Un enfoque categórico del problema de los cuatro colores

María Julia Redondo

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática
UNS-CONICET

Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina
20 de septiembre de 2016

Alexandre GROTHENDIECK

RÉCOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignage sur un passé de Mathématicien

Volume I

Présentation des Thèmes
ou PRÉLUDE EN QUATRE MOUVEMENTS


Argentina
Jujuy
Salta
Formosa
Chaco
Santiago de Estero
Tucuman
Catamarca
Misiones
Corrientes
Santa Fe
La Rioja
San Juan
Cordoba
Entre Rios
San Luis
Mendoza
Buenos Aires
Buenos Aires
La Pampa
Neuquen
Rio Negro
Chubut
Santa Cruz
Tierra del Fuego, Antartida e Islas del Atlantico sur

- 1852 - Francis Guthrie plantea la conjetura.

- 1878- Arthur Cayley publica la conjetura.
- 1879 - Alfred Kempe publica la primera “demostración”, Percy Heawood encuentra un error 11 años después.
- 1880 - Peter Tait publica otra “demostración”, Julius Petersen encuentra un error 11 años después.

- 1852 - Francis Guthrie plantea la conjetura.

- 1878- Arthur Cayley publica la conjetura.
- 1879 - Alfred Kempe publica la primera "demostración", Percy Heawood encuentra un error 11 años después.
- 1880 - Peter Tait publica otra "demostración", Julius Petersen encuentra un error 11 años después.

- 1852 - Francis Guthrie plantea la conjetura.

- 1878- Arthur Cayley publica la conjetura.
- 1879 - Alfred Kempe publica la primera “demostración”, Percy Heawood encuentra un error 11 años después.
- 1880 - Peter Tait publica otra “demostración”, Julius Petersen encuentra un error 11 años después.

- 1852 - Francis Guthrie plantea la conjetura.

- 1878- Arthur Cayley publica la conjetura.
- 1879 - Alfred Kempe publica la primera "demostración", Percy Heawood encuentra un error 11 años después.
- 1880 - Peter Tait publica otra "demostración", Julius Petersen encuentra un error 11 años después.

- 1913 - George Birkhoff realiza importantes avances.
- 1922 - Philip Franklin demuestra la conjetura para mapas con a lo sumo 25 países.
- 1969 - Heinrich Heesch: configuraciones reducibles y configuraciones inevitables.
- 1976 - Kenneth Appel y Wolfgang Haken prueban la conjetura.

Un poco de historia...

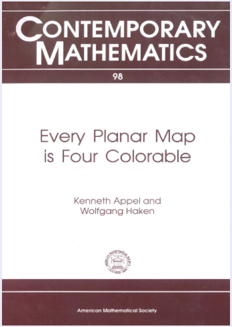
- 1913 - George Birkhoff realiza importantes avances.
- 1922 - Philip Franklin demuestra la conjetura para mapas con a lo sumo 25 países.
- 1969 - Heinrich Heesch: configuraciones reducibles y configuraciones inevitables.
- 1976 - Kenneth Appel y Wolfgang Haken prueban la conjetura.

- 1913 - George Birkhoff realiza importantes avances.
- 1922 - Philip Franklin demuestra la conjetura para mapas con a lo sumo 25 países.
- 1969 - Heinrich Heesch: configuraciones reducibles y configuraciones inevitables.
- 1976 - Kenneth Appel y Wolfgang Haken prueban la conjetura.

- 1913 - George Birkhoff realiza importantes avances.
- 1922 - Philip Franklin demuestra la conjetura para mapas con a lo sumo 25 países.
- 1969 - Heinrich Heesch: configuraciones reducibles y configuraciones inevitables.
- 1976 - Kenneth Appel y Wolfgang Haken prueban la conjetura.

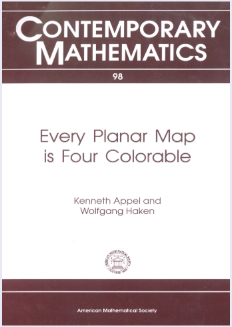

FOUR COLORS
SUFFICE
URBANA
DEC 28 '94
ILL.
U.S. POSTAGE
.00

- Ulrich Schmidt encuentra un “error” en la demostración de Appel y Haken.
- 1989 - Appel, Haken:



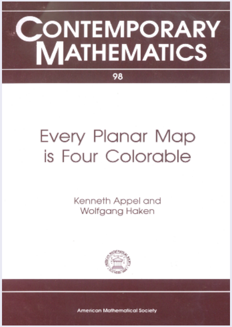
- 1997 - Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas: simplifican la demostración de Appel y Haken.
- 2005 - Georges Gonthier y Benjamin Werner: A computer-checked proof of the Four Colour Theorem.

- Ulrich Schmidt encuentra un “error” en la demostración de Appel y Haken.
- 1989 - Appel, Haken:



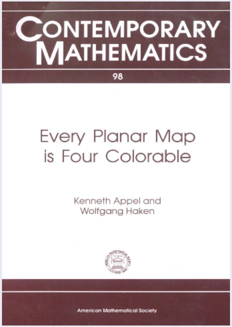
- 1997 - Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas: simplifican la demostración de Appel y Haken.
- 2005 - Georges Gonthier y Benjamin Werner: A computer-checked proof of the Four Colour Theorem.

- Ulrich Schmidt encuentra un “error” en la demostración de Appel y Haken.
- 1989 - Appel, Haken:



- 1997 - Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas: simplifican la demostración de Appel y Haken.
- 2005 - Georges Gonthier y Benjamin Werner: A computer-checked proof of the Four Colour Theorem.

- Ulrich Schmidt encuentra un "error" en la demostración de Appel y Haken.
- 1989 - Appel, Haken:



- 1997 - Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas: simplifican la demostración de Appel y Haken.
- 2005 - Georges Gonthier y Benjamin Werner: A computer-checked proof of the Four Colour Theorem.

Thomas L. Saaty.
Thirteen colorful variations on Guthrie's four-color conjecture.
Amer. Math. Monthly, 79:2–43, 1972.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Base canónica: $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Base canónica: $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

$$(e_1 \wedge e_1) \wedge e_3 \neq e_1 \wedge (e_1 \wedge e_3)$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Base canónica: $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

$$(e_1 \wedge e_1) \wedge e_3 \neq e_1 \wedge (e_1 \wedge e_3)$$

$$(e_1 \wedge e_3) \wedge e_1 = e_1 \wedge (e_3 \wedge e_1)$$

Formulaciones equivalentes

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Base canónica: $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

$$(e_1 \wedge e_1) \wedge e_3 \neq e_1 \wedge (e_1 \wedge e_3)$$

$$(e_1 \wedge e_3) \wedge e_1 = e_1 \wedge (e_3 \wedge e_1)$$

Teorema (Kauffman, 1990):

Dadas dos asociaciones de la expresión $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$ existe una elección de los vectores $v_i \in \{e_1, e_2, e_3\}$ para la cual las dos asociaciones son iguales y no nulas.

Definición 1

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente nulos. Se llama **máximo común divisor** de a y b al mayor de los divisores comunes de a y de b.

DEFINICIÓN 1

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente nulos. Se llama **máximo común divisor** de a y b al mayor de los divisores comunes de a y de b.

DEFINICIÓN 2

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente nulos. Un número natural d se dice **máximo común divisor** de a y b si verifica

1. d/a y d/b;
2. si d'/a y d'/b entonces d'/d.

DEFINICIÓN 1

Dados dos conjuntos A y B se llama **intersección** de A y B al conjunto de elementos comunes a A y a B.

DEFINICIÓN 1

Dados dos conjuntos A y B se llama **intersección** de A y B al conjunto de elementos comunes a A y a B.

DEFINICIÓN 2

Dados dos conjuntos A y B, un conjunto D se dice **intersección** de A y B si verifica

1. $D \subseteq A$ y $D \subseteq B$;
2. si $D' \subseteq A$ y $D' \subseteq B$ entonces $D' \subseteq D$.

EJEMPLOS 1 y 2:

$d = (a, b)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \color{red}{d} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

EJEMPLOS 1 Y 2:

$d = (a, b)$

$$
\begin{tikzcd}
 & {\color{blue} d'} \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & {\color{red} d} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

EJEMPLOS 1 Y 2:

$d = (a, b)$

$$
\begin{tikzcd}
 & {\color{blue}d'} \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & {\color{red}d} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

EJEMPLOS 1 Y 2:

$d = (a, b)$

$$\begin{tikzcd} & d' \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ & d \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

$D = A \cap B$

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Ejemplos 1 y 2:

$d = (a, b)$

$$
\begin{tikzcd}
 & d' \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & d \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

$D = A \cap B$

$$
\begin{tikzcd}
 & D' \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

EJEMPLOS 1 Y 2:

$d = (a, b)$

$$
\begin{tikzcd}
 & {\color{blue} d'} \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & {\color{red} d} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

$D = A \cap B$

$$
\begin{tikzcd}
 & {\color{blue} D'} \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & {\color{red} D} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

$$((a, b), c) = (a, (b, c)) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Definición 1

$$e^x := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

Ejemplo 3: la función exponencial

Definición 1

$$e^x := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

Definición 2

e^x es solución de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$ con condición inicial $f(0) = 1$.

Definición 1

$$e^x := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$$

Definición 2

e^x es solución de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$ con condición inicial $f(0) = 1$.

Proposición:

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

Definición 1

$$e^x := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

Definición 2

e^x es solución de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$ con condición inicial $f(0) = 1$.

Proposición:

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

Demostración:
e^{x+y} y $e^x e^y$ son soluciones de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$ con condición inicial $f(0) = e^y$, y esta solución es única.

$\int_0^1$ es la única funcional lineal acotada definida en $L^1[0,1]$ que satisface

- $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\{\int_0^1 f(\frac{x}{2})dx + \int_0^1 f(\frac{x+1}{2})dx\}$,
- $\int_0^1 1dx = 1$.

Tom Leinster
The categorical origins of Lebesgue integration
Category Theory 2014, Cambridge, 29 June – 5 July 2014

Definición 1.

Una función $f : A \to B$ se dice **sobreyectiva** si $\mathrm{Im}\, f = B$.

Definición 1.

Una función $f : A \to B$ se dice **sobreyectiva** si $\operatorname{Im} f = B$.

Definición 2.

Una función $f : A \to B$ se dice un **epimorfismo** si para todo par de funciones $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ se tiene que $g = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \end{tikzcd}, \quad g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

$\boxed{f : A \to B \text{ es sobreyectiva}}$ $\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \end{tikzcd}, \quad g \circ f = h \circ f}$

$\boxed{f : A \to B \text{ es sobreyectiva}}$ $\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \end{tikzcd} ,\ g \circ f = h \circ f}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{g (b)} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \text{h(b)}}$$

$\boxed{f : A \to B \text{ es sobreyectiva}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \end{tikzcd} , \quad g \circ f = h \circ f$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathrm{g}\ (\mathrm{b}) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{a})) \qquad \mathrm{h}(\mathrm{f}(\mathrm{a})) = \mathrm{h}(\mathrm{b})}$$

Función sobreyectiva $\Longrightarrow$ Epimorfismo

$\boxed{f : A \to B \text{ es sobreyectiva}}$
$\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \end{tikzcd}, \quad g \circ f = h \circ f}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathsf{g}\ (\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \ = \ \mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) = \mathsf{h}(\mathsf{b})}$$

Epimorfismo $\Longrightarrow$ Función sobreyectiva

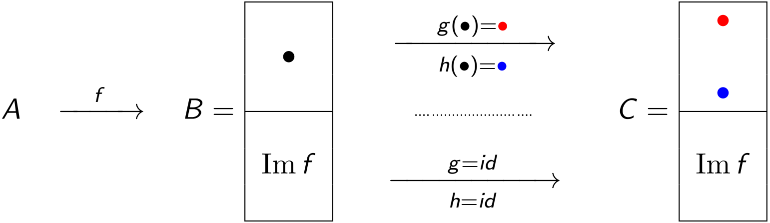
$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$

$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$

Buscamos $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ y $g \neq h$.

$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$

Buscamos $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ y $g \neq h$.

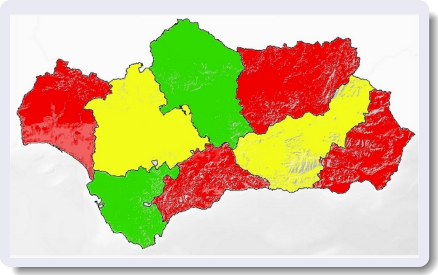


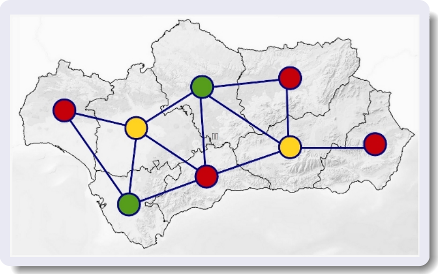
- "epimorfismo" = "morfismo sobreyectivo" en
  - conjuntos y funciones,
  - espacios vectoriales y transformaciones lineales,
  - grupos y morfismos de grupos,
  - espacios topológicos y funciones continuas,

- "epimorfismo" = "morfismo sobreyectivo" en
  - conjuntos y funciones,
  - espacios vectoriales y transformaciones lineales,
  - grupos y morfismos de grupos,
  - espacios topológicos y funciones continuas,
- el morfismo de anillos $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un epimorfismo no sobreyectivo;

Epimorfismo $\not\Rightarrow$ Morfismo sobreyectivo

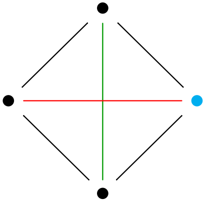
- "epimorfismo" $=$ "morfismo sobreyectivo" en
  - conjuntos y funciones,
  - espacios vectoriales y transformaciones lineales,
  - grupos y morfismos de grupos,
  - espacios topológicos y funciones continuas,
- el morfismo de anillos $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un epimorfismo no sobreyectivo;
- la función continua de espacios de Hausdorff $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ es un epimorfismo no sobreyectivo.

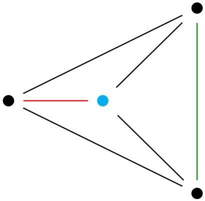




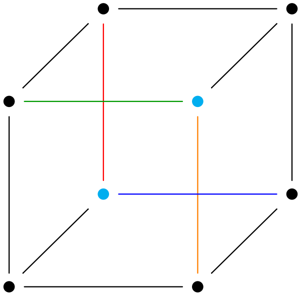
Mapa	Grafo planar G
Países - Capitales	Vértices $V(G)$
Par de países limítrofes	Arista $A(G)$

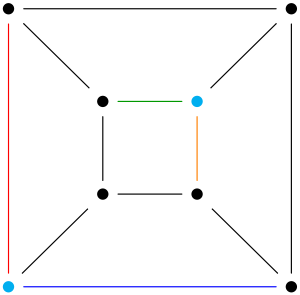
Grafo planar





Grafo planar

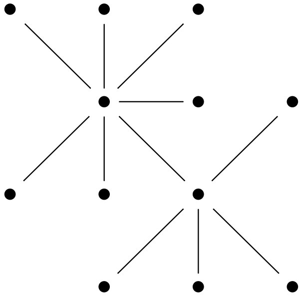


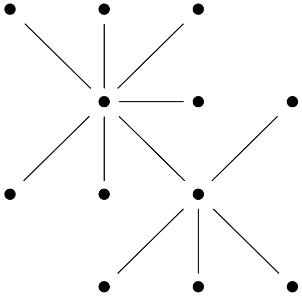


Teorema

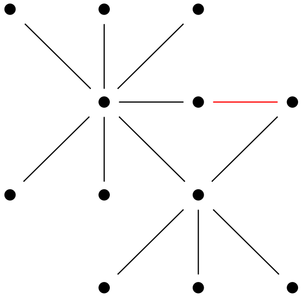
Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 6$.

$\chi(G) =$ el menor número de colores necesarios para colorear el grafo G de manera tal que dos vértices que compartan la misma arista tengan colores diferentes

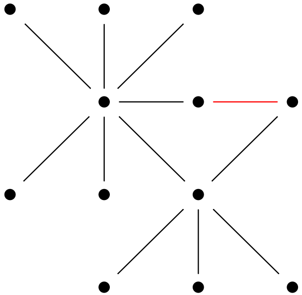




$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 11 + 1 = 2$$

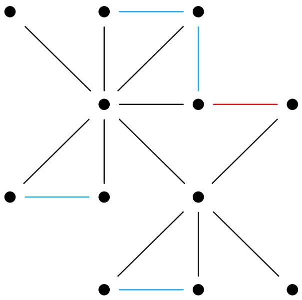


$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 11 + 1 = 2$$

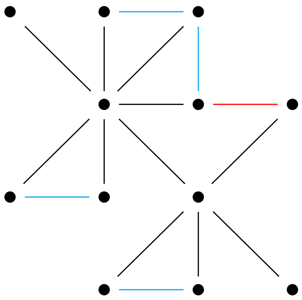


$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 11 + 1 = 2$$

$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 12 + 2 = 2$$



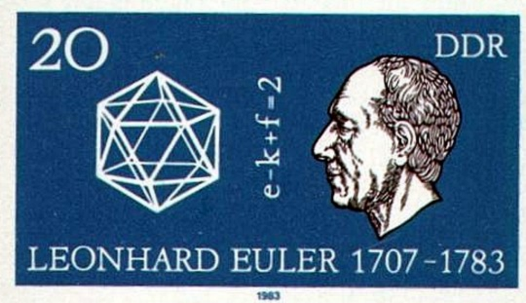
$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 12 + 2 = 2$$



$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 12 + 2 = 2$$

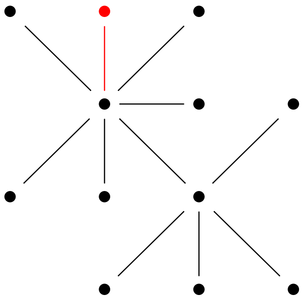
$$V(G) - A(G) + R(G) = 12 - 16 + 6 = 2$$

Fórmula de Euler



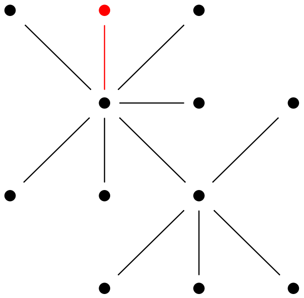
$$V(G) - A(G) + R(G) = 2$$

Inducción en el número de aristas:



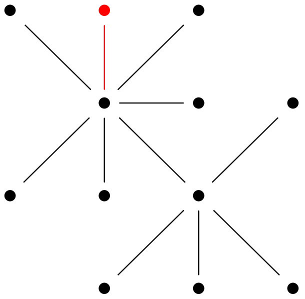
$$2 \quad = \quad V(G') \quad - \quad A(G') \quad + \quad R(G')$$

Inducción en el número de aristas:



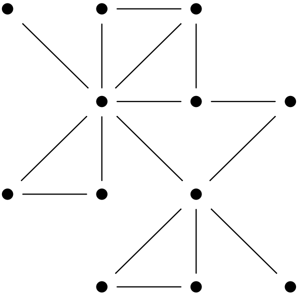
$$
\begin{array}{rcccccc}
2 & = & V(G') & - & A(G') & + & R(G') \\
 & = & (V(G)-1) & - & (A(G)-1) & + & R(G)
\end{array}
$$

Inducción en el número de aristas:

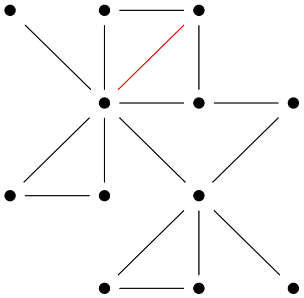


$$
\begin{aligned}
2 &= V(G') - A(G') + R(G') \\
&= (V(G)-1) - (A(G)-1) + R(G) \\
&= V(G) - A(G) + R(G)
\end{aligned}
$$

Inducción en el número de aristas:

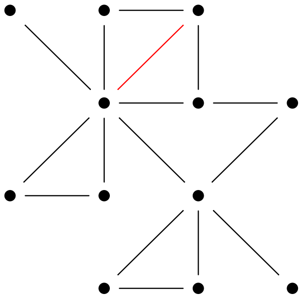


Inducción en el número de aristas:



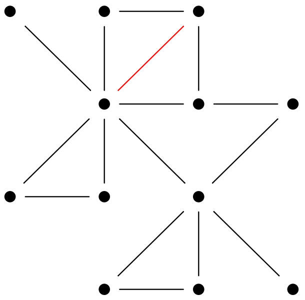
$$2 \quad = \quad V(G') \quad - \quad A(G') \quad + \quad R(G')$$

Inducción en el número de aristas:



$$\begin{aligned} 2 &= V(G') - A(G') + R(G') \\ &= V(G) - (A(G)-1) + (R(G)-1) \end{aligned}$$

Inducción en el número de aristas:



$$\begin{aligned} 2 &= V(G') - A(G') + R(G') \\ &= V(G) - (A(G)-1) + (R(G)-1) \\ &= V(G) - A(G) + R(G) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = V - A + R \\ 3R \leq 2A \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A \leq 3V - 6 < 3V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = V - A + R \\ 3R \leq 2A \end{array}} \Rightarrow \boxed{A \leq 3V - 6 < 3V}$$

$$\Downarrow$$

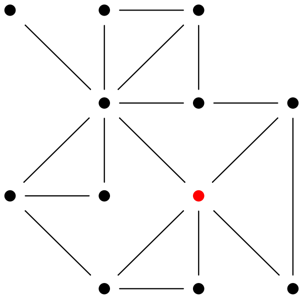
$$\boxed{2A = \sum_{x \in V} \mathrm{gr}(x)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = V - A + R \\ 3R \leq 2A \end{array}} \Rightarrow \boxed{A \leq 3V - 6 < 3V}$$

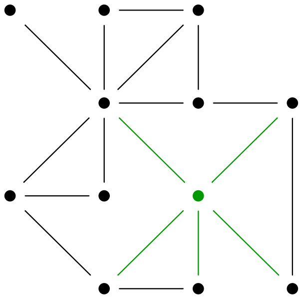
$$\Downarrow$$

$$\boxed{2A = \sum_{x \in V} \mathrm{gr}(x)} \Rightarrow \boxed{\exists x \in V : \mathrm{gr}(x) < 6}$$

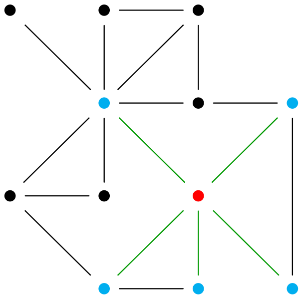
Inducción en el número de vértices:



Inducción en el número de vértices:



Inducción en el número de vértices:



Enfoque categórico del problema de los cuatro colores

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

Teorema B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

Enfoque categórico del problema de los cuatro colores

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

Teorema B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

$$\boxed{\text{Teorema A} \Leftrightarrow \text{Teorema B}}$$

Barry Fawcett.
A categorical characterization of the four colour theorem.
Canad. Math. Bull., 29(4):426–431, 1986.

TEOREMA B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

Teorema B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

$$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$$

Teorema B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$

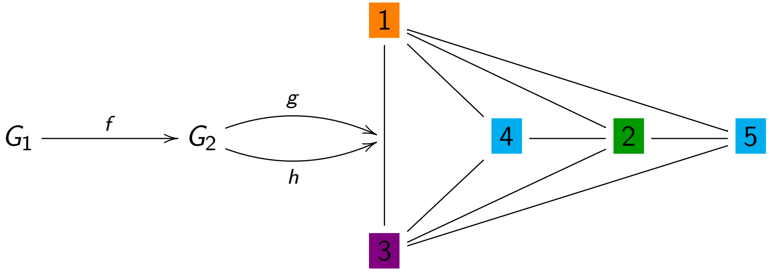
$$G_1 \xrightarrow{f} G_2$$

$v \in G_2 \setminus \mathrm{Im}\, f$:

TEOREMA B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$



$v \in G_2 \setminus \mathrm{Im}\, f$:

TEOREMA A $\Longrightarrow$ TEOREMA B

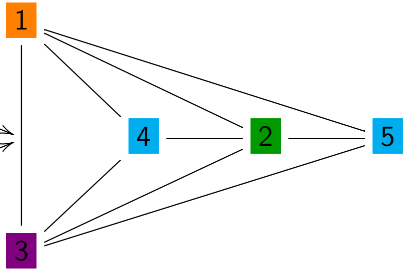
TEOREMA B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$

coloreamos

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}}$$



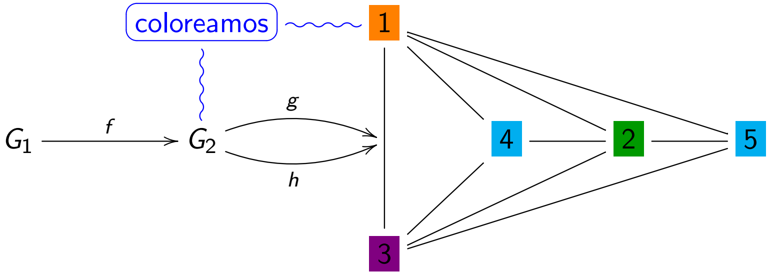
$v \in G_2 \setminus \operatorname{Im} f$:

Teorema A $\Longrightarrow$ Teorema B

Teorema B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

$\boxed{f \text{ no sobreyectiva}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f \text{ no epimorfismo}}$



$v \in G_2 \setminus \mathrm{Im}\, f$: $g(v) = 4$, $h(v) = 5$

TEOREMA A (TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

- S un grafo planar triangulado, $\chi(S) = 5$, cardinalidad de $V(S)$ mínima;
- $S \setminus \{x\} \hookrightarrow S$ es un epimorfismo no sobreyectivo!

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

- S un grafo planar triangulado, $\chi(S) = 5$, cardinalidad de $V(S)$ mínima;
- $S \setminus \{x\} \hookrightarrow S$ es un epimorfismo no sobreyectivo!

$$\begin{tikzcd} S \setminus \{x\} \arrow[r, hook] & S \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & G \end{tikzcd}$$

Si fuera $g(x) \neq h(x)$ entonces:

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

- S un grafo planar triangulado, $\chi(S) = 5$, cardinalidad de $V(S)$ mínima;
- $S \setminus \{x\} \hookrightarrow S$ es un epimorfismo no sobreyectivo!

$$\begin{tikzcd} S \setminus \{x\} \arrow[r, hook] & S \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & G \end{tikzcd}$$

Si fuera $g(x) \neq h(x)$ entonces:

- $\mathrm{gr}(g(x)) \leq 3$ en $\mathrm{Im}\, f$;

TEOREMA A (TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

- S un grafo planar triangulado, $\chi(S) = 5$, cardinalidad de $V(S)$ mínima;
- $S \setminus \{x\} \hookrightarrow S$ es un epimorfismo no sobreyectivo!

$$\begin{tikzcd} S \setminus \{x\} \arrow[r, hook] & S \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & G \end{tikzcd}$$

Si fuera $g(x) \neq h(x)$ entonces:

- $\mathrm{gr}(g(x)) \leq 3$ en $\mathrm{Im}\, f$;
- f es una función inyectiva, entonces $\mathrm{gr}(x) \leq 3$ en S;

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

- S un grafo planar triangulado, $\chi(S) = 5$, cardinalidad de $V(S)$ mínima;
- $S \setminus \{x\} \hookrightarrow S$ es un epimorfismo no sobreyectivo!

$$\begin{tikzcd} S \setminus \{x\} \arrow[r, hook] & S \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & G \end{tikzcd}$$

Si fuera $g(x) \neq h(x)$ entonces:

- $\mathrm{gr}(g(x)) \leq 3$ en $\mathrm{Im}\, f$;
- f es una función inyectiva, entonces $\mathrm{gr}(x) \leq 3$ en S;
- $S \setminus \{x\}$ se puede colorear con 4 colores;

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

- S un grafo planar triangulado, $\chi(S) = 5$, cardinalidad de $V(S)$ mínima;
- $S \setminus \{x\} \hookrightarrow S$ es un epimorfismo no sobreyectivo!

$$\begin{tikzcd} S \setminus \{x\} \arrow[r, hook] & S \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & G \end{tikzcd}$$

Si fuera $g(x) \neq h(x)$ entonces:

- $\mathrm{gr}(g(x)) \leq 3$ en $\mathrm{Im}\, f$;
- f es una función inyectiva, entonces $\mathrm{gr}(x) \leq 3$ en S;
- $S \setminus \{x\}$ se puede colorear con 4 colores;
- S se puede colorear con 4 colores.

Teorema A (teorema de los cuatro colores)

Si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 4$.

Teorema B

Todo epimorfismo definido en la categoría de grafos planares es una función sobreyectiva.

Barry Fawcett.
A categorical characterization of the four colour theorem.
Canad. Math. Bull., 29(4):426–431, 1986.