Sobre puentes y sudokus

Adolfo Quirós Gracián

adolfo.quiros@uam.es

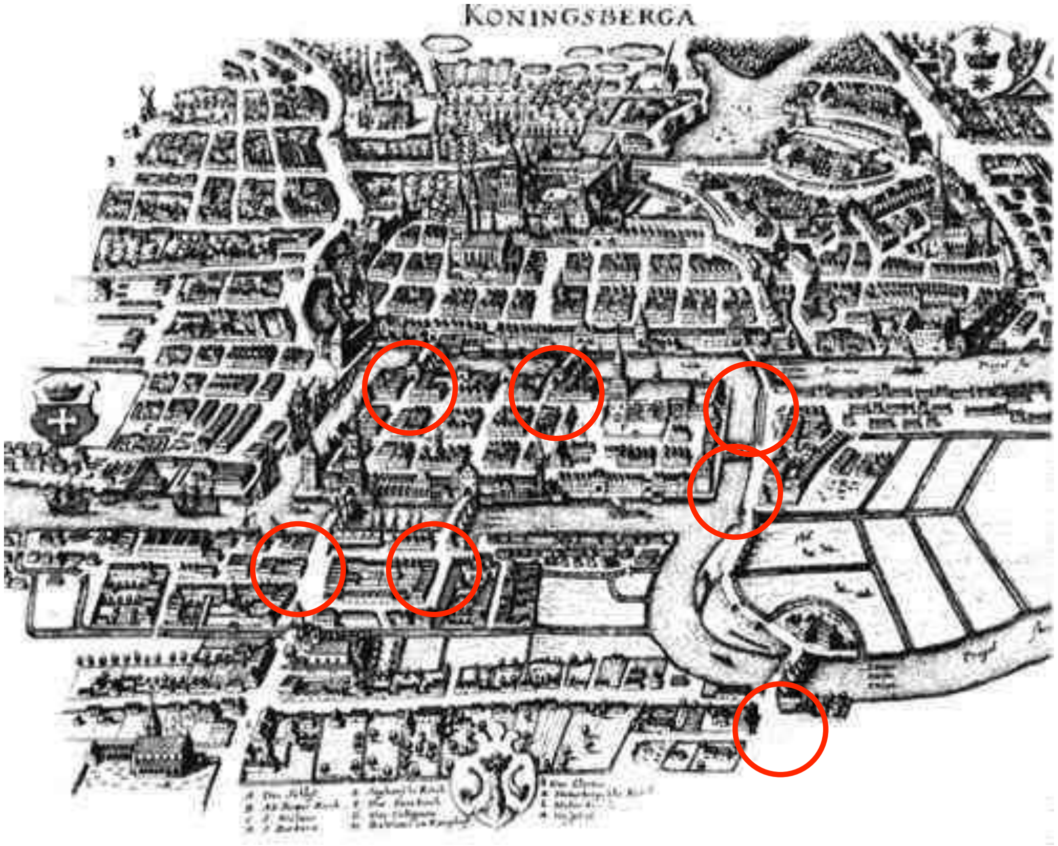
Reunión anual de la Unión Matemática Argentina

Bahía Blanca, 20 de septiembre de 2016

Nuestro guía va a ser Leonhard Euler

- **Basilea (Suiza) 1707 - San Petersburgo (Rusia) 1783 .**
- **El matemático más prolífico de la historia. Sus obras completas ocupan 74 volúmenes (artículos y libros) + 9 volúmenes de cartas (matemáticas).**
- **Fue el primero en utilizar las notaciones f(x), e, i o Σ.**

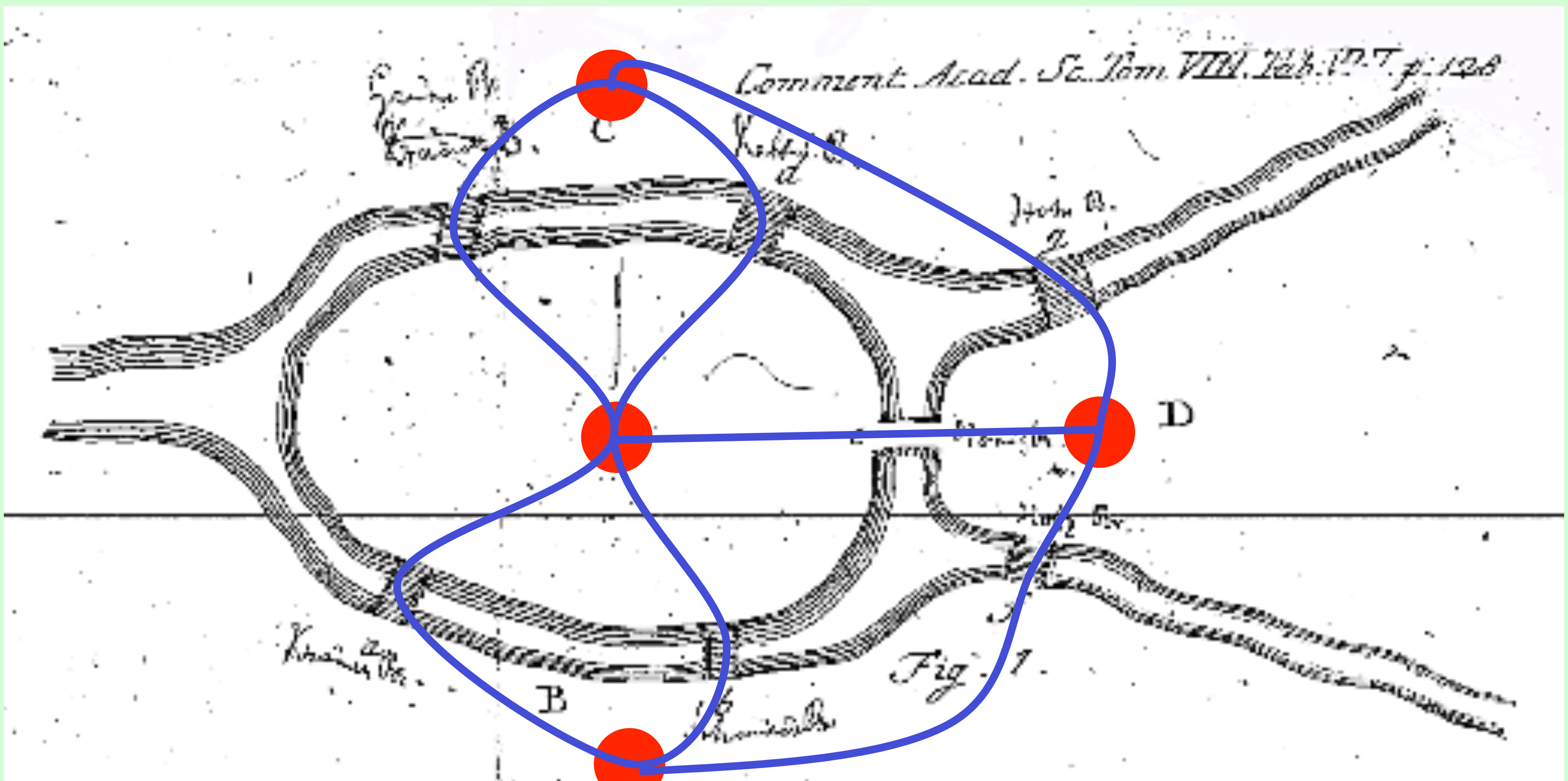
Sobres puentes



¿Puede un ciudadano de Königsberg (Kaliningrado) salir de su casa, pasar exactamente una vez por cada uno de los 7 puentes [y regresar a su casa]?

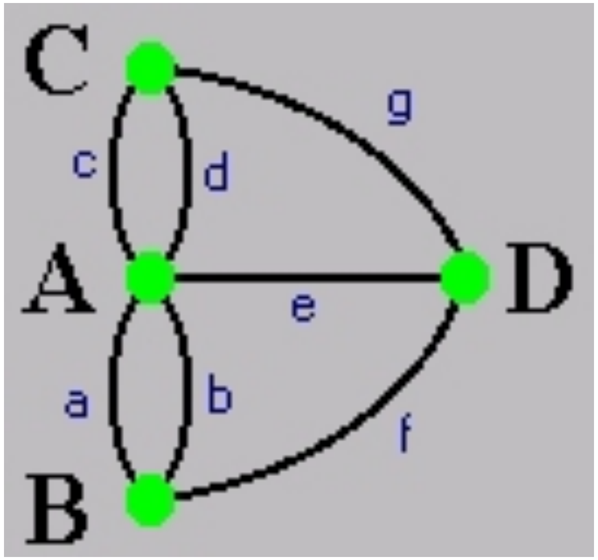
Euler [1735]

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.



¿Qué es un grafo?

- Conjunto finito de vértices [nodos].
- Unidos por un conjunto finito de aristas.
- Ejemplo: el grafo de Königsberg



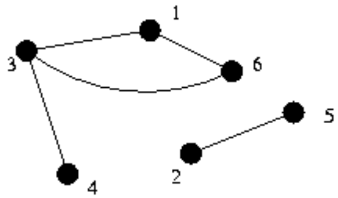
- Circuito euleriano en un grafo: empezar en un vértice V_0, recorrer exactamente una vez cada arista, volver al vértice V_0 en el que empezamos.
- ¡El problema de los puentes de Königsberg!

Dos observaciones de Euler

Para que exista un circuito euleriano:

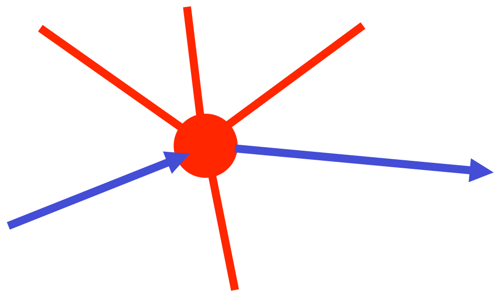
1. El grafo tiene que ser conexo.

No como éste:



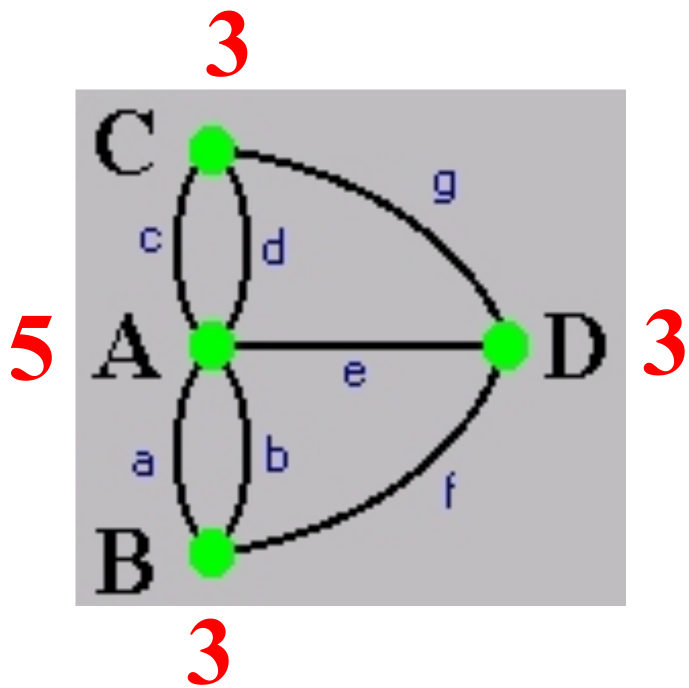
2. A) Cuando se pasa por un vértice, se "entra" por una arista y se "sale" por otra.

B) De V_0 salimos por una arista y, al final, regresamos por otra.



POR TANTO: el número de aristas que toca a cada vértice [valencia, grado] tiene que ser par.

Grados en el grafo de Königsberg:



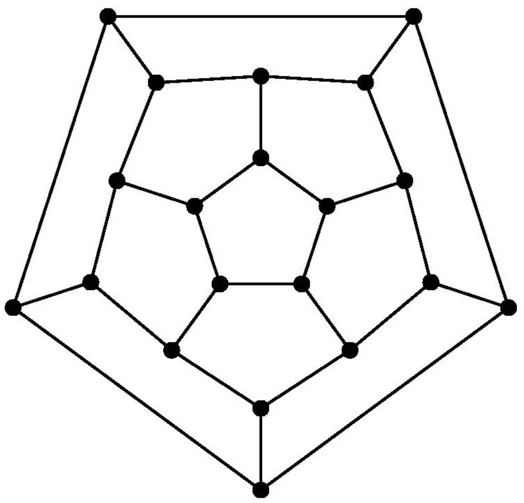
¡No era posible dar un paseo euleriano por Königsberg!

Euler afirmó que estas condiciones, además de necesarias, eran suficientes. Primera demostración: Carl Hierholzer [1873]

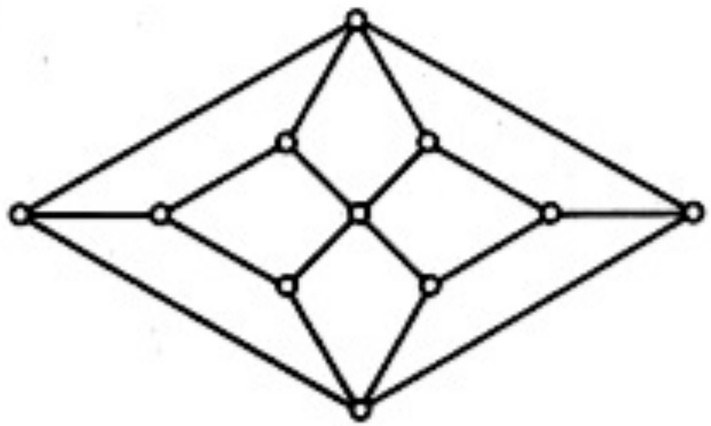
Un problema parecido: los circuitos hamiltonianos
William R. Hamilton, 1856

- ¿Podemos empezar en un vértice V_0, pasar por cada uno de los demás una sola vez, y volver a V_0?

Grafo del Dodecaedro



Grafo de Herschel

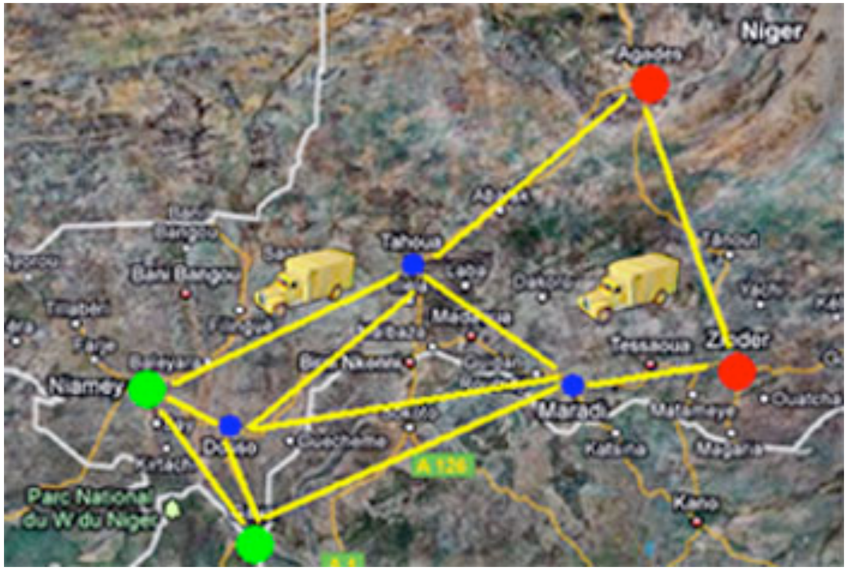


- En unos casos SI, pero en otros NO.

- Dar una condición necesaria y suficiente para la existencia de circuitos hamiltonianos es uno de los principales problemas abiertos en Teoría de Grafos. [DIFÍCIL: NP-completo.]

Una aplicación: "el problema del viajante"

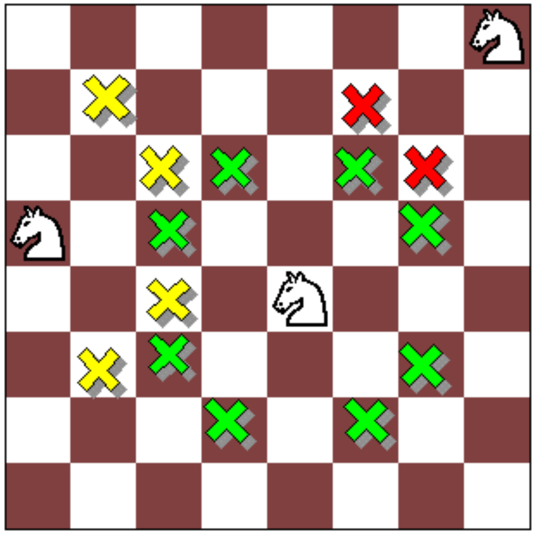
Si las aristas tienen "pesos" [longitud, coste,…] encontrar el circuito hamiltoniano más barato.



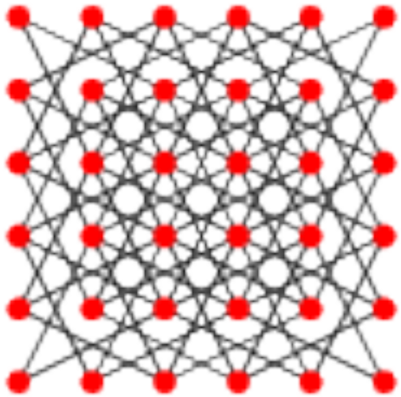
Matemáticas en la gestión de ayuda humanitaria.

Un equipo de investigadores de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense está desarrollando un sistema para ayudar en la toma de decisiones en el contexto de la distribución de ayuda humanitaria sobre el terreno, una vez que los bienes ya están en el país de destino. […]

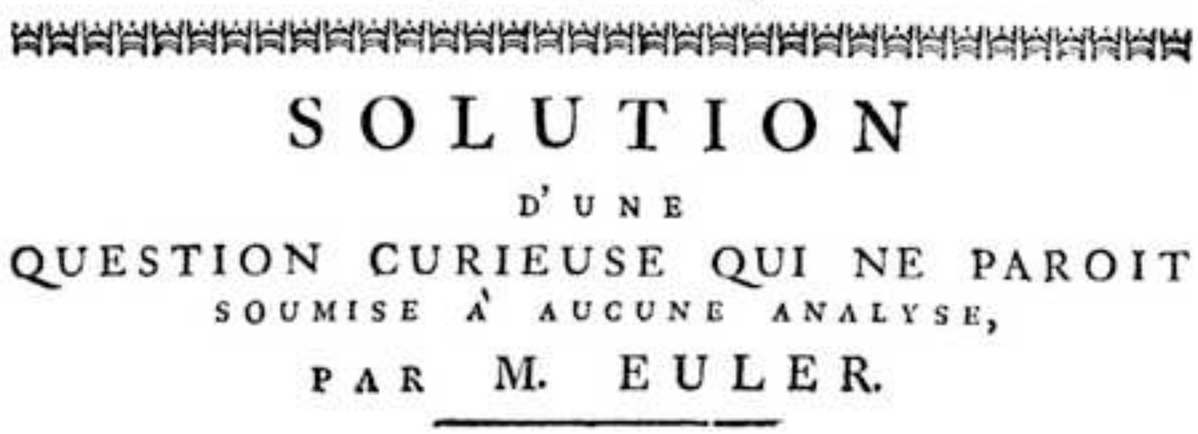
Caso particular: ¿puede un caballo de ajedrez recorrer todo el tablero y volver donde empezó sin repetir casilla?



Grafo del caballo en un tablero 6x6



1759: Primer trabajo publicado sobre "el problema del caballo".


SOLUTION

D'UNE

QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT

SOUMISE À AUCUNE ANALYSE,

PAR M. EULER.

Una solución de Euler

322

& marquant les caſes par l'ordre naturel des nombres, on aura cette route rentrante.

30	55	46	9	28	57	40	7
47	12	29	56	45	8	27	58
54	31	10	13	18	41	6	39
11	48	33	42	15	44	59	26
32	53	14	17	34	19	38	5
49	64	51	20	43	16	25	60
52	21	2	35	62	23	4	37
1	50	63	22	3	36	61	24

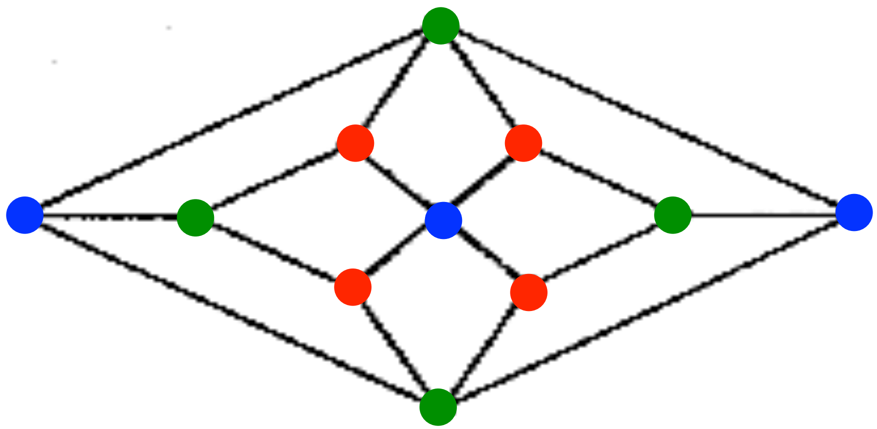
Solución definitiva [1994]: A. Conrad, T. Hindrichs, H. Morsy, Hussein; I. Wegener [U. Dortmund].

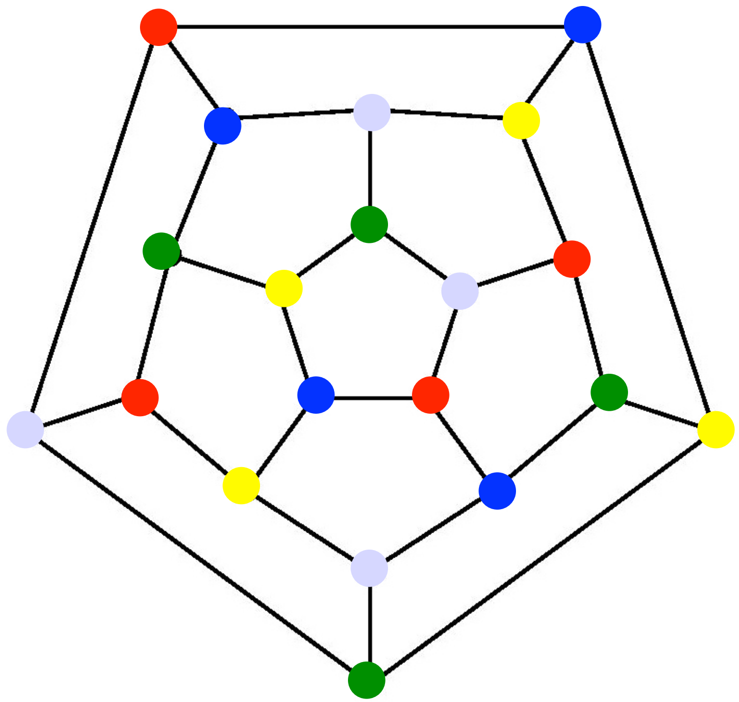
- **Existe un circuito hamiltoniano para el caballo en un tablero nxn ⇔ n es par, n≥6.**
- **Si no exigimos volver a la casilla de partida ⇔ n≥5.**

¿Por qué no hay un circuito de Hamilton en el grafo de Herschel?

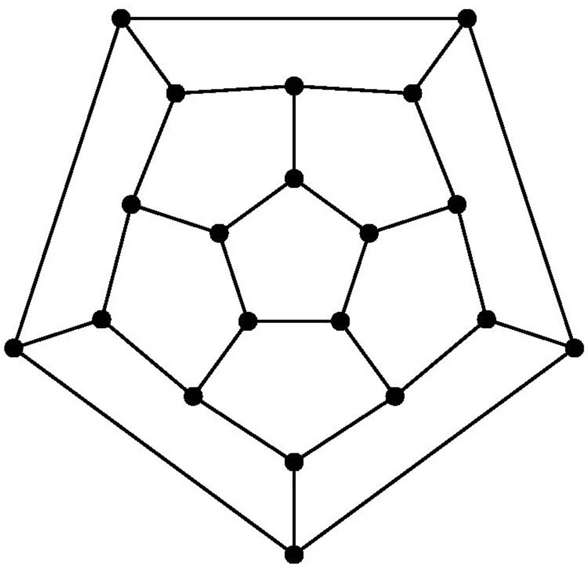
Colorear un grafo es asignar un color a cada vértice, de manera que los unidos por una arista tengan distinto color.

Ejemplo: El grafo de Herschel se puede colorear con 3 colores. El grafo del dodecaedro con 5 colores





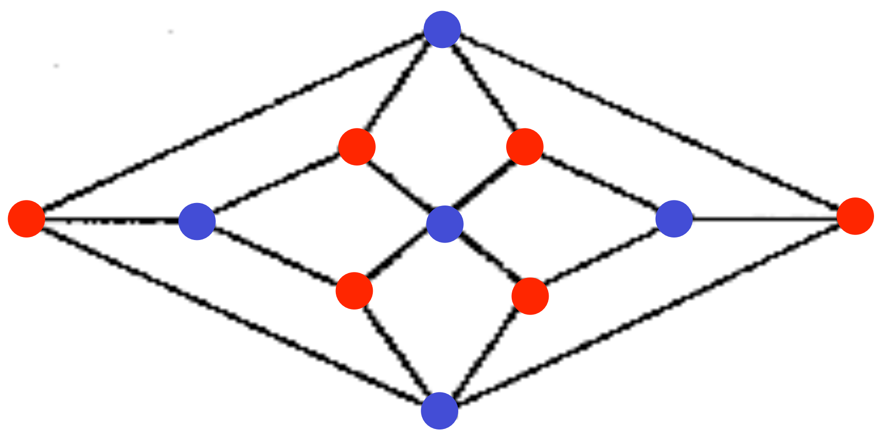
¿Podemos hacerlo con menos colores?



- **El grafo del dodecaedro NO puede colorearse con 2 colores. ¿Por qué?**
- **¿Puedes colorearlo con 3 colores?**
- **¿Puedes colorear el grafo de Herschel con 2 colores?**

¿Podemos hacerlo con menos colores?

- **El grafo de Herschel SÍ se puede colorear con 2 colores [=es un grafo bipartito]**



- **Usando este coloreado podemos DEMOSTRAR que NO tiene un circuito hamiltoniano**
- **El número de vértices es impar [11] y un circuito hamiltoniano recorrería rojo-azul-rojo-….-azul-rojo.**
- **Pero no puede volver al principio, porque no hay aristas uniendo rojo-rojo.**

Colorear un mapa ES colorear un grafo

- Queremos que las provincias que comparten una línea de frontera tengan colores distintos

¿Cuántos colores necesitamos?

Creamos el GRAFO del MAPA

- **Vértice= provincia**
- **Arista cuando las provincias comparten frontera**

Colorear el mapa ES colorear el grafo

- ¿Se podría haber coloreado el mapa de las Provincias de Argentina con sólo 3 colores?
- NO. ¿Por qué?

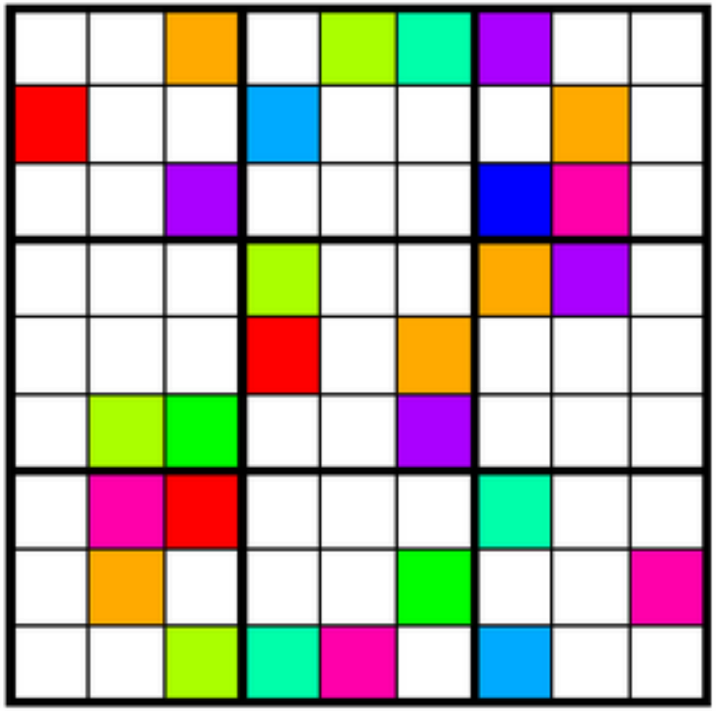
- ¡No existe ningún mapa (normal) que necesite 5 colores!
- Teorema de los cuatro colores [K. Appel, W. Haken (1976)].
- USANDO ORDENADOR

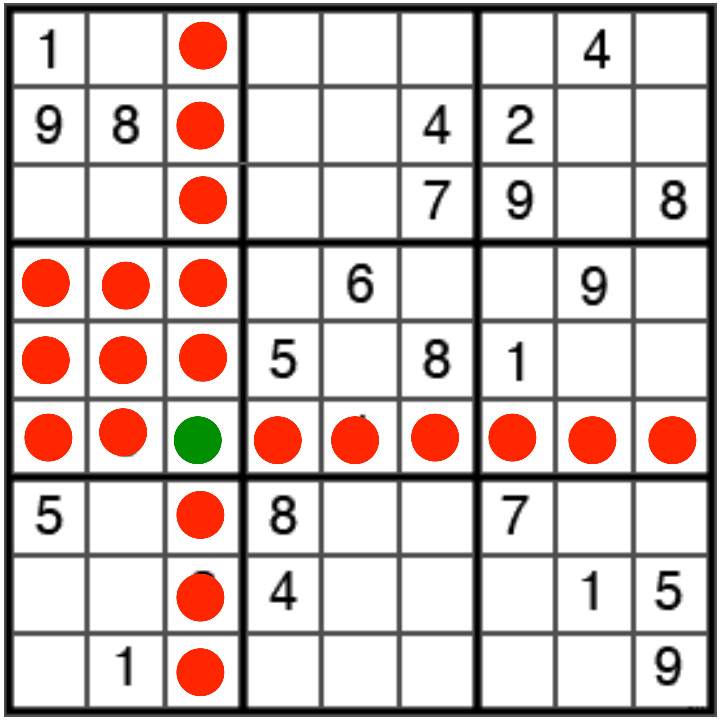
Sobre sudokus (modernos)

1979 Howard Garns, revistas de Dell, “Number Place”;
1984 *Monthly Nikolist* “Sudoku”; 2004, *Times* de Londres

- **Un sudoku es un grafo con 9x9=81 nodos [las casillas] que debemos colorear con 9 colores [1,2,…, 9] sujetos a ciertas restricciones [aristas].**

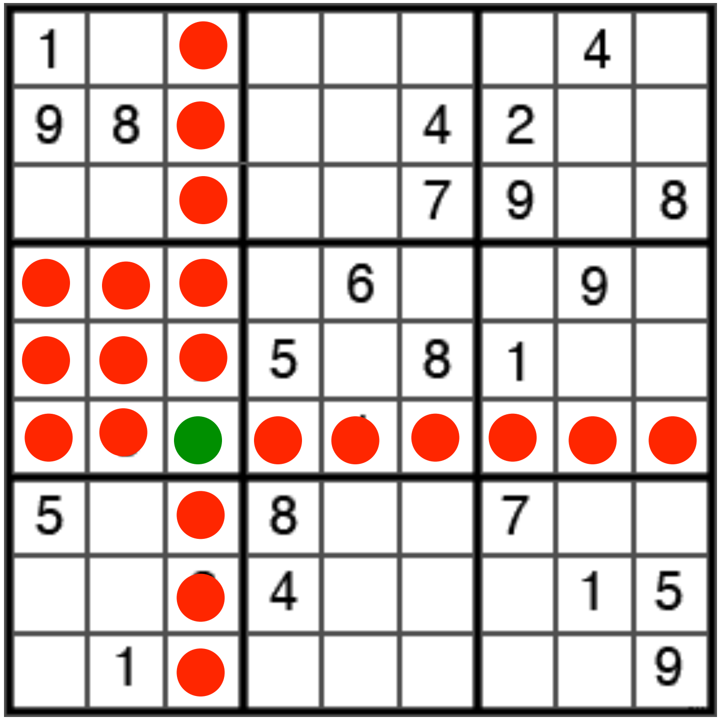
1							4	
9	8				4	2		
		5			7	9		8
				6			9	
		9	5		8	1		
	3			1				
5		6	8			7		
		2	4				1	5
	1							9





- Dos casillas no pueden tener el mismo color [número] si están en el mismo subcuadrado, o en la misma fila, o en la misma columna.
- Traducción: esas casillas tienen que estar unidas por aristas.
- Ejemplo: Del nodo verde saldrían aristas a los 8+8+4=20 nodos rojos.

Un sudoku es un grafo con ???? nodos y ???? aristas que hay que colorear con 9 colores.



- Dos casillas no pueden tener el mismo color [número] si están en el mismo subcuadrado, o en la misma fila, o en la misma columna.
- Traducción: esas casillas tienen que estar unidas por aristas.
- Ejemplo: Del nodo verde saldrían aristas a los 8+8+4=20 nodos rojos.

Un sudoku es un grafo con 81 nodos y 81x20/2=810 aristas que hay que colorear con 9 colores.

Euler no estudió el sudoku, pero sí [1779, 155 pág.] los cuadrados latinos

RECHERCHES
SUR UNE NOUVELLE ESPECE
DE
QUARRÉS MAGIQUES,
PAR
Mr. L. EULER.

SUR LES QUARRÉS MAGIQUES. 91

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	6	5	7	1	4	2
4	5	6	1	7	2	3
5	1	7	2	6	3	4
6	7	4	3	2	5	1
7	4	2	6	3	1	5

où chacune des ſept bandes, tant horizontales que verticales, contient tous les ſept nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- Un cuadrado latino NxN tiene en cada fila y en cada columna una sola vez cada uno de los números 1,2,…N
- Un sudoku es un cuadrado latino $n^2 x n^2$ [el normal tiene n=3] con la condición adicional de que los números no se repitan tampoco en los subcuadrados.

¿Cuántos cuadrados latinos distintos hay?

N	nº de cuadrados latinos de tamaño NxN	Calculado por
1	1	
2	2	
3	12	
4	576	
5	161280	Euler (1782)
6	812851200	Frolov (1890)
7	61479419904000	Sade (1948)
8	108776032459082956800	Wells (1967)
9	5524751496156892842531225600	Bammel-Rothstein (1975)
10	9982437658213039871725064756920320000	McKay-Rogoyski (1995)
11	776966836171770144107444346734230682311065600000	McKay-Wanless (2005)
N≥12	??????????	

- El nº de cuadrados lat. 9x9 es ~5x10^{27}. Los 11x11 son ~7x10^{47}
- El nº de segundos de vida del universo es ~4x10^{17}.
- El ordenador más rápido del mundo ~3x10^{16} flops.

Sudokus por supuestos hay muchos menos

- **Felgenhauer y Jarvis [2005]: nº de sudokus 9x9**

6.670.903.752.021.072.936.960 ~6×10^{21}

- **Son sólo 0.00012% de los cuadrados latinos 9x9.**

Pero en un sudoku lo divertido es resolverlo

- **Esto es, a partir de las pistas, completar el sudoku hasta encontrar la única solución.**
- **Sudoku BUENO = hay solución y es única.**
- **¡OJO!: Resolver un sudoku n^2xn^2, con n grande, es un problema difícil [NP-completo].**

Euler ya se preocupo de cuándo se puede completar un cuadrado latino parcial NxN

- Si tiene escritos N elementos, quizás no:

1	2	…	N-1	
				N

- TEOREMA [B. Smetaniuk, 1981]: Todo cuadrado latino parcial NxN con N-1 elementos puede completarse. [¡No de manera única!]

¿Requisitos para que un sudoku sea bueno?

COLORES

- Para el 9x9, si las pistas incluyen sólo 7 colores, hay al menos dos soluciones. ¿Por qué?
- Porque podemos intercambiar los otros dos colores.

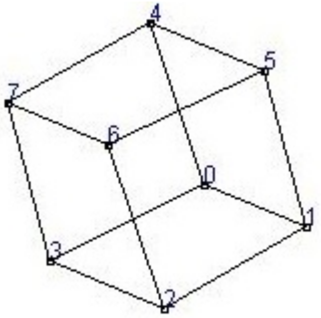
CANTIDAD DE PISTAS

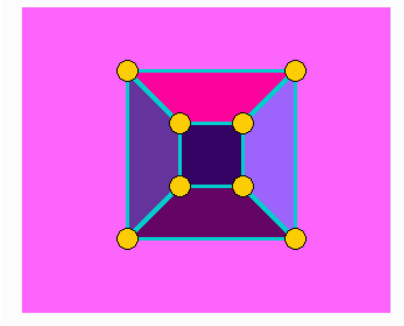
- Existen sudokus con 17 pistas [incluyendo 8 colores] que tienen solución única.
- ¿Existen sudokus buenos con sólo 16 pistas? Se pensaba que NO.
- En 2012 Gary McGuire, Bastian Tugemann y Gilles Civario lo han demostrado, USANDO UN ORDENADOR.

Mapas+Grafos→ Grafos Planos

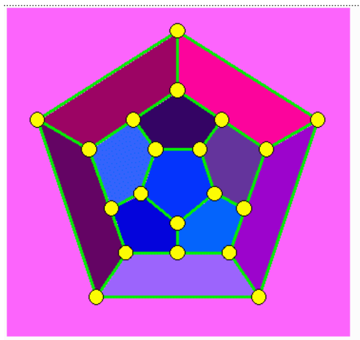
DEFINICIÓN: Un grafo es plano si se puede dibujar en el plano [¡o en la esfera!] sin que las aristas se corten.

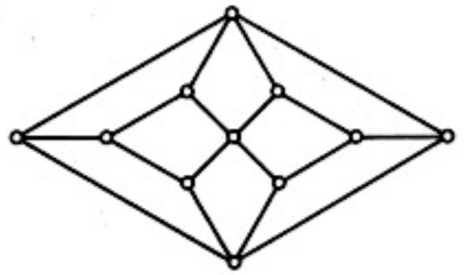
- **El grafo del cubo**





- **El grafo del dodecaedro o el de Herschel**

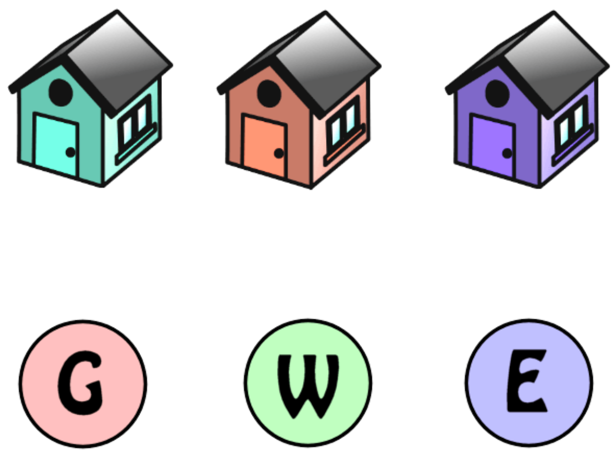




- **El grafo asociado a un mapa (normal)**
- **Un grafo para el que necesitemos 5 colores NO PUEDE ser plano**

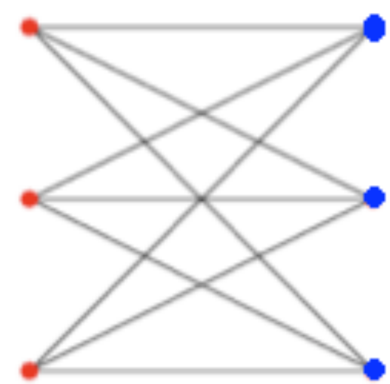
¿Es plano el grafo “gas, agua y electricidad”?

- ¿Puedes unir 3 casas con las centrales de agua, gas y electricidad sin que las conexiones se crucen?



- Está permitido moverlas EN EL PLANO

- El grafo “gas, agua y electricidad” no es plano

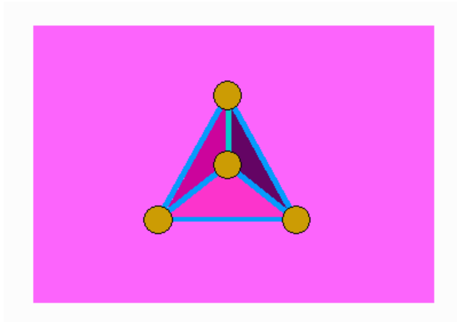


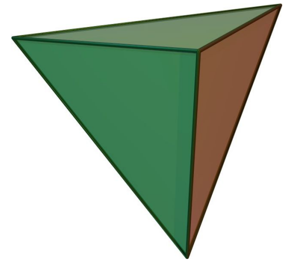
Un grafo plano divide el plano en regiones, que llamamos “caras”.

Viendo el grafo en la esfera y aplanando las caras obtenemos poliedros.

vértices-aristas+caras

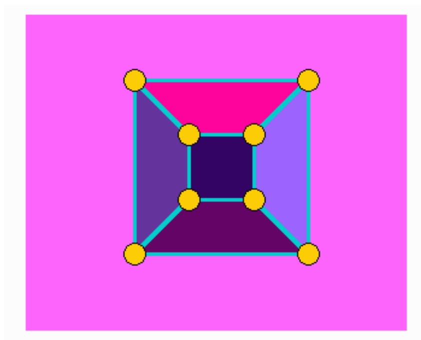
Tetraedro

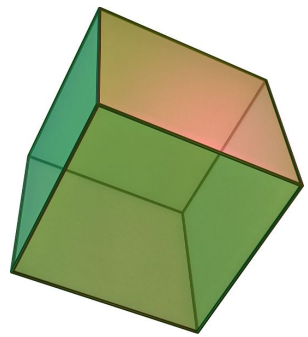




4-6+4=2

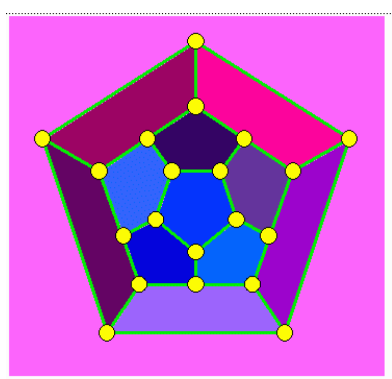
Cubo

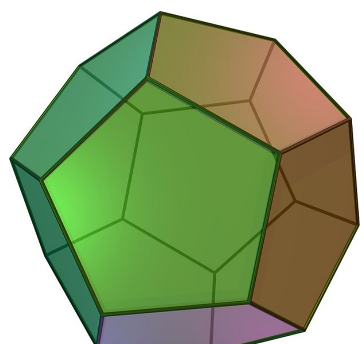




8-12+6=2

Dodecaedro





20-30+12=2

Euler demostró [1751] que *v-a+c=2* para cualquier poliedro (regular o no) "limitado por planos"=grafo plano

DEMONSTRATIO
NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM,
QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA
SVNT PRAEDITA.
Auct. L. Eulero.

SCHOLION.

27. Quanquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, vt cum hoc fuerit demonſtratum, ſimul illius veritas ſit euicta, tamen ex problemate praemiſſo etiam alterius Theorematis demonſtratio confici poteſt ſequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

28. *In omni ſolido hedris planis incluſo numerus hedrarum vna cum numero angulorum ſolidorum, binario excedit numerum acierum.*

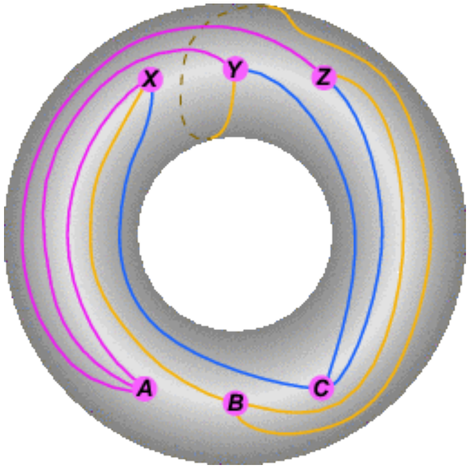
DEMONSTRATIO.

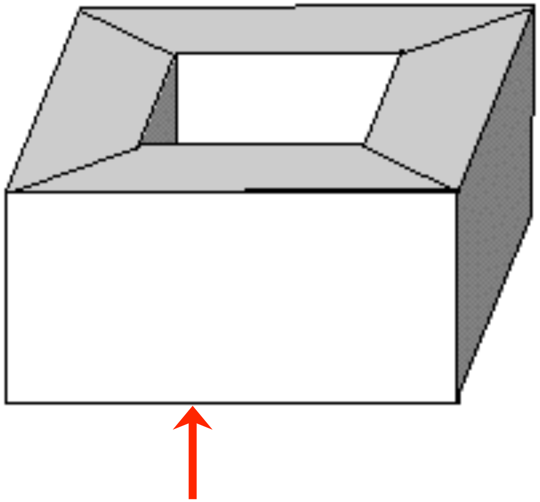
Sit in ſolido quocunque propoſito:
numerus angulorum ſolidorum = S
numerus hedrarum - - - = H
numerus acierum - - - = A
atque ante vidimus, ſi reſectione vnius anguli ſolidi numerus S vnitate minuatur, vt ſit S − 1, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram eſſe = A − H − 1. Continuata ergo hac mutilatione,

ſi numerus angulorum ſolidorum ſit,	Exceſſus numeri acierum ſuper numerum hedrarum erit
S	A − H
S − 1	A − H − 1
S − 2	A − H − 2
S − 3	A − H − 3
⋮	⋮
⋮	⋮
S − n	A − H − n

Quando

Si el grafo se pinta sobre un toro [se puede para "gas, agua y electricidad"], o si el poliedro "tiene un agujero".





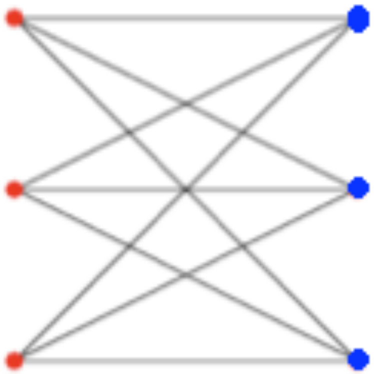
Entonces $v-a+c=0$ $[16-32+16=0]$

En general, si se pinta sobre una superficie con g agujeros

$$v-a+c=2-2g$$

g = *género* 2-2g = *característica de Euler-Poincaré*

Demostración de que el grafo "agua, gas y electricidad" no es plano



Enmienda a la totalidad: supongamos que lo es.

Euler → $v-a+c=2$

$v=6$, $a=9$ luego debería ser $c=5$

Llamemos c_n=nº de caras con n lados

$c_1=0$, $c_2=0$

$c_7, c_8, c_9, c_{10},..=0$

$c_3, c_5=0$

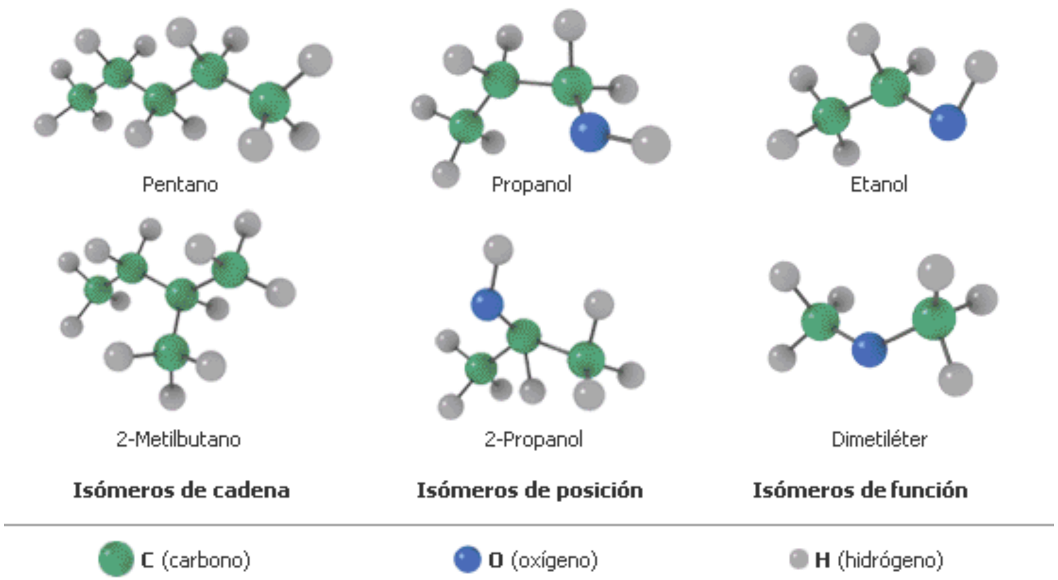
Sólo nos quedan c_4 y c_6, luego $c_4+c_6=c=5$.

Llamemos $c_6=x$, $c_4=5-x$

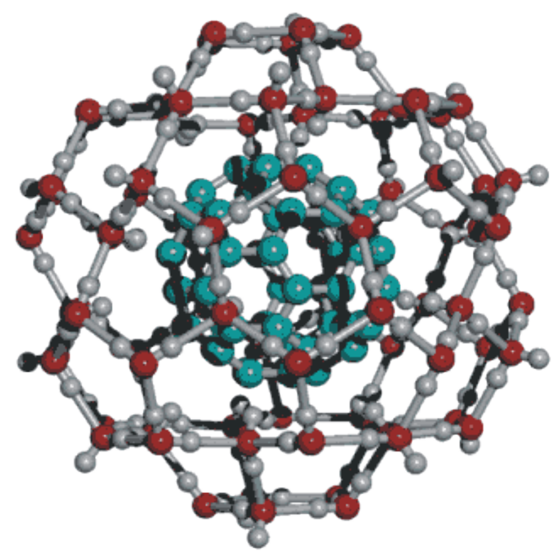
¿Cuántas aristas hay?
Parece que $4c_4+6c_6$.
Pero cada arista la hemos contado dos veces:
$4c_4+6c_6=2a$
$4(5-x)+6x=18$
$20+2x=18$
$x=c_6= -1$
¡¡¡Contradicción!!

Los grafos son útiles en Química

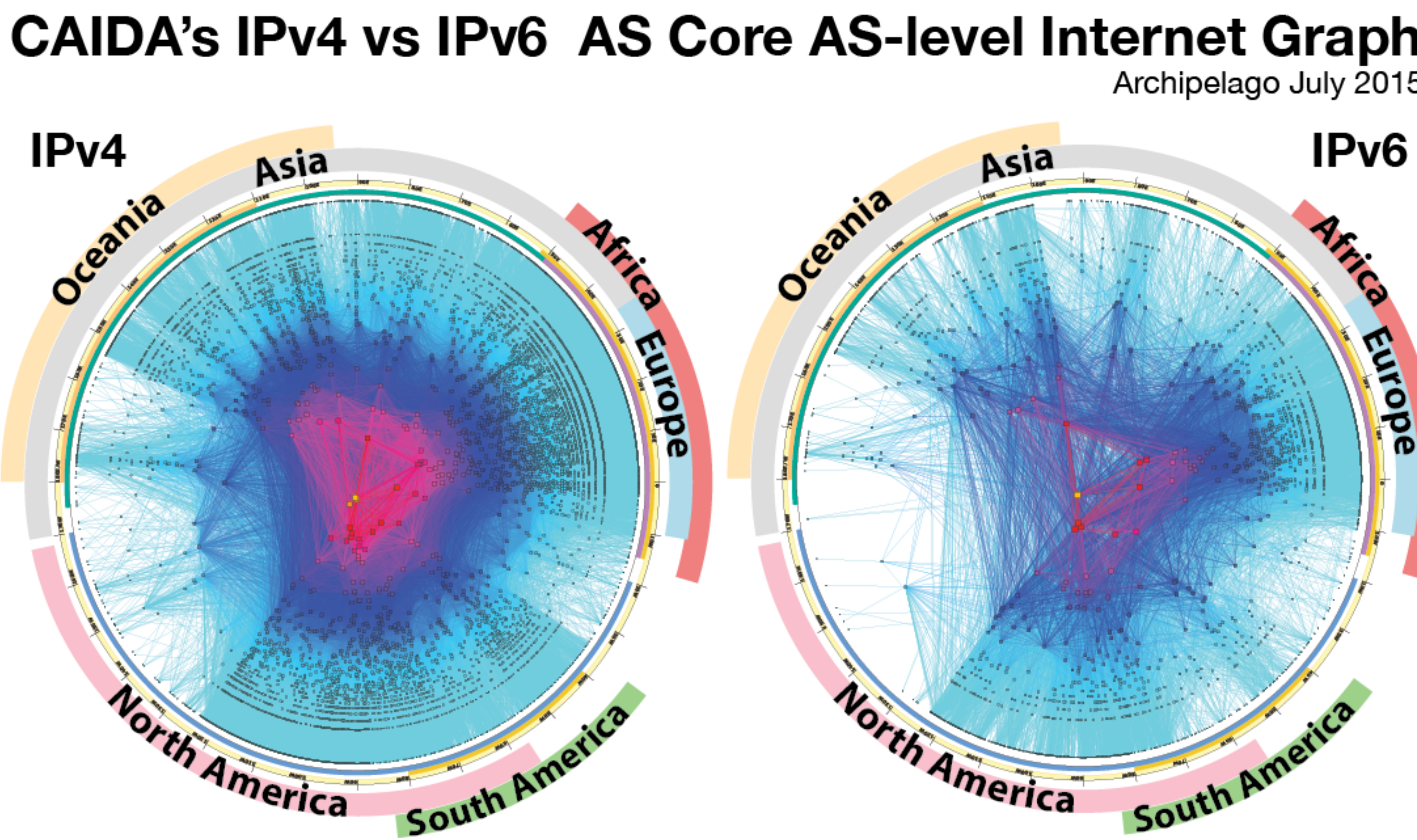
- Para distinguir isómeros [misma composición, distinta estructura]



- Para diseñar moléculas [fullereno hidratado]



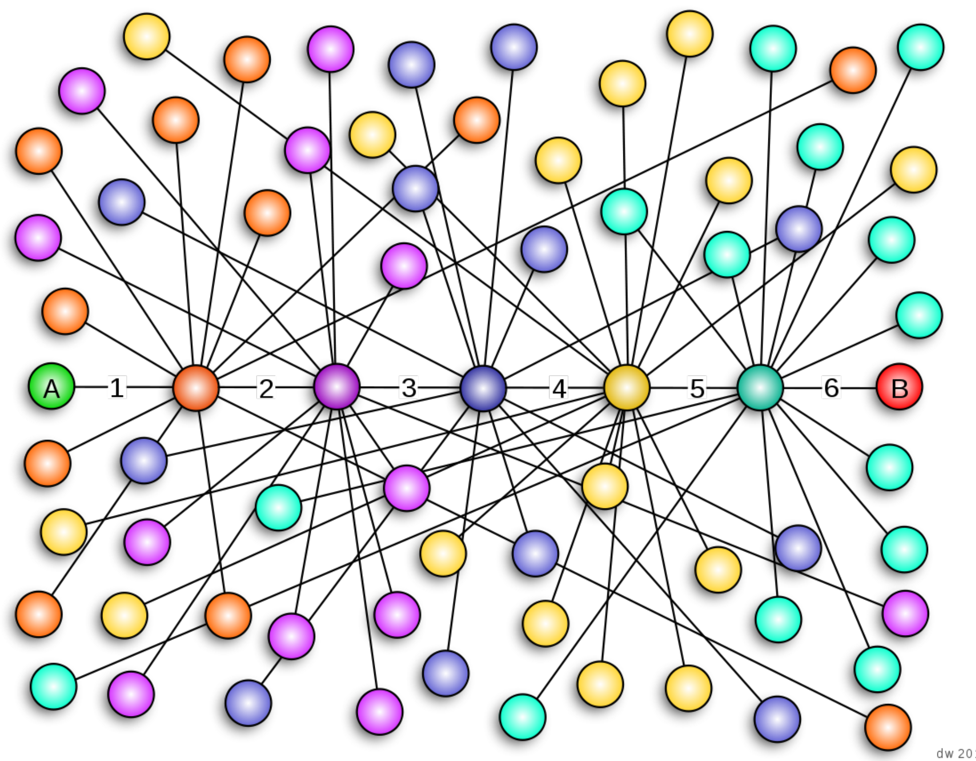
Para entender la Red de Redes



Para estudiar las Redes Sociales

- **Nodos = Personas**
- **Aristas = conocerse; ser familiares; estar agregado; salir en la misma película; ser coautores de un artículo; …**

- **El mundo es un pañuelo.**
- **Six degrees of separation (John Guare)**



AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MathSciNet
Mathematical Reviews

ISSN 2167-5163

PÃ¡gina principal | Preferencias | **Nuevas herramientas** | Â¿QuÃ© es? | Librarians | Terms of Use

University Autonoma de Madrid

BÃºsqueda en MSC | Distancia entre colaboradores | Revistas actuales | Publicaciones actuales

MR Collaboration Distance = 6

Adolfo Quirós Gracián	coauthored with	Javier Cilleruelo	MR2293617
Javier Cilleruelo	coauthored with	Imre Z. Ruzsa	MR1939134 (2003i:11033)
Imre Z. Ruzsa	coauthored with	Ernst Gabor Straus	MR0369288 (51 #5523)
Ernst Gabor Straus	coauthored with	Albert Einstein	MR0012947 (7,87j)
Albert Einstein	coauthored with	Hermann Minkowski	MR0044931 (13,499c)
Hermann Minkowski	coauthored with	Carl Friedrich Gauss	MR0816730 (87i:01062)

Change First Author | **Change Second Author** | **New Search**

Nuevas herramientas | Ayuda | Correo de soporte

Mirror Sites: **Providence, RI, Estados Unidos**

¡Muchas gracias!