciable



## Persistente



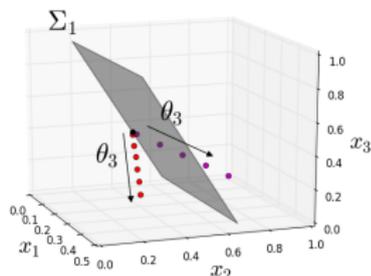
Las bifurcaciones en  $c_1$  y  $c_2$  resultan:

○ fold no diferenciable si  $0 < \epsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$ ,

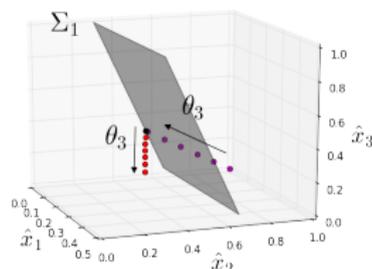
- interviene un **foco inestable** y un punto silla,

# Bifurcaciones discontinuas en la red de tres nodos

## Fold no diferenciable



## Persistente



Las bifurcaciones en  $c_1$  y  $c_2$  resultan:

- fold no diferenciable si  $0 < \epsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$ ,
  - interviene un **foco inestable** y un punto silla,
- persistente si  $\frac{\delta}{1+\delta} < \epsilon < 1$ , además:
  - si  $\epsilon < \delta$ : un nodo estable se transforma en un **foco inestable**
  - si  $\epsilon > \delta$ : un nodo estable se transforma en un foco estable

## Generación de ciclos estables. Ejemplo fold

Una vez más fijamos los valores  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{4}$  y  $\theta = 1$ .

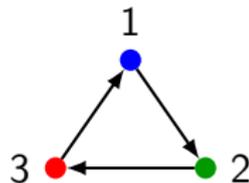
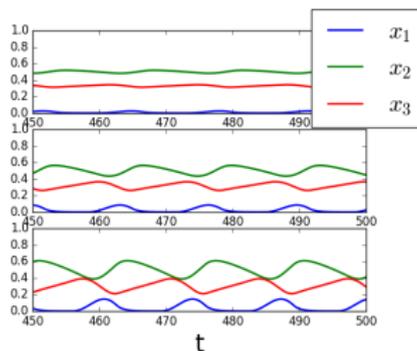
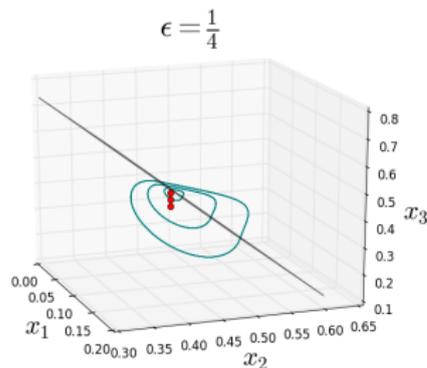
Bifurcaciones de tipo fold no diferenciable en  $\theta_3 = \frac{17}{24}$  y  $\theta_3 = \frac{22}{15}$ . Hallamos ciclos estables para  $\theta_3 > \frac{17}{24}$  y  $\theta_3 < \frac{22}{15}$  en un entorno de la bifurcación.

## Generación de ciclos estables. Ejemplo fold

Una vez más fijamos los valores  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{4}$  y  $\theta = 1$ .

Bifurcaciones de tipo fold no diferenciable en  $\theta_3 = \frac{17}{24}$  y  $\theta_3 = \frac{22}{15}$ . Hallamos ciclos estables para  $\theta_3 > \frac{17}{24}$  y  $\theta_3 < \frac{22}{15}$  en un entorno de la bifurcación.

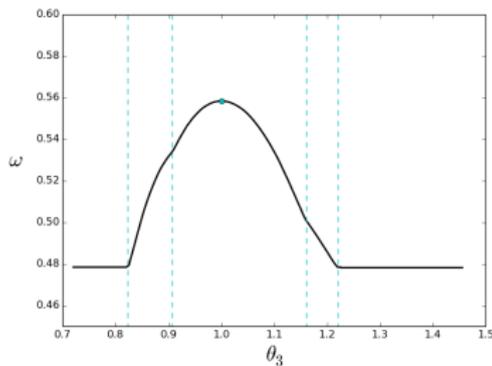
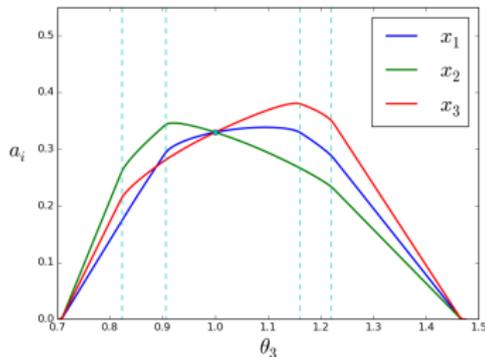
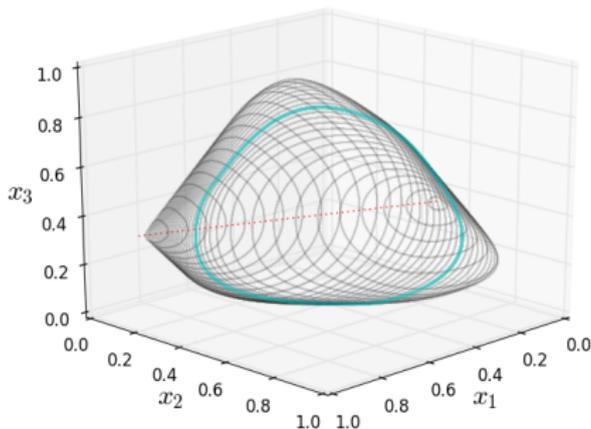
Por ejemplo para  $\theta_3 > \frac{17}{24}$  obtenemos



## Ciclos estables variando $\theta_3$

Fijamos  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{4}$  y  $\theta = 1$ .

Ciclos en el espacio al variar  $\theta_3$ , las amplitudes de cada una de las variables y las frecuencias de los ciclos la variar  $\theta_3$ .



# Conclusiones

- Describimos todos los equilibrios en una red de tres nodos y determinamos condiciones de los parámetros en los que existen bifurcaciones de tipo fold no diferenciable o de tipo persistente.

# Conclusiones

- Describimos todos los equilibrios en una red de tres nodos y determinamos condiciones de los parámetros en los que existen bifurcaciones de tipo fold no diferenciable o de tipo persistente.
- Hallamos ciclos que se generan a partir de las bifurcaciones discontinuas de tipo fold y persistente cuando un foco inestable es uno de los equilibrios que interactúa.

# Conclusiones

- Describimos todos los equilibrios en una red de tres nodos y determinamos condiciones de los parámetros en los que existen bifurcaciones de tipo fold no diferenciable o de tipo persistente.
- Hallamos ciclos que se generan a partir de las bifurcaciones discontinuas de tipo fold y persistente cuando un foco inestable es uno de los equilibrios que interactúa.
- Mostramos la conexión entre las ramas de ciclos que surgen en las bifurcaciones de equilibrios describiendo cómo se transforma el ciclo al variar el impulso de uno de los nodos.

# Conclusiones

- Describimos todos los equilibrios en una red de tres nodos y determinamos condiciones de los parámetros en los que existen bifurcaciones de tipo fold no diferenciable o de tipo persistente.
- Hallamos ciclos que se generan a partir de las bifurcaciones discontinuas de tipo fold y persistente cuando un foco inestable es uno de los equilibrios que interactúa.
- Mostramos la conexión entre las ramas de ciclos que surgen en las bifurcaciones de equilibrios describiendo cómo se transforma el ciclo al variar el impulso de uno de los nodos.

Muchas gracias