# El lema del diamante

Mariano Suárez-Álvarez

20 de mayo, 2015

## Índice


1 Monoides libres 1
2 Álgebras libres 4
3 Órdenes monomiales 8
4 Sistemas de reescritura 13
5 El lema del diamante 17
6 Ejemplos 18
7 Ejercicios 18


## §1. Monoides libres

**1.1.** Sea $X$ un conjunto, cuyos elementos llamamos ***letras*** o ***variables***. Si $n \in \mathbb{N}_0$, una ***palabra de longitud*** $n$ en las letras de $X$ es una función $w : [\![n]\!] \to X$, y en ese caso escribimos $|w| = n$. Cuando $n$ es positivo, denotaremos siempre a $w$ por la secuencia finita $w(1)w(2)\cdots w(n)$ de sus valores escritos en el orden natural. Así, $x$, $yyyy$ y $xyxxyxxy$ son palabras en las letras del conjunto $\{x, y\}$ de longitud 1, 4 y 8, respectivamente. Como $[\![0]\!] = \emptyset$, hay exactamente una palabra de longitud 0, a la que llamamos la ***palabra vacía*** y escribimos 1.

**1.2.** Si $n \in \mathbb{N}_0$, escribimos $X^n$ al conjunto de todas las palabras de longitud $n$ en las letras de $X$ y $\langle X\rangle = \bigcup_{i\geq 0} X^n$ al conjunto de todas las palabras; notemos que esta unión es disjunta.

La función $w \in X^1 \mapsto w(1) \in X$ es evidentemente una biyección, a la que consideraremos siempre como una identificación. En vista de esto, consideramos a los elementos de $X$ como palabras de longitud 1 y tenemos una función $\iota : X \to \langle X\rangle$, la inclusión de $X^1$ en $\langle X\rangle$, que es claramente inyectiva.

**1.3.** Si $u$, $v \in \langle X\rangle$ son dos palabras de longitudes $n$ y $m$, respectivamente, entonces la ***concatenación*** de $u$ y $v$ es la palabra $u \cdot v \in X^{n+m}$ de longitud $n + m$ tal que

$$(u \cdot v)(i) = \begin{cases} u(i), & \text{si } 1 \leq i \leq n; \\ v(i-n), & \text{si } n < i \leq n+m. \end{cases}$$

De la definición misma de esta operación se sigue que

$$|u \cdot v| = |u| + |v|. \tag{1}$$ {eq:monoide:abs}

{prop:monoide}

**Proposición.** *El conjunto $\langle X \rangle$ dotado de la operación $\cdot$ de concatenación es un monoide. El elemento neutro de $\langle X \rangle$ es la palabra vacía 1 y el conjunto $X$ genera a $\langle X \rangle$ como monoide.*

*Demostración.* Tenemos que mostrar que la operación de concatenación es asociativa y que tiene a la palabra vacía como elemento neutro, y esto último es inmediato. Si $n$, $m$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $u \in X^n$, $v \in X^m$ y $w \in X^K$, entonces se sigue de la definición que

$$((u \cdot v) \cdot w)(i) = \begin{cases} (u \cdot v)(i), & \text{si } 1 \leq i \leq n+m; \\ w(i-n-m), & \text{si } n+m < i \leq n+m+k; \end{cases}$$
$$= \begin{cases} u(i), & \text{si } 1 \leq i \leq n; \\ v(i-n), & \text{si } n < i \leq n+m; \\ w(i-n-m), & \text{si } n+m < i \leq n+m+k. \end{cases}$$

Es fácil ver que $u \cdot (v \cdot w)$ es exactamente la misma función.

Nos queda ver que $\langle X \rangle$ está generado por $X$ como monoide. Para ello, mostremos, haciendo inducción sobre $n$, que $X^n$ está contenido en el submonoide $\langle X \rangle'$ generado por $X$. Esto es evidente si $n = 0$. Sea entonces $n \geq 0$ y sea $w \in X^{n+1}$. Si ponemos $w' = w|_{[\![n]\!]}$, que es un elemento de $X^n$, y $x = w(n+1) \in X$, entonces $w = w' \cdot x$ y la hipótesis inductiva implica que

$$w = w' \cdot x \in X^n \cdot X \subseteq \langle X \rangle' \cdot X \subseteq \langle X \rangle',$$

de manera que $X^{n+1} \subseteq \langle X \rangle'$. □

**1.4.** Una consecuencia inmediata de esta Proposición **1.3** y de la igualdad (1) es que la función longitud $|\ |: \langle X \rangle \to \mathbb{N}_0$ es un morfismo de monoides. {p:abs}

**1.5.** A la siguiente observación evidente la vamos a usar frecuentemente —de hecho, la usamos ya en el final de la prueba de la Proposición **1.3**.

**Lema.** *Sea $w \in \langle X \rangle$ una palabra de longitud $l \geq 0$. Si $k \in \mathbb{N}_0$ es tal que $0 \leq k \leq l$, entonces existe un único par de palabras $u$, $v \in \langle X \rangle$ tales que $|u| = k$, $|v| = l - k$ y $w = u \cdot v$.*

*Demostración.* Las palabras $u = w|_{[\![k]\!]}$ y $v : i \in [\![l-k]\!] \mapsto w(i-k) \in X$ satifacen la condición. Si $u' \in X^k$ y $v' \in X^{l-k}$ es otro par de palabras tal que $w = u' \cdot v'$, tenemos que $u'(i) = (u' \cdot v')(i) = w(i)$ si $i \in [\![k]\!]$, de manera que $u' = w|_{[\![k]\!]} = u$, y

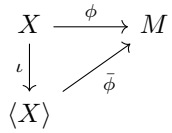
$$v'(i) = (u' \cdot v')(k+i) = w(k+i) = (u \cdot v)(k+i) = v(i)$$

para cada $i \in [\![l-k]\!]$, de manera que $v' = v$. □

**1.6.** La propiedad fundamental del monoide $\langle X \rangle$ es que es *libre*, es decir, la siguiente:

{prop:monoide:libre}

**Proposición.** *Sea $M$ un monoide. Si $\phi : X \to M$ es una función, entonces existe exactamente un morfismo $\bar{\phi} : \langle X \rangle \to M$ tal que conmuta el diagrama*




*Demostración.* Definimos una sucesión de funciones $(\phi_n : X^n \to M)_{n \geq 0}$ de manera inductiva, empezando con $\phi_0 : X^0 \to M$ la función tal que $\phi_0(1) = 1_M$. Si $n \geq 0$ y ya tenemos a la función $\phi_n$, entonces definimos $\phi_{n+1} : X^{n+1} \to M$ de la siguiente manera: si $w \in X^{n+1}$, existen $w' \in X^n$ y $x \in X$ tales que $w = w' \cdot x$ y ponemos

$$\phi_{n+1}(w) = \phi_n(w') \cdot \phi(x).$$

El producto $\cdot$ que aparece a la dereche en esta igualdad es el de $M$. Como $\langle X \rangle = \bigcup_{n \geq 0} X^n$ y la unión es disjunta, hay exactamente una función $\bar{\phi} : \langle X \rangle \to M$ tal que $\bar{\phi}|_{X^n} = \phi_n$ para todo $n \geq 0$. Mostremos que $\phi$ es un morfismo de monoides.

Se sigue de la construcción misma que $\bar{\phi}(1) = 1_M$. Sean $u$, $v \in \langle X \rangle$ dos palabras: tenemos que probar que $\bar{\phi}(u \cdot v) = \bar{\phi}(u) \cdot \bar{\phi}(v)$ y lo hacemos por inducción en la longitud de $v$.

Si $v$ tiene longitud 0, entonces $v$ es la palabra vacía, $u \cdot v = u$ y $\bar{\phi}(v) = 1_M$ por construcción, así que $\bar{\phi}(u \cdot v) = \bar{\phi}(u) = \bar{\phi}(u) \cdot 1_M = \bar{\phi}(u) \cdot \bar{\phi}(v)$. Supongamos ahora que la longitud de $v$ es $l \geq 1$. En ese caso existen una palabra $v'$ de longitud $l - 1$ y una letra $x$ tales que $v = v' \cdot x$, y entonces

$$\bar{\phi}(u \cdot v) = \bar{\phi}(u \cdot (v' \cdot x)) = \bar{\phi}((u \cdot v') \cdot x).$$

De la definición de $\bar{\phi}$ se sigue que esto es igual a $\bar{\phi}(u \cdot v') \cdot \phi(x)$. Por otro lado, como $v'$ tiene longitud $l - 1$, la hipótesis inductiva nos dice que $\bar{\phi}(u \cdot v') = \bar{\phi}(u) \cdot \bar{\phi}(v')$ y poniendo todo junto vemos que

$$\bar{\phi}(u \cdot v) = \bar{\phi}(u \cdot v') \cdot \phi(x) = (\bar{\phi}(u) \cdot \bar{\phi}(v')) \cdot \phi(x) = \bar{\phi}(u) \cdot (\bar{\phi}(v') \cdot \phi(x)).$$

Como $\bar{\phi}(v') \cdot \phi(x) = \bar{\phi}(v' \cdot x) = \bar{\phi}(v)$, otra vez por la definición de $\bar{\phi}$, esto es igual a $\bar{\phi}(u) \cdot \bar{\phi}(v)$.

La existencia del morfismo $\bar{\phi}$ queda así establecida. Para ver la unicidad, supongamos que $\psi : \langle X \rangle \to M$ es otro morfismo de monoides tal que $\phi = \psi \circ \iota$ y consideremos el conjunto $E = \{w \in \langle X \rangle : \bar{\phi}(w) = \psi(x)\}$. Es inmediato verificar que es un submonoide de $\langle X \rangle$, y es claro de las hipótesis que $X \subseteq E$. La Proposición **1.3** nos dice que $X$ genera a $\langle X \rangle$ como monoide y esto implica que $E = \langle X \rangle$. □

**1.7.** Un ejemplo representativo de aplicación de esta proposición es el siguiente. Consideremos la función $\phi : X \to \mathbb{N}_0$ tal que $\phi(x) = 1$ para todo $x \in X$. Si vemos a $\mathbb{N}_0$ con su estructura usual de monoide aditivo, la proposición nos dice que existe un único morfismo de monoides $\bar{\phi} : \langle X \rangle \to \mathbb{N}_0$ tal que $\bar{\phi}(x) = 1$ para todo $x \in X$. Por otro lado, observamos en **1.4** que la función longitud $|\ | : \langle X \rangle \to \mathbb{N}_0$ es un morfsmo de monoides tal que $|x| = 1$ para todo $x \in X$. Se sigue, entonces, que $\bar{\phi}(w) = |w|$ para cualquier $w \in \langle X \rangle$.

{prop:monoide:reg}

**1.8. Proposición.** *Si $u$, $v$, $v' \in \langle X\rangle$ son tales que $u\cdot v = u\cdot v'$ o $v\cdot u = v'\cdot u$, entonces $v = v'$.*

*Demostración.* Supongamos, por ejemplo, que $uv = uv'$. Como $|u|+|v| = |uv| = |uv'| = |u|+|v'|$, es $|v| = |v'|$; sean $m$ este número y $n = |u|$. Para cada $i \in [\![m]\!]$ es

$$v(i) = (u\cdot v)(n+i) = (u\cdot v')(n+i) = v'(i)$$

y esto significa qu $v = v'$. □

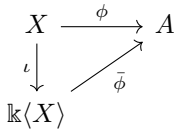
## §2. Álgebras libres

**2.1.** Sea $\Bbbk$ un anillo conmutativo, sea $X$ un conjunto y sea $\Bbbk\langle X\rangle$ el $\Bbbk$-módulo libre con base $\langle X\rangle$. Precisamente porque $\langle X\rangle$ es una base de $\Bbbk\langle X\rangle$, existe exactamente una función $\Bbbk$-bilineal $\star : \Bbbk\langle X\rangle \times \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ tal que $u\star v = u\cdot v$ para cada par de palabras $u$, $v \in \langle X\rangle$. Esta operación $\star$ es asociativa: para verlo alcanza con mostrar que $(u\star v)\star w = u\star(v\star w)$ si $u$, $v$, $w \in \langle X\rangle$, y esto es consecuencia inmediata de que la operación de concatenación en $\langle X\rangle$ es asociativa. De manera similar, la palabra vacía 1 de $\langle X\rangle$ es el elemento identidad de $\Bbbk\langle X\rangle$. Así, el espacio vectorial $\Bbbk\langle X\rangle$ dotado de la multiplicación $\star$ es una $\Bbbk$-álgebra.

**2.2.** Que el monoide $\langle X\rangle$ sea libre en el sentido de la Proposición 1.6 tiene la siguiente consecuencia:

{prop:algebra:libre}

**Proposición.** *Sea $\iota : X \to \Bbbk\langle X\rangle$ la función inclusión y sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Si $\phi : X \to A$ es una función, entonces existe exactamente un morfismo $\bar\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ de $\Bbbk$-álgebras tal que conmuta el diagrama*




*Demostración.* De acuerdo a la Proposición 1.6, y viendo a $A$ como un monoide para la multiplicación, existe un morfismo de monoides $\phi' : \langle X\rangle \to A$ tal que $\phi'(x) = \phi(x)$ para todo $x \in X$. Como $\langle X\rangle$ es una $\Bbbk$-base de $\Bbbk\langle X\rangle$, existe entonces un morfismo de $\Bbbk$-módulos $\bar\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ tal que $\bar\phi(u) = \phi'(u)$ para todo $u \in \langle X\rangle$; en particular, tenemos que $\bar\phi(x) = \phi'(x) = \phi(x)$ para todo $x \in X$, de manera que conmuta el diagrama del enunciado. Esta función $\bar\phi$ es un morfismo de álgebras. En efecto, como $\langle X\rangle$ genera a su dominio como $\Bbbk$-módulo, para verlo alcanza con mostrar que $\bar\phi(u\star v) = \bar\phi(u)\cdot\bar\phi(v)$ cuando $u$, $v \in \langle X\rangle$, y esto sigue de que

$$\bar\phi(u\star v) = \bar\phi(u\cdot v) = \phi'(u\cdot v) = \phi'(u)\dot\phi'(v) = \bar\phi(u)\cdot\bar\phi(v).$$

Finalmente, si $\psi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ es otro morfismo de $\Bbbk$-álgebras tal que $\psi\circ\iota = \phi$, entonces el conjunto $E = \{a \in A : \bar\psi(a) = \psi(a)\}$ es una $\Bbbk$-subalgebra de $\Bbbk\langle X\rangle$ que contiene a $X$, así que, como $X$ genera a $\Bbbk\langle X\rangle$, es $E = \Bbbk\langle X\rangle$ y esto significa que $\psi = \bar\phi$. □

{prop:algebra:reg}

**2.3. Proposición.**(*i*) *Un elemento de* $\langle X\rangle$ *no es un divisor de cero en* $\Bbbk\langle X\rangle$.
(*ii*) *Si en* $\Bbbk$ *no hay divisores de cero, entonces en* $\Bbbk\langle X\rangle$ *tampoco.*

*Demostración.* (*i*) Sean $u \in \langle X\rangle$ y $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ tales que $ua = 0$. Hay un conjunto finito $V \subseteq \langle X\rangle$ y una función $\lambda : V \to \Bbbk$ tal que $a = \sum_{v\in V} \lambda(v)v$, así que

$$ua = \sum_{v\in V} \lambda(v)uv = 0. \tag{2}$$ {eq:algebra:reg}

De acuerdo a la Proposición **1.8** la función $v \in V \mapsto uv \in \langle X\rangle$ es inyectiva y entonces, como $\langle X\rangle$ es un subconjunto linealmente independiente de $\Bbbk\langle X\rangle$, se sigue de la igualdad (2) que $\lambda(v) = 0$ para todo $v \in V$, esto es, que $a = 0$.

(*ii*) Supongamos que existen dos elementos no nulos $a$, $b \in \Bbbk\langle X\rangle$ tales que $ab = 0$. Existen conjuntos finitos $U$, $V \subseteq \langle X\rangle$ y funciones $\lambda : U \to \Bbbk$ y $\mu : V \to \Bbbk$ tales que $a = \sum_{u\in U} \lambda(u)u$ y $b = \sum_{v\in V} \mu(v)v$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in U$ y que $\mu(v) \neq 0$ para todo $v \in V$. Por otro lado, como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, es necesariamente $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. Como

$$ab = \sum_{u\in U, v\in V} \lambda(u)\mu(v)uv = \sum_{w\in\langle X\rangle} \Big( \sum_{\substack{u\in U, v\in V \\ uv=w}} \lambda(u)\mu(v)\Big) w,$$

para todo $w \in \langle X\rangle$ vale que

$$\sum_{\substack{u\in U, v\in V \\ uv=w}} \lambda(u)\mu(v) = 0. \tag{3}$$ {eq:algebra:reg:2}

Sean $u_0 \in U$ y $v_0 \in V$ tales que $|u_0| = \max\{|u| : u \in U\}$ y $|v_0| = \max\{|v| : v \in V\}$. Si $u \in U$ y $v \in V$ son tales que $uv = u_0v_0$, entonces $|u| + |v| = |u_0| + |v_0|$ y, como $|u| \leq |u_0|$ y $|v| \leq |v_0|$, vemos que $|u| = |u_0|$ y $|v| = |v_0|$ y, en consecuencia, que $u = u_0$ y $v = v_0$. La igualdad (3) con $w = u_0v_0$, entonces, nos dice que $\lambda(u_0)\mu(v_0) = 0$. Esto es imposible porque en $\Bbbk$ no hay divisores de cero. □

{prop:algebra:rango}

**2.4. Proposición.** *Sean* $X$ *e* $Y$ *dos conjuntos. Entonces* $\Bbbk\langle X\rangle$ *y* $\Bbbk\langle Y\rangle$ *son álgebras isomorfas si y solamente si* $X$ *e* $Y$ *tienen el mismo cardinal.*

*Demostración.* Supongamos que vale la condición y sea $f : X \to Y$ es una biyección. De la Proposición **2.2** sabemos que existen morfismos de álgebras $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle Y\rangle$ y $\psi : \Bbbk\langle Y\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ tales que $\phi(x) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $\psi(y) = f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. La composición $\psi \circ \phi : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ es entonces un morfismo de álgebras tal que $(\psi \circ \phi)(x) = x$ para todo $x \in X$, así que la afirmación relativa a la unicidad de la Proposición **2.2** implica que $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{\Bbbk\langle X\rangle}$. De la misma forma podemos ver que $\phi \circ \psi = \mathsf{id}_{\Bbbk\langle Y\rangle}$ y, en consecuencia, que $\phi$ es un isomorfismo.

Nos resta mostrar la necesidad de la condición de la proposición. Sea primero $X$ un conjunto. De acuerdo a la Proposición **2.2** existe un único morfismo de álgebras $\epsilon : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk$ tal que $\epsilon(x) = 0$ para todo $x \in X$, y es claro que se trata de una sobreyección. Si $I_0 = \ker \epsilon$ es su núcleo, entonces el morfismo $\epsilon$ induce un isomorfismo de álgebras $\Bbbk\langle X\rangle/I_0 \cong \Bbbk$.

Es claro que $I_0$ tiene como base, en tanto $\Bbbk$-submódulo de $\Bbbk\langle X\rangle$, al conjunto $X^{\geq 1}$. Se sigue de esto que el cuadrado $I_0^2$ está generado en tanto submódulo por el conjunto de todo los productos de dos elementos de $X^{\geq 1}$, y este conjunto es evidentemente $X^{\geq 2}$. Como $X^{\geq 2}$ es linealmente independiente sobre $\Bbbk$, vemos así que, de hecho, $I_0^2$ tiene a $X^{\geq 2}$ como base.

Consideremos la función $\pi : x \in X \mapsto x + I_0^2 \in I_0/I_0^2$. Esta función es inyectiva: en efecto, si $x$ e $y$ son elementos de $X$ tales que $\pi(x) = \pi(y)$, entonces $x - y \in I_0^2$, y esto es absurdo ya que todo elemento de $I_0^2$ es una combinación lineal de palabras de longitud al menos dos y $x - y$ no lo es. Más aún, el conjunto $\mathscr{B} = \{\pi(x) : x \in X\}$ es una $\Bbbk$-base de $I_0/I_0^2$.

- Si $u \in I_0$, entonces $u$ es una combinación lineal de palabras de longitud al menos 1, así que existe una familia de escalares $(\lambda_x)_{x\in X}$ y un elemento $u'$ que es combinación lineal de palabras de longitud al menos 2 tales que $\lambda_x = 0$ para casi todo $x \in X$ y $u = \sum_{x\in X} \lambda_x x + u'$. Se tiene entonces que $u + I_0^2 = \sum_{x\in X} \lambda_x x + I_0^2 = \sum_{x\in X} \lambda_x \pi(x)$. Esto nos dice que el conjunto $\mathscr{B}$ genera a $I_0/I_0^2$ como espacio vectorial.
- Supongamos ahora que $(\lambda_x)_{x\in X}$ es una familia de elementos de $\Bbbk$ con $\lambda_x = 0$ para casi todo $x \in X$ tal que $\sum_{x\in X} \lambda_x \pi(x) = 0$ en $I_0/I_0^2$. Esto significa que $\sum_{x\in X} \lambda_x x$ es un elemento de $I_0^2$, lo que es absurdo, ya que no es una combinación lineal de palabras de logitud al menos 2.

Vemos así que $I_0/I_0^2$ es un $\Bbbk$-módulo libre de rango igual al cardinal de $X$. Hemos probado que

> *existe en $\Bbbk\langle X\rangle$ un ideal bilátero $I_0$ con $\Bbbk\langle X\rangle/I_0 \cong \Bbbk$ en tanto álgebras y tal que $I_0/I_0^2$ es un $\Bbbk$-módulo libre de rango igual al cardinal de $X$.* (4) {eq:free:i0}

Mostremos ahora que, de hecho, vale que

> *si $J$ es un ideal bilátero de $\Bbbk\langle X\rangle$ tal que $\Bbbk\langle X\rangle/J \cong \Bbbk$ en tanto álgebras, entonces el cociente $J/J^2$ es un $\Bbbk$-módulo libre de rango igual al cardinal de $X$.* (5) {eq:free:jj}

Sea $J$ un ideal tal que hay un isomofismo $\phi : \Bbbk\langle X\rangle/J \cong \Bbbk$ de $\Bbbk$-álgebras. Sea $p : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle/J$ es la proyección canónica y para cada $x \in X$ pongamos $\alpha_x = \phi(p(x)) \in \Bbbk$. De la Proposición **2.2** sabemos que existen morfismos de álgebras $\alpha, \beta : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ tal que $\alpha(x) = x+\alpha_x$ y $\beta(x) = x\alpha_x$ para todo $x \in X$. Como la composición $\alpha \circ \beta : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ es tal que $(\alpha \circ \beta)(x) = x$ para todo $x \in X$, esa misma proposición nos dice que $\alpha \circ \beta = \mathsf{id}_{\Bbbk\langle X\rangle}$. Razonando de manera simétrica, vemos que también $\beta \circ \alpha = \mathsf{id}_{\Bbbk\langle X\rangle}$ y, entonces, que $\alpha$ es un isomorfismo de álgebras.

Sea $J'$ el ideal de $\Bbbk\langle X\rangle$ generado por el conjunto $\{x - \alpha_x : x \in X\}$. Como $\phi(p(x - \alpha_x)) = 0$ para todo $x \in X$, tenemos que $J' \subseteq K$. Por otro lado, es $\alpha(x - \alpha_x) = x$ cualquiera sea $x \in X$: como $X$ genera a $I_0$ y $\alpha$ es un automorfismo, esto nos dice que $\alpha(J') = I_0$ y, en particular, que $\alpha$ induce un isomofismo $\bar{\alpha} : \Bbbk\langle X\rangle/J' \to \Bbbk\langle X\rangle/I_0$. Vemos así que $\Bbbk\langle X\rangle/J' \cong \Bbbk$.

Si $u \in J$, entonces este último isomorfismo implica que existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $u - \lambda 1 \in J'$ y, como $J' \subseteq J$, que $\lambda 1 \in J$. En consecuencia, la función $l_\lambda^{\Bbbk\langle X\rangle/J} : \xi \in \Bbbk\langle X\rangle/J \mapsto \lambda\xi \in \Bbbk\langle X\rangle/J$ es nula. Como $\Bbbk\langle X\rangle/J$ es isomorfa en tanto $\Bbbk$-álgebra con $\Bbbk$, la función $\eta : a \in \Bbbk \mapsto a1 + J \in \Bbbk X/J$

es un isomorfismo y conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Bbbk & \xrightarrow{l_\lambda^{\Bbbk}} & \Bbbk \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ \Bbbk\langle X\rangle/J & \xrightarrow{l_\lambda^{\Bbbk\langle X\rangle/J}} & \Bbbk\langle X\rangle/J \end{array}$$

en el que $l_\lambda^{\Bbbk} : \Bbbk \to \Bbbk$ y $l_\lambda^{\Bbbk}(a) = \lambda a$ para todo $a \in \Bbbk$. Esto implica, por supuesto, que $\lambda = 0$ y, entonces, que $u \in J'$. Concluimos de esta forma quee $J = J'$ y que $\alpha(J) = I_0$.

Finalmente, como $\alpha : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ es un isomorfismo de álgebras y $\alpha(J) = I_0$, es claro que $\alpha$ induce un isomofismo de $\Bbbk$-módulos $J/J^2 \to I_0/I_0^2$, así que la última afirmación de (5) sigue de la última afirmación de (4). Esto completa, por lo tanto, la prueba de (5).

Combinando (4) y (5), vemos que

> *el conjunto $\mathscr{J}(X)$ de los ideales $J$ de $\Bbbk\langle X\rangle$ tales que $\Bbbk\langle X\rangle/J \cong \Bbbk$ es no vacío, y que cualquiera sea $J \in \mathscr{J}(X)$ el $\Bbbk$-módulo $J/J^2$ es libre de rango igual al cardinal de $X$.* (6) {eq:free:q}

Si ahora $Y$ es otro conjunto y $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle Y\rangle$ es un isorfismo de álgebras, entonces es inmediato verificar que para cada $J \in (X)$ se tiene que $\phi(J) \in \mathscr{J}(Y)$ y que el isomofismo $\phi$ induce un isomorfismo de $\Bbbk$-módulos $J/J^2 \to \phi(J)/\phi(J)^2$. En particular, en vista de (6), $X$ e $Y$ tienen el mismo cardinal. □

**2.5.** En vista de la Proposición **2.2**, llamamos a $\Bbbk\langle X\rangle$ la ***$\Bbbk$-álgebra libre generada por $X$***. Por otro lado, decimos que un álgebra $A$ es ***libre*** si existe un conjunto $X$ tal que $A \cong \Bbbk\langle X\rangle$ y, en ese caso, que su ***rango*** es el cardinal del conjunto $X$; que esto último tiene sentido es consecuencia directa de la Proposición **2.4**.

**2.6. Proposición.** *Sea $A$ un álgebra. Si $X$ es un subconjunto de $A$ que la genera como álgebra, entonces hay un morfismso sobreyectivo de álgebras $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ tal que $\phi(x) = x$ para todo $x \in X$. En particular, si $I = \ker\phi$, entonces hay un isomorfimo de álgebras $A \cong \Bbbk\langle X\rangle/I$.*

*Demostración.* Sea $X \subseteq A$ como en el enunciado. La existencia de un morfismo de álgebras $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ tal que $\phi(x) = x$ para todo $x \in X$ es consencuencia de la Proposición **2.2**. Es claro que la imagen de $\phi$ es una subálgebra de $A$ que contiene a $X$. La elección de $X$, entonces, implica que $\phi$ es sobreyectivo. □

**2.7.** Si $A$ es un álgebra, una ***presentación*** de $A$ es una terna ordenada $(X, S, \phi)$ en la que $X$ es un conjunto, $S$ un subconjunto de $\Bbbk\langle X\rangle$ y $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ es un morfismo sobreyectivo de álgebras cuyo núcleo esta generado por $S$ en tanto ideal bilátero de $\Bbbk\langle X\rangle$.

Toda álgebra $A$ posee presentaciones. En efecto, si $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ es el morfismo de álgebras tal que $\phi(a) = a$ para todo $a \in A$, entonces $(A, \ker\phi, \phi)$ es una presentación de $A$. En general, sin embargo, estamos interesados en presentaciones $(X, S, \phi)$ más eficientes, en el sentido de que el conjunto $X$ y/o el conjunto $S$ sea lo más chico posible.

**2.8.** Decimos que un álgebra $A$ es ***afín*** si posee una presentación $(X, S, \phi)$ en la que el conjunto $X$ es finito; claramente, un álgebra es afín si y solamente sí es finitamente generada en tanto álgebra.

Por otro lado, decimos que $A$ es ***finitamente presentada*** si posee una presentación $(X, S, \phi)$ en la que tanto $X$ como $S$ sean conjuntos finitos.

## §3. Órdenes monomiales

{sect:orden}

**3.1.** Sea $X$ un conjunto y $X^*$ el monoide libre generado por $X$. Un ***orden monomial*** sobre $X^*$ es un orden parcial $\preceq$ sobre $X^*$ si

- $1 \preceq v$ para todo $v \in X^*$ y
- para todo $u$, $v$, $v'$, $w \in X^*$ vale que

$$v \preceq v' \implies uvw \preceq uv'w.$$

**3.2.** La siguiente observación es útil y es la razón por que imponemos la primera condición en la definición de los órdenes monomiales:

**Lema.** *Si $\preceq$ es un orden monomial, entonces si $u$, $v \in X^*$ y $u$ es un factor de $v$, entonces $u \preceq v$.*

*Demostración.* Si $u$ es un factor de $v$, entonces existen $w_1$, $w_2 \in X^*$ tales que $v = w_1uw_2$. Como $1 \preceq w_1$ y $1 \preceq w_2$, tenemos entonces que $u = 1u1 \preceq w_1uw_2 = v$. □

### Ejemplos

**3.3.** Sea $n \geq 1$ y sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto con $n$ elementos distintos. Fijemos un orden total $\trianglelefteq$ sobre $X$. El ***orden graduado-lexicográfico*** u ***orden deglex*** asociado a $\trianglelefteq$ es el orden $\preceq$ sobre el monoide $X^*$ tal que si $u$ y $v$ son dos elementos de $X^*$ se tiene que $u \preceq v$ si y sólo si

{p:deglex}

- o bien $|u| < |v|$
- o bien $|u| = |v|$ y existen $w$, $u'$, $v' \in X^*$ y $a$, $b \in X$ tales que $u = wau'$, $v = wbv'$ y $a \trianglelefteq b$.

En otras palabras, es $u \preceq v$ si o bien $u$ es estrictamente más corto que $v$ en tiene la misma longitud que $v$ y la *primera* letra en la que $u$ difiere de $v$ es *menor* o igual que la correspondiente letra de $v$ con respecto al orden de $X$.

Por ejemplo, si $X = \{x, y, z\}$ y $x \trianglelefteq y \trianglelefteq z$, entonces los monomios de longitud 3 se ordenan con respecto al orden *deglex* de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccc} xxx, & xxy, & xxz, & xyx, & xyy, & xyz, & xzx, & xzy, & xzz, \\ yxx, & yxy, & yxz, & yyx, & yyy, & yyz, & yzx, & yzy, & yzz, \\ zxx, & zxy, & zxz, & zyx, & zyy, & zyz, & zzx, & zzy, & zzz. \end{array}$$

**3.4.** Podemos generalizar la construcción hecha en **3.3** para el orden *deglex*. Sean $n \geq 1$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto con $n$ elementos distintos, $\trianglelefteq$ un orden total en $X$ y $\omega : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función con valores reales estrictamente positivos. Vemos a $\mathbb{R}_{\geq 0}$ como un monoide con respecto a la suma usual. De la Proposición **1.6** sabemos que existe una único morfismo de monoides $\bar{\omega} : \langle X \rangle \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. El ***orden $\omega$-graduado-lexicográfico*** u ***orden $\omega$-deglex*** asociado

a $\trianglelefteq$ y a $\omega$ es el orden $\preceq$ sobre $\langle X\rangle$ tal que si $u$ y $v$ son elementos de $\langle X\rangle$ se tiene que $u \preceq v$ si y solo sí

- o bien $\bar{\omega}(u) < \bar{\omega}(v)$
- o bien $\bar{\omega}(u) = \bar{\omega}(v)$ y existen $w$, $u'$, $v' \in X^*$ y $a$, $b \in X$ tales que $u = wau'$, $v = wbv'$ y $a \trianglelefteq b$.

Por ejemplo, si $X = \{x, y, z\}$, $x \trianglelefteq y \trianglelefteq z$, y $\omega(x) = 3$, $\omega(y) = 2$ y $\omega(z) = 1$, entonces los monomios de longitud 3 se ordenan con respecto al orden $\omega$-*deglex* de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lllllllll} zzz, & yzz, & zyz, & zzy, & xzz, & yyz, & yzy, & zxz, & zyy, \\ zzx, & xyz, & xzy, & yxz, & yyy, & yzx, & zxy, & zyx, & xxz, \\ xyy, & xzx, & yxy, & yyx, & zxx, & xxy, & xyx, & yxx, & xxx. \end{array}$$

**3.5.** De manera similar, si $n \geq 1$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto con $n$ elementos distintos y $\trianglelefteq$ es un orden total sobre $X$, el ***orden graduado-lexicográfico inverso*** u ***orden degrevlex*** asociado a $\trianglelefteq$ es el orden $\preceq$ sobre $X^*$ tal que si $u$ y $v$ son dos elementos de $X^*$ se tiene que $u \preceq v$ si y sólo sí

- o bien $|u| < |v|$
- o bien $|u| = |v|$ y existen $w$, $u'$, $v' \in X^*$ y $a$, $b \in X$ tales que $u = u'aw$, $v = v'bw$ y $b \trianglelefteq a$.

Así, es $u \preceq v$ si o bien $u$ es estríctamente más corto que $v$ o bien tiene la misma longitud y la *última* letra en la que $u$ difiere de $v$ es *mayor* o igual que la correspondiente letra de $v$ con respecto al orden de $X$.

Por ejemplo, si $X = \{x, y, z\}$ y $x \trianglelefteq y \trianglelefteq z$, entonces los monomios de longitud 3 se ordenan con respecto al orden *deglex* de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lllllllll} zzz, & yzz, & xzz, & zyz, & yyz, & xyz, & zxz, & yxz, & xxz \\ zzy, & yzy, & xzy, & zyy, & yyy, & xyy, & zxy, & yxy, & xxy \\ zzx, & yzx, & xzx, & zyx, & yyx, & xyx, & zxx, & yxx, & xxx. \end{array}$$

**3.6.** Supongamos que $X = \{x, y\}$. A cada palabra $u = u_1 \cdots u_n \in \langle X\rangle$ de longitud $n \geq 0$ le asignamos la poligonal en el plano con vértices $v_0$, …, $v_n$ tales que $v_0 = (0, 0)$ y {p:areas}

$$v_i = \begin{cases} v_{i-1} + (1, 0), & \text{si } u_i = x, \\ v_{i-1} + (0, 1), & \text{si } u_i = y, \end{cases}$$

Escribimos $\eta(u)$ a la altura del punto más alto de la curva y $\alpha(u)$ al area que delimita junto con

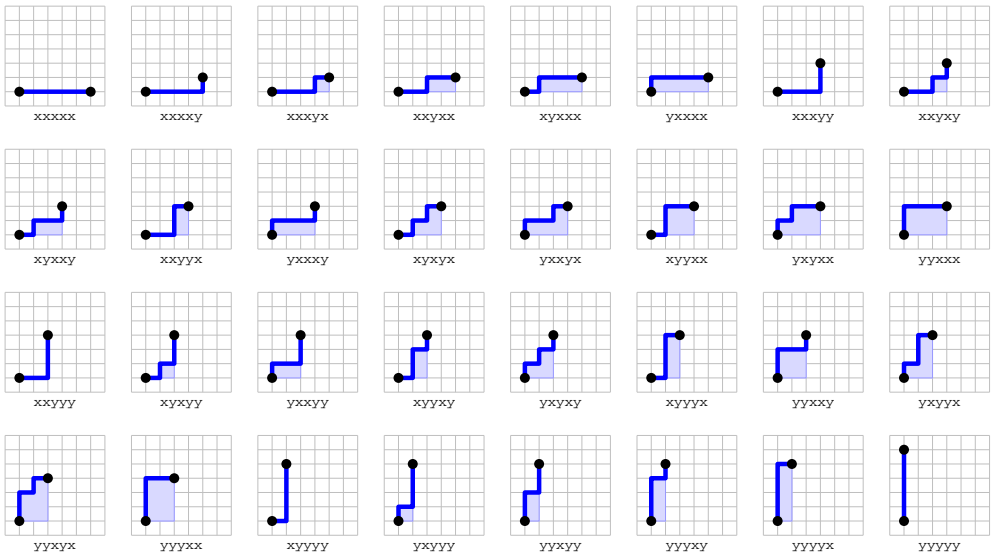
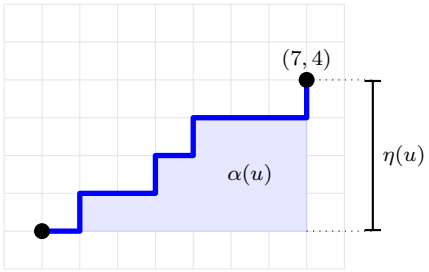



**Figura 1.** Las 32 palabras de longitud 5 sobre $X = \{x, y\}$ ordenadas de acuerdo al orden monomial del ejemplo **3.6**.

{fig:areas}

el eje de abcisas. Por ejemplo, a la palabra $u = xyxxyxyxxxy$ le corresponde la poligonal




y es $\eta(u) = 4$ y $\alpha(u) = 13$.

Hay un orden monomial en $\langle X \rangle$ para el cual si $u$, $v \in \langle X \rangle$ se tiene $u \preceq v$ sii

- $|u| < |v|$,
- o $|u| = |v|$ y $\eta(u) < \eta(v)$,
- o $|u| = |v|$, $\eta(u) = \eta(v)$ y $\alpha(u) = \alpha(v)$.

En la Figura 1 están dibujadas las poligonales correspondientes a todas las palabras de longitud 5 ordenadas de acuerdo a este orden.

{1@xv}

## La condición de cadena descendente

**3.7.** Decimos que un conjunto ordenado $P$ satisface la ***condición de cadena descendente*** si no existe ninguna sucesión $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $p_i \gneq p_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, $P$ satisface la condición de cadena descendente si cada vez que $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión descendente en $P$, de manera que $p_i \succeq p_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_i = p_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$ —es decir, si toda sucesión en $P$ no creciente a la larga se estabiliza.

Por otro lado, decimos que un conjunto *totalmente* ordenado $P$ está ***bien ordenado*** si todo subconjunto no vacío de $P$ tiene un mínimo. El ejemplo fundamental de conjunto bien ordenado es $\mathbb{N}$, cuando está dotado de su orden usual.

**3.8.** Cuando el conjunto está bien ordenado, estos dos conceptos coinciden:

**Lema.** *Un conjunto totalmente ordenado está bien ordenado si y solamente si satisface la condición de cadena descendente.*

*Demostración.* Sea $P$ un conjunto totalmente ordenado. Si existe una sucesión estrictamente decreciente $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $P$, es claro que el conjunto $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ no tiene mínimo: esto muestra que la condición del enunciado es necesaria. Recíprocamente, supongamos que $Q \subseteq P$ es un subconjunto no vacío que no tiene mínimo. Sea $p_1 \in Q$ un elemento arbitrario. Como $Q$ no tiene mínimo, $p_1$ no es el mínimo de $Q$ y, entonces, existe $p_2 \in Q$ tal que o bien $p_1$ y $p_2$ no son comparables o bien $p_2 \lneq p_1$ y, como $P$ está totalmente ordenado, la primera posibilidad no puede ocurrir. De la misma forma, $p_2$ no es un mínimo de $Q$, así que existe $p_3 \in Q$ tal que $p_3 \lneq p_2$ y, continuando de esta forma, podemos construir una sucesión $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $P$ que es estrictamente decreciente. □

**3.9.** Necesitaremos el siguiente lema en la prueba del Teorema **3.10**. {lema:subsec}

**Lema.** *Si $P$ es un conjunto bien ordenado, entonces toda sucesión de elementos de $P$ posee una subsucesión no decreciente.*

*Demostración.* Consideremos una sucesión $(p_i)_{i\geq 1}$ en $P$. Construimos una sucesión $(\mu_i)_{i\geq 1}$ de elementos de $P$ y otra $(j_i)_{i\geq 1}$ de enteros positivos de forma inductiva, empezando con $\mu_1 = \mathsf{min}\{p_i : i \geq 1\}$ y $j_1 = \mathsf{min}\{i \in \mathbb{N} : p_i = \mu_1\}$. Si $k \geq 1$ y ya construimos $\mu_k$ y $j_k$, entonces ponemos $\mu_{k+1} = \mathsf{min}\{p_i : i > j_k\}$ y $j_{k+1} = \mathsf{min}\{i : i > j_k, p_i = \mu_{k+1}\}$.

Es claro de la construcción que $j_k < j_{k+1}$ para todo $k \geq 1$ y que $p_{j_1} = \mu_1 \preceq p_{j_2}$, y si $k \geq 2$, entonces

$$p_{j_k} = \mu_k = \mathsf{min}\{p_i : i > j_{k-1}\} \preceq \mathsf{min}\{p_i : i > j_k\} = \mu_{k+1} = p_{j_{k+1}}.$$

Esto muestra que $(p_{j_k})_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $(p_i)_{i\geq 1}$ que es no decreciente. □ {teo:dos}

**3.10. Teorema.** *Si $X = \{x, y\}$ tiene dos elementos, entonces todo orden monomial sobre $X^*$ satisface la condición de cadena descendente.*

*Demostración.* Supongamos que hay una sucesión de monomios $(w_i)_{i\geq 1}$ en $X^*$ que es estrictamente decreciente para el orden $\preceq$. Como la sucesión $(xw_i)_{i\geq 1}$ tiene entonces la misma propiedad, podemos suponer, de hecho, que todos los monomios $w_i$ empiezan con la letra $x$.

Si $w \in X^*$ es un monomio, sea $\phi(w)$ la cantidad de veces que $xy$ aparece en $w$, esto es,

$$\phi(w) = \#\{(u, v) \in X^* \times X^* : w = uxyv\}$$

Supongamos que la sucesión $(\phi(w_i))_{i\geq 1}$ de enteros no es acotada. Si $l = |w_1|$, existe $t \geq 1$ tal que $\phi(w_t) > l$, y entonces hay monomios $\alpha_0, \ldots, \alpha_l \in X^*$ tales que

$$w_t = \alpha_0 xy\alpha_1 xy\alpha_2 \cdots xy\alpha_l.$$

Si $w = a_1 \cdots a_l$ con $a_1, \ldots, a_l \in X$, entonces es $a_i \preceq xy\alpha_i$ para cada $i \in [\![l]\!]$, porque $a_i$ es un factor de $xy\alpha_i$, y se sigue de esto que

$$w_1 = a_1 \cdots a_l \preceq xy\alpha_1 \cdots xy\alpha_l \preceq w_t.$$

Esto es absurdo, porque $w_1 \gneq w_t$.

Vemos así que la sucesión $(\phi(w_i))_{i\geq 1}$ es acotada. Es claro que existe entonces $s \in \mathbb{N}_0$ tal que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : \phi(w_i) = s\}$ es infinito y, a menos de reemplazar a la sucesión $(w_i)_{i\geq 1}$ por una de sus subsucesiones, podemos asumir que, de hecho, $\phi(w_i) = s$ para todo $i \geq 1$.

Si fuese $s = 0$, tendríamos que para cada $i \geq 1$ existe $n_i \in \mathbb{N}_0$ con $w_i = x^{n_i}$ y, como

$$x^{n_i} = w_i \gneq w_{i+1} = x^{x_{i+1}},$$

que $n_i > n_{i+1}$. Esto es imposible y debe ser, en consecuencia, $s > 0$. Se sigue de esto que para cada $i \geq 0$ hay enteros positivos $m_{i,1}, \ldots, m_{i,2s}$ tales que

$$w_i = x^{m_{i,1}} y^{m_{i,2}} x^{m_{i,3}} y^{m_{i,4}} \cdots x^{m_{i,2s-1}} y^{m_{i,2s}}.$$

De acuerdo al Lema **3.9**, existe una subsucesión de la sucesión $(m_{i,1})_{i\geq 1}$ que es no decreciente. Reemplazando a la sucesión $(w_i)_{i\geq 1}$ por una de sus subsucesiones, entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que, de hecho, $m_{i,1} \leq m_{i+1,1}$ para todo $i \geq 1$. Hecho esto, otra vez usando aquel lema vemos que existe una subsucesión de $(m_{i,2})_{i\geq 1}$ que es no decreciente y que, en consecuencia, podemos suponer que $m_{i,2} \leq m_{i+1,2}$ para todo $i \geq 1$.

Continuando de esta forma, concluimos que podemos suponer, de hecho, que $m_{i,j} \leq m_{i+1,j}$ para todo $i \geq 1$ y todo $j \in [\![2s]\!]$. En particular, tenemos que $x^{m_{1,2j-1}} \preceq x^{m_{2,2j-1}}$ e $y^{m_{1,2j}} \preceq y^{m_{2,2j}}$ para cada $j \in [\![s]\!]$ y, en consecuencia, que

$$\begin{aligned} w_1 &= x^{m_{1,1}} y^{m_{1,2}} x^{m_{1,3}} y^{m_{1,4}} \cdots x^{m_{1,2s-1}} y^{m_{1,2s}} \\ &\preceq x^{m_{2,1}} y^{m_{2,2}} x^{m_{2,3}} y^{m_{2,4}} \cdots x^{m_{2,2s-1}} y^{m_{2,2s}} = w_2. \end{aligned}$$

Esto es absurdo, ya que $w_1 \gneq w_2$ por hipótesis. Esta contradicción muestra que no puede ocurrir que la sucesión $(\phi(w_i))_{i\geq 1}$ sea acotada, y completa la prueba del teorema. □

**3.11. Teorema.** *Todo orden monomial total en un monoide libre es un buen orden.*

*Demostración.* To be done □

**3.12.** Todo orden en un conjunto puede refinarse a un orden total,

## §4. Sistemas de reescritura

**4.1.** Fijemos un conjunto $X$ y un anillo conmutativo $\Bbbk$.

**4.2.** Si $u \in \langle X\rangle$, hay una única función $\Bbbk$-lineal $\mathsf{cf}_u : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk$ tal que $\mathsf{cf}_u(u) = 1$ y $\mathsf{cf}_u(v) = 0$ para todo $v \in \langle X\rangle$ distinto de $u$. Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$, llamamos a $\mathsf{cf}_u(a)$ el ***coeficiente de*** $u$ ***en*** $a$, decimos que $u$ ***aparece en*** $a$ si $\mathsf{cf}_u(a) \neq 0$ y, en ese caso, que el elemento $\mathsf{cf}_u(a)u$ de $\Bbbk\langle X\rangle$ es un ***término*** de $a$. Se sigue inmediatamente del hecho de que $\langle X\rangle$ es una base de $\Bbbk\langle X\rangle$ que si $a \in A$, entonces hay un numero finito de palabras de $\langle X\rangle$ que aparecen en $a$, que $a$ tiene entonces un numero finito de términos y que, de hecho, es igual a la suma de éstos.

**4.3.** Llamamos a los elementos de $\langle X\rangle \times \Bbbk\langle X\rangle$ ***reglas***. Si $\sigma \in \langle X\rangle \times \Bbbk\langle X\rangle$, escribimos $w_\sigma$ y $f_\sigma$ a las componentes de $\sigma$, de manera que $\sigma = (w_\sigma, f_\sigma)$ y, cuando sea conveniente, escribimos a $\sigma$ en la forma $w_\sigma \rightsquigarrow f_\sigma$. Una ***reducción básica*** es una terna ordenada $r = (u, \sigma, v)$ en la que $u$ y $v$ son palabras y $\sigma$ es una regla; si queremos poner de manifiesto a la segunda componente de $r$ decimos que está ***asociada a*** $\sigma$. Escribimos $\mathscr{R}$ al conjunto de todas las reducciones básicas y llamamos ***reducciones*** a los elementos del monoide libre $\langle\mathscr{R}\rangle$ generado por $\mathscr{R}$.

Si $r = (u, \sigma, v) \in \mathscr{R}$, hay una función $\Bbbk$-lineal $\hat{r} : \Bbbk\langle X\rangle \to \Bbbk\langle X\rangle$ tal que para cada $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es

$$\hat{r}(a) = a - \mathsf{cf}_{uw_\sigma v}(a)u(w_\sigma - f_\sigma)v. \tag{7}$$ {eq:hatr}

Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es tal que $\hat{r}(a) = a$, decimos que $r$ ***actúa trivialmente*** sobre $a$. Es $\hat{r} = \mathsf{id}_{\Bbbk\langle X\rangle}$ si y solamente si $w_\sigma = f_\sigma$. En efecto si vale la condición es claro de (7) que $\hat{r}$ is la función identidad y, recíprocamente, si $w_\sigma \neq f_\sigma$, entonces $uw_\sigma v - \hat{r}(uw_\sigma v) = u(w_\sigma - f_\sigma)v \neq 0$, ya que ni $u$ ni $v$ son divisores de cero en $\Bbbk\langle X\rangle$, de acuerdo a la Proposición **2.3**.

Si vemos a $\mathsf{End}_\Bbbk(\Bbbk\langle X\rangle)$ como un monoide con la composición como operación, la Proposición **1.6** nos dice que existe un único morfismo de monoides $\langle\mathscr{R}\rangle \to \mathsf{End}_\Bbbk(\Bbbk\langle X\rangle)$ que extiende a la función $r \in \mathscr{R} \mapsto \hat{r} \in \mathsf{End}_\Bbbk(\Bbbk\langle X\rangle)$. Escribiremos $\hat{r}$ a la imagen de un elemento arbitrario $r$ de $\langle X\rangle$ por ese morfismo, extendiendo la notación usada para reducciones básicas. Es claro que si $r = r_n \cdots r_1$ es una reducción con $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{R}$, entonces $\hat{r} = \hat{r}_n \circ \cdots \circ \hat{r}_1$.

**4.4.** Un ***sistema de reescritura*** es un subconjunto $\Sigma \subseteq \langle X\rangle \times \Bbbk\langle X\rangle$ tal que

*para todo* $\sigma \in \Sigma$ *es* $w_\sigma \neq f_\sigma$.

Escribimos $\mathscr{R}_\Sigma$ al conjunto de reducciones básicas asociadas a las reglas de $\Sigma$, a las que llamamos simplemente ***reducciones básicas de*** $\Sigma$, y los elementos del submonoide $\langle\mathscr{R}_\Sigma\rangle$ de $\langle\mathscr{R}\rangle$ son las ***reducciones de*** $\Sigma$.

A $\Sigma$ asociamos el ideal bilátero $I_\Sigma$ de $\Bbbk\langle X\rangle$ generado por el conjunto $S_\Sigma = \{w_\sigma - f_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ y el álgebra $A_\Sigma = \Bbbk\langle X\rangle/I_\Sigma$. Si $\phi : \Bbbk\langle X\rangle \to A$ es la proyección canónica, entonces $(X, S_\Sigma, \phi)$ es una presentación del álgebra $A_\Sigma$.

**4.5.** Un elemento $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es ***irreducible*** con respecto a $\Sigma$ si $\hat{r}(a) = a$ para todo $r \in \mathscr{R}_\Sigma$ y en ese caso, por supuesto, tenemos más generalmente que $\hat{r}(a) = a$ para toda reducción $r$ de $\Sigma$. {prop:sigma:irr}

**Proposición.** *Un elemento de $\Bbbk\langle X\rangle$ es irreducible si y solamente si no aparece en él ningún monomio de $\langle X\rangle$ que tiene un factor de la forma $w_\sigma$ con $\sigma \in \Sigma$. El subconjunto $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{irr}}$ de $\Bbbk\langle X\rangle$ de los elemento irreducibles es un $\Bbbk$-submódulo.*

*Demostración.* Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$, la ecuación (7) deja en claro que $a$ es irreducible sii $\mathsf{cf}_{uw_\sigma v}(a) = 0$ para toda reducción básica $(u, \sigma, v)$, esto es, si no aparece en $a$ ningún monomio de la forma $uw_\sigma v$ con $\sigma \in \Sigma$, como afirma la proposición. Es $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{irr}} = \bigcap_{r\in\mathscr{R}_\Sigma} \mathsf{ker}(\hat{r} - \mathsf{id}_{\Bbbk\langle X\rangle})$ y para cada $r \in \mathscr{R}_\Sigma$ la función $\hat{r} - \mathsf{id}_{\Bbbk\langle X\rangle}$ es $\Bbbk$-lineal, así que $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{irr}}$ es un $\Bbbk$-submódulo de $\Bbbk\langle X\rangle$. □

elemento $a$ es ***de reducción finita con respecto a $\Sigma$*** si cada vez que $(r_i)_{i\geq 1}$ es una sucesión de reducciones de $\Sigma$ existe $i_0 \geq 1$ tal que para todo $i > i_0$ la reducción $r_i$ actúa trivialmente sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(a)$. Notemos que si $i_0$ tiene esta propiedad, cualquier entero más grande también la tiene; por otro lado, para que $a$ sea de reducción finita es suficiente que la condición se cumpla para sucesiones de reducciones básicas.

{prop:sigma:fin}

**Proposición.** *El conjunto $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{fin}}$ de los elementos de reducción finita de $\Bbbk\langle X\rangle$ es un $\Bbbk$-submódulo. Si $r$ es una reducción, entonces $\hat{r}(\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{fin}}) \subseteq \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{fin}}$.*

*Demostración.* Sean $a, b \in \Bbbk\langle X\rangle$ dos elementos de reducción finita y sea $\lambda \in \Bbbk$. Sea $(r_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de reducciones de $\Sigma$. Por hipótesis, existe $i_0 \geq 1$ tal que para cada $i > i_0$ la reducción $r_i$ actúa trivialmente tanto sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(a)$ como sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(b)$ y entonces también actúa trivialmente sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(a + \lambda b)$. Esto muestra que $a + \lambda b$ es de reducción finita.

Sean ahora $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ un elemento de reducción finita y $r$ una reducción. Sea $(r_i)_{i\geq 1}$ es una sucesión de reducciones y consideremos la nueva sucesión $(s_i)_{i\geq 1}$ con $s_1 = r$ y $s_i = r_{i-1}$ para cada $i \geq 1$. Como $a$ es de reducción finita, existe $i_0 \geq 1$ tal que para cada $i > i_0$ la reducción $s_i$ actúa trivialmente sobre $(s_{i-1}\cdots s_1)\hat{}(a)$ y podemos suponer, de hecho, que $i_0 > 1$. Esto significa, ni más ni menos, que para cada $i > i_0 - 1$ la reducción $r_i$ actúa trivialmente sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(\hat{r}(a))$. Vemos de esta forma que $\hat{r}(a)$ es de reducción finita. □

**4.6.** Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ y $r$ es una reducción de $\Sigma$, decimos que $r$ es ***final para $a$*** si $\hat{r}(a)$ es irreducible.

**Proposición.** *Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es de reducción finita, entonces existe una reducción $r$ que es final para $a$.*

*Demostración.* Consideremos el conjunto $W$ de todas las sucesiones finitas de reducciones $(r_i)_{1\leq i\leq n}$ de longitud $n \geq 0$ tales que para cada $i \in [\![n]\!]$ la reducción $r_i$ actúa no trivialmente sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(a)$. Definimos un orden $\preceq$ sobre $W$: si $\rho = (r_i)_{1\leq i\leq n}$ y $\sigma = (s_i)_{1\leq i\leq m}$ son dos elementos de $W$, ponemos $\rho \preceq \sigma$ si y solamente si $n \leq m$ y $r_i = s_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$; es inmediato verificar que de esta forma obtenemos en efecto una relación de orden.

Afirmamos que hay en $W$ elementos maximales. Si no fuese ése el caso, existiría una sucesión $(\rho_j)_{j\geq 1}$ de elementos de $W$ con $\rho_j \precneqq \rho_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Si $\rho_j = (r_{j,i})_{1\leq i\leq n_j}$ para cada $j \geq 1$, entonces tenemos que $n_j < n_{j+1}$ para todo $j \geq 1$, de manera que, de hecho, $n_j \geq j$ cualquiera sea $j$. Pongamos $s_i = r_{i,i}$ para cada $i \geq 1$ y consideremos la sucesión $(s_i)_{i\geq 1}$; se tiene que $s_i = r_{j,i}$ siempre que $1 \leq i \leq j$. Si $i \geq 1$, entonces $s_i = r_{i,i}$ actúa no trivialmente sobre $(s_{i-1}\cdots s_1)\hat{}(a) = (r_{i-1,i-1}\cdots r_{1,1})\hat{}(a) = (r_{i,i-1}\cdots r_{i,1})\hat{}(a)$ porque $\rho_i \in W$. Esto es imposible, ya que $a$ es de reducción finita.

Sea, entonces, $\rho = (r_i)_{1\leq i\leq n}$ un elemento maximal de $W$ y consideremos la reducción $r = r_n \cdots r_1$. El elemento $\hat{r}(a)$ es irreducible: si no lo fuera, existiría una reduccción $r_{n+1}$ de $\Sigma$ que actúa no trivialmente sobre $\hat{r}(a)$ y, entonces, la secuencia $\rho' = (r_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sería un elemento de $W$. Como $\rho \precnsim \rho'$, esto es absurdo. Vemos así que $r$ es una reducción final para $a$. □

**4.7.** Un elemento $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es ***de reducción única*** si es de reducción finita y existe $r_\Sigma(a) \in \Bbbk\langle X\rangle$ tal que para cada reducción $r \in \langle\mathscr{R}_\Sigma\rangle$ que es final para $a$ es $\hat{r}(a) = r_\Sigma(a)$. Notemos que como $a$ es de reducción finita, entonces existen efectivamente reducciones que son finales para $a$, y en consecuencia el elemento $r_\Sigma(a)$ está unívocamente determinado por $a$. Si escribimos $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}}$ al conjunto de los elementos de reducción única, obtenemos de esta forma una función $r_\Sigma : \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}} \to \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{irr}}$.

**4.8.** Una propiedad fundamental de los elementos de reducción única es la siguiente:

**Proposición.** *Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es de reducción única y $r$ es una reducción, entonces existe una reducción $r'$ tal que $\hat{r}'(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$. El elemento $\hat{r}(a)$ es de reducción única y $r_\Sigma(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$.*

*Demostración.* Construimos una sucesión de reducciones básicas $(r_i)_{i\geq 1}$ inductivamente, empezando con $r_1 = r$.Si $i \geq 1$ y ya elegimos las reducciones $r_1, \ldots, r_i$, entonces o bien el elemento $b = (r_i \cdots r_1)\hat{}\,(a)$ es irreducible o no: en el primer caso, elegimos $r_{i+1}$ en $\mathscr{R}_\Sigma$ arbitrariamente, y en el segundo elegimos $r_{i+1} \in \mathscr{R}_\Sigma$ de manera que $\hat{r}_{i+1}(b) \neq b$. Como $a$ es de reducción finita, existe $i_0 \geq 1$ tal que para cada $i > i_0$ la reducción $r_i$ actúa trivialmente sobre $(r_{i-1} \cdots r_1)\hat{}\,(a)$. La forma en que construmos la sucesión $(r_i)_{i\geq 1}$ implica entonces que si ponemos $r' = r_{i_0} \cdots r_2$, se tiene que $\hat{r}'(\hat{r}(a)) = (r_{i_0} \cdots r_1)\hat{}\,(a)$ es irreducible, de manera que la reducción $r'r$ es final para $a$. Como $a$ es de reducción única, vemos entonces que $\hat{r}'(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$.

De la Proposición 4.5 sabemos que $\hat{r}(a)$ es de reducción finita. Si $s$ es una reducción final para $\hat{r}(a)$, entonces la parte del lema que ya probamos nos dice que existe una reducción $t$ tal que $\hat{t}(\hat{s}(\hat{r}(a))) = \hat{t}((sr)\hat{}\,(a)) = r_\Sigma(a)$. Como $s$ es final para $\hat{r}(a)$, el elemento $\hat{s}(\hat{r}(a))$ es irreducible, y entonces $t$ actúa trivialmente sobre él: esto nos dice que, de hecho, $\hat{s}(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$. El lado derecho de esta última igualdad no depende de $r$, así que $\hat{r}(a)$ es de reducción única y $r_\Sigma(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$. Esto completa la prueba de la proposición. □

**4.9.** Un corolario inmediato de esta proposición es el siguiente resultado que nos permite reconocer la forma final de un elemento de reducción finita.

**Corolario.** *Si $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ es de reducción única y $r$ es una reducción tal que $\hat{r}(a)$ es irreducible, entonces $r_\Sigma(a) = \hat{r}(a)$.*

*Demostración.* En efecto, en ese caso la reducción $r'$ cuya existencia afirma la proposición actúa trivialmente sobre $\hat{r}(a)$ y, en consecuencua, $\hat{r}(a) = r_\Sigma(a)$. □

{prop:sigma:unique}

**4.10. Proposición.** *$\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}}$ es un $\Bbbk$-submódulo de $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{fin}}$ y la función $r_\Sigma : \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}} \to \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{irr}}$ es $\Bbbk$-lineal. Si $r$ es una reducción, entonces $\hat{r}(\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}}) \subseteq \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}}$.*

*Demostración.* Sean $a$ y $b$ dos elementos de $\Bbbk\langle X\rangle$ de reducción única y sea $\lambda \in \Bbbk$. De acuerdo a la Proposición 4.5 el elemento $c = a + \lambda b$ es de reducción finita.

Sea $r$ una reducción final para $c$. Como $a$ es de reducción única, hay una reducción $r_1$ tal que

$\hat{r}_1(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$, y como $b$ es de reducción única, hay una reducción $r_2$ tal que $\hat{r}_2(\hat{r}_1(\hat{r}(b))) = r_\Sigma(b)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\hat{r}(c) &= \hat{r}_2(\hat{r}_1(\hat{r}(x))) && \text{porque } \hat{r}(x) \text{ es irreducible} \\
&= \hat{r}_2(\hat{r}_1(\hat{r}(a))) + \lambda \hat{r}_2(\hat{r}_1(\hat{r}(b))) \\
&= \hat{r}_2(r_\Sigma(a)) + \lambda r_\Sigma(b) \\
&= r_\Sigma(a) + \lambda r_\Sigma(b) && \text{porque } r_\Sigma(a) \text{ es irreducible.}
\end{aligned}$$

El último miembro de esta cadena de iguadades es independiente de $r$, así que $c$ es de reducción única y, de hecho, $r_\Sigma(c) = r_\Sigma(a) + \lambda r_\Sigma(b)$. Esto prueba las dos primeras afirmaciones de la proposición.

Para ver la tercera, sea $a \in \Bbbk\langle X\rangle$ un elemento de reducción única y $r$ una reducción. De la Proposición **4.5** sabemos que $\hat{r}(a)$ es de reducción finita. Si $s$ es una reducción final para $\hat{r}(a)$, entonces $\hat{s}(\hat{r}(a))$ es irreducible e igual a $(sr)\hat{}\,(a)$. Como $a$ es de reducción única, esto implica que, de hecho, $\hat{s}(\hat{r}(a)) = r_\Sigma(a)$. Así, $\hat{s}(\hat{r}(a))$ no depende de $s$ y $\hat{r}(a)$ es de reducción única. □

**4.11. Proposición.** *Sean $a$, $b$, $c \in \Bbbk\langle X\rangle$ tales que cada vez que $u$, $v$, $w \in \langle X\rangle$ son monomios que aparecen en $a$, $b$ y $c$, respectivamente, el producto $uvw$ es de reducción única. Si $r$ es una reducción de $\Sigma$, entonces $a\hat{r}(b)c$ es de reducción única y $r_\Sigma(a\hat{r}(b)c) = r_\Sigma(abc)$.*

Notemos que la hipótesis implica, de acuerdo a la Proposición **4.10**, que $abc$ es de reducción única, y entonces tiene sentido hablar de $r_\Sigma(abc)$.

*Demostración.* Sea $r$ una reducción. Si $u_1, \ldots, u_n$, que $v_1, \ldots, v_m$ y $w_1, \ldots, w_p$ son los monomios que aparecen en $a$, en $b$ y en $c$, respectivamente, de manera que $a = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{cf}_{u_i}(a)u_i$, $b = \sum_{j=1}^{m} \mathsf{cf}_{v_j}(b)v_j$ y $c = \sum_{k=1}^{p} \mathsf{cf}_{w_k}(c)w_k$, entonces

$$a\hat{r}(b)c = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m\\ 1\le k\le p}} \mathsf{cf}_{u_i}(a)\,\mathsf{cf}_{v_j}(b)\,\mathsf{cf}_{w_k}(c)\,u_i\hat{r}(v_j)w_k$$

y, como $\Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{uniq}}$ es un $\Bbbk$-submódulo, vemos que para mostrar que $a\hat{r}(b)c$ es de reducción única alcanza con mostrar que $u_i\hat{r}(v_j)w_k$ lo es cualquier sean $i \in [\![n]\!]$, $j \in [\![m]\!]$ y $k \in [\![p]\!]$. Esto significa que para probar a proposición alcanza con mostrar que es cierta en el caso particular en el que $a$, $b$ y $c$ son monomios. Pongámonos entonces en ese caso.

Supongamos que $r = r_n \cdots r_1$ con $r_1, \ldots, r_n$ reducciones básicas de $\Sigma$ y que para cada $i \in [\![n]\!]$ es $r_i = (u_i, \sigma_i, v_i)$. Podemos entonces considerar para cada $i \in [\![n]\!]$ la reducción básica $s_i = (au_i, \sigma_i, v_ic)$ y la reducción $s = s_n \cdots s_1$. Como $abc$ es de reducción única, la Proposición **4.10** nos dice que $\hat{s}(abc)$ es de reducción única y existe entonces una reducción $t$ tal que $\hat{t}(\hat{s}(abc)) = r_\Sigma(abc)$. Como $\hat{s}(abc) = a\hat{r}(b)c$, esto nos dice, por un lado, que $a\hat{r}(b)c$ es de reducción única y, por otro, que $r_\Sigma(a\hat{r}(b)c) = r_\Sigma(abc)$ ya que $\hat{t}(a\hat{r}(b)c) = \hat{t}(\hat{s}(abc)) = r_\Sigma(abc)$ y este último elemento es irreducible. □

## §5. El lema del diamante

**5.1.** Fijemos un conjunto $X$, un anillo conmutativo $\Bbbk$ y un sistema de reescritura $\Sigma \subseteq \langle X\rangle \times \Bbbk\langle X\rangle$.

**5.2.** Consideremos una 5-upla $\alpha = (\sigma, \tau, u, v, w)$ con $\sigma$, $\tau \in \Sigma$ y $u$, $v$, $w \in \langle X\rangle$. Decimos que $\alpha$ es una ***ambigüedad por solapamiento*** de $\Sigma$ si los monomios $u$, $v$ y $w$ tienen longitud positiva, $w_\sigma = uv$ y $w_\tau = vw$ y que es ***resoluble*** si existen reducciones $r$, $r'$ tales que $\hat{r}(f_\sigma w) = \hat{r}'(uf_\tau)$.

Por otro lado, la 5-upla $\alpha$ es una ***ambigüedad por inclusión*** si $\sigma \neq \tau$, $w_\sigma = v$ y $w_\tau = abc$ y en ese caso es ***resoluble*** si existen reducciones $r$ y $r'$ tales que $\hat{r}(uf_\sigma w) = \hat{r}'(f_\tau)$.

**5.3.** Sea $\preceq$ un orden monomial sobre $\langle X\rangle$. Decimos que $\preceq$ es ***compatible con*** $\Sigma$ si para cada $\sigma \in \Sigma$ y cada monomio $u$ que aparece en $f_\sigma$ tenemos que $u \precneqq w_\sigma$. Si ese es el caso, para cada monomio $w \in \langle X\rangle$ consideramos el $\Bbbk$-submódulo $I_w$ de $\Bbbk\langle X\rangle$ generado por el conjunto

$$\{u(w_\sigma - f_\sigma)v : u, v \in \langle X\rangle, \sigma \in \Sigma, uw_\sigma v \precneqq w\}$$

Si $w'$ es otro monomio y $w' \precneqq w$, es claro que $I_{w'} \subseteq I_w$.

**5.4. Proposición.** *Si existe un orden monomial $\precneqq$ en $\langle X\rangle$ compatible con $\Sigma$ y que satisface la condición de cadena descendente, entonces todo elemento de $\Bbbk\langle X\rangle$ es de reducción finita.*

*Demostración.* Sea $a \in \Bbbk\langle X\rangle$, sea $(r_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de reducciones y, para llegar a un absurdo, supongamos que para todo $i \geq 1$ la reducción $r_i$ actúa no trivialmemente sobre $(r_{i-1}\cdots r_1)\hat{}(a)$. □

**5.5.** Si $\alpha = (\sigma, \tau, u, v, w)$ es una ambigüedad de $\Sigma$, decimos que $\alpha$ es ***resoluble con respecto al orden*** $\preceq$ si $f_\sigma w - uf_\tau \in I_{uvw}$ en caso que $\alpha$ sea una ambigüedad por solapamiento y si $uf_\sigma w - f_\tau \in I_{uvw}$ en caso que $\alpha$ sea una ambigüedad por inclusión.

**Lema.** *Una ambigüedad de $\Sigma$ que es resoluble es resoluble con respecto a cualquier orden monomial compatible con $\Sigma$.*

*Demostración.* Supongamos que $u$ es un monomio y $r = (a, \sigma, c)$ una reducción básica de $\Sigma$. Si $u \neq aw_\sigma c$, entonces $\hat{r}(u) = u$; si en cambio $u = aw_\sigma c$, es $\hat{r}(u) = af_\sigma c$ y esto es un elemento de $I_u$ porque el orden $\preceq$ es compatible con $\Sigma$. En cualquier caso, entonces, tenemos que $u - \hat{r}(u) \in I_u$. □

**5.6.** Estamos por fin en condiciones de enunciar el resultado que motiva estas notas: {teo:diamante}

**Teorema.** *Sea $X$ un conjunto, $\Bbbk$ un anillo conmutativo, $\Sigma \subseteq \langle X\rangle \times \Bbbk\langle X\rangle$ un sistema de reescritura y $\preceq$ un orden monomial en $\langle X\rangle$ que es compatible con $\Sigma$ y que satisface la condición de cadena descendente. Las siguienes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Todas las ambigüedades de $\Sigma$ son resolubles.*
(b) *Todas las ambigüedades de $\Sigma$ son resolubles con respecto a $\preceq$.*
(c) *Todos los elementos de $\Bbbk\langle X\rangle$ son de reducción única con respecto a $\Sigma$.*
(d) *Se tiene que $\Bbbk\langle X\rangle = I_\Sigma \oplus \Bbbk\langle X\rangle_{\mathsf{irr}}$.*

*Demostración.* □

## §6. Ejemplos

## §7. Ejercicios

**1.** (*i*) Si $X$ e $Y$ son dos conjuntos y $\Bbbk$ un cuerpo, lás $\Bbbk$-álgebras $\Bbbk\langle X\rangle$ y $\Bbbk\langle Y\rangle$ son isomorfas si y solamente si $X$ e $Y$ tienen el mismo cardinal.

(*ii*) No toda subálgebra de un álgebra libre es libre; por ejemplo, $\Bbbk[x^2, y^3]$ es una subálgebra de $\Bbbk[x]$ que no es libre. P. Cohn dio en [Coh64] una caracterización de las subálgebras que son libres.

†(*iii*) Si $X$ es un conjunto con más de un elemento, entonces existen en $\Bbbk\langle X\rangle$ subálgebras libres de rango numerable y, entonces, subálgebras libres de todos los rangos finitos.

**2.** Muestre que los órdenes descriptos en los ejemplos de la Sección **3** son efectivamente órdenes monomiales.

### Referencias

[Coh64] P. M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 618–632. MR0167504 (29 #4777) ↑18