

8. Comunicaciones: Matemática Discreta

GRAFOS CLIQUE K_5 -FREE CON CADA TRIÁNGULO CONTENIDO EN A LO SUMO UN K_4 CON UN ÚNICO GENERADOR CRÍTICO

Expositor: Gabriela Susana Ravenna (UNLP, Depto. de Matemática, gabriela.ravenna@gmail.com)

Autor/es: Gabriela Susana Ravenna (UNLP, Depto. de Matemática, gabriela.ravenna@gmail.com); Liliana Alcón (UNLP, Depto. de Matemática, liliana@mate.unlp.edu.ar)

El *grafo clique* de H , que se denota $K(H)$, tiene a los cliques de H como vértices y dos vértices Q y Q' son adyacentes en $K(H)$ si y sólo si los cliques Q y Q' tienen intersección no vacía en H . El grafo H se dice *clique-crítico* si $K(H) \neq K(H - x)$ para todo vértice x de H , donde $H - x$ es el grafo que se obtiene de H removiendo el vértice x y todas las aristas incidentes en él. Los grafos clique-críticos fueron introducidos por Escalante en [1].

Si H es crítico y $G = K(H)$ entonces H se dice un generador crítico de G . Se sabe que un grafo clique G admite una cantidad finita generadores críticos. Escalante planteó el problema de caracterizar los grafos que tienen un único generador crítico. Demostró que los grafos cliques sin triángulos tienen un único generador crítico pero que ésto no es una condición necesaria. En el mismo paper, Escalante conjetura que los grafos self-clique ($K(G) = G$) también tienen un único generador crítico, lo cual es refutado en [2] por Chong-Keang y Yee-Hock, mostrando un contraejemplo de dicha conjetura. El problema de caracterizar los grafos cliques que tienen un único generador crítico permanece abierto.

En la edición anterior de la UMA presentamos las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo clique K_4 -free tenga un único generador crítico. En esta oportunidad presentaremos las condiciones necesarias y suficientes para que un K_5 -free con cada uno de sus triángulos contenidos en a lo sumo un K_4 tengan único generador crítico.

Referencias

- [1] F. Escalante, B. Toft, On Clique-Critical Graphs, Journal Of Combinatorial Theory 17, 170–182 (1974).
- [2] L. Chong-Keang, P. Yee-Hock, On graphs Without Multicliqual Edges, Journal Of Graph Theory, Vol. 5, 443–451 (1981) .

EL POLIEDRO DE CÓDIGOS DE IDENTIFICACIÓN EN FAMILIAS DE GRAFOS SPLIT

Expositor: Yanina Lucarini (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR-CONICET, lucarini@fceia.unr.edu.ar)

Autor/es: Gabriela Argiroffo (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR, garua@fceia.unr.edu.ar); Yanina Lucarini (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR- CONICET, lucarini@fceia.unr.edu.ar); Silvia María Bianchi (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR, sbianchi@fceia.unr.edu.ar)

El Problema de mínimo código de identificación en grafos fué introducido por Karpovsky, Chakrabarty y Levitin en 1998 [3] y se ha desarrollado rápidamente ya que se han publicado alrededor de 150 trabajos sobre este tema. Entre los desafíos relacionados con este problema

puede mencionarse el de determinar o aproximar el cardinal del menor código de identificación para diferentes clases de grafos ya que responder estas preguntas es de interés tanto teórico como práctico.

Determinar el menor cardinal de un código de identificación en un grafo $G = (V, E)$ es una clase particular del problema de cubrimiento sobre una cierta matriz. En efecto, si llamamos M_{ID} a la matriz cuyas filas corresponden a los vectores de incidencia de las vecindades cerradas de los vértices en G (dominación) y a sus respectivas diferencias simétricas (identificación) se puede formular el problema como un problema de cubrimiento de conjuntos. Esta formulación motivó a Argiroffo, Bianchi y Wagler [1] a definir el poliedro de código de identificación de G como $P_{ID}(G)$, la cápsula convexa de los vectores 0,1 en $\{x : M_{ID}x \geq 1\}$.

En [2] se utilizó el enfoque poliedral para describir completamente el poliedro de códigos de identificación de ciertos grafos split. De este modo se obtuvo el número de identificación de estas familias.

En este trabajo siguiendo este enfoque abordamos el problema de Códigos de Identificación de otros grafos split conocidos como *n-suns*, *complete suns* y *co-suns*.

Probamos que nuevamente el enfoque poliedral permite determinar el número de identificación de estos grafos.

Referencias

- [1] G. Argiroffo, S. Bianchi and A. Wagler, Polyhedra associated with identifying codes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* Vol 44 (2013) 175–180.
- [2] G. Argiroffo, S. Bianchi and A. Wagler, Progress on the description of identifying code polyhedra for some families of split graphs. Por aparecer en *Discrete Optimization*.
- [3] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, and L. B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory* (1998) 599-611.

UN ALGORITMO PARA HALLAR TODOS LOS MATCHINGS MÁXIMOS DE UN ÁRBOL

Expositor: Daniel A. Jaume (Universidad Nacional de San Luis, djaume@unsl.edu.ar)

Autor/es: Daniel A. Jaume (Universidad Nacional de San Luis, djaume@unsl.edu.ar); Gonzalo Molina (Universidad Nacional de San Luis, lgonzalomolina@gmail.com); Rodrigo Sota (Universidad Nacional de San Luis, rodrigo.a.sota@gmail.com)

El número de matchings máximos en un árbol puede ser exponencial en el tamaño del árbol, aunque en muchas instancias esto no sucede. Usando la descomposición eigenvectorial de árboles dada en el preprint Jaume, Daniel y Molina, Gonzalo. *An eigenvector decomposition of trees*, y la descomposición core-split de S-árboles introducida en el preprint de Jaume, Daniel y Sota, Rodrigo *A combinatorial Drazin inverse for trees* presentamos un algoritmo paralelizable que a partir de una base del espacio nulo de la matriz de adyacencia del árbol encuentra todos los matching máximos del árbol.

PROBLEMAS DE DOMINACIÓN EN GRAFOS DEFINIDOS POR SUBGRAFOS PROHIBIDOS DE A LO SUMO CUATRO VÉRTICES

Expositor: Lara Fernandez (FCEIA- Universidad Nacional de Rosario, larailianafernandez@yahoo.com.ar)

Autor/es: Gabriela Argiroffo (FCEIA- Universidad Nacional de Rosario, garua@fceia.unr.edu.ar);
Lara Fernandez (FCEIA- Universidad Nacional de Rosario, larailianafernandez@yahoo.com.ar);
Pablo Torres (FCEIA- Universidad Nacional de Rosario- CONICET, ptorres@fceia.unr.edu.ar)

El problema de *dominación* en un grafo $G = (V, E)$ consiste en hallar una función f de V en $\{0, 1\}$ de peso mínimo que satisfaga que, para todo $i \in V$, $\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq 1$, donde $N[i]$ son los vértices de G a distancia a lo sumo 1 de i . En este trabajo consideramos las dos variaciones de este problema. El problema de k -tupla dominante [1] (problema de $\{k\}$ -dominación [2]) en un grafo: dado $k \in \mathbb{N}$, se pretende hallar una función f de V en $\{0, 1\}$ (respectivamente, en $\{0, 1, \dots, k\}$) de peso mínimo y tal que para todo $i \in V$, $\sum_{j \in N[i]} f(j) \geq k$. Dado un entero no negativo k , se consideran los siguientes problemas de decisión:

Problema de k -upla dominante (k -DOM): Dados $G = (V, E)$, $j \in \mathbb{N}$, ¿admite G una función de k -upla dominante de peso a lo sumo j ?

Problema de $\{k\}$ -dominación ($\{k\}$ -DOM) Dados $G = (V, E)$, $j \in \mathbb{N}$, ¿admite G una función de $\{k\}$ -dominación de peso a lo sumo j ?

Estos problemas son NP-completos desde el punto de vista de la complejidad computacional. Recientemente, Min Chih Lin y Michael Mizrahi [3] estudian el problema de dominación DOM en familias de grafos definidas por subgrafos inducidos prohibidos de a lo sumo cuatro vértices, es decir, si el grafo es $\mathcal{F}$ -free, donde $\mathcal{F}$ es un conjunto de grafos de a lo sumo cuatro vértices.

En este trabajo abordamos el estudio de la complejidad computacional de los problemas k -DOM y $\{k\}$ -DOM para grafos $\mathcal{F}$ -free, donde $\mathcal{F}$ es un conjunto de grafos de a lo sumo cuatro vértices.

Referencias

- [1] D. W. Bange, A. E. Barkauskas, L. H. Host, P. J. Slater, *Generalized domination and efficient domination in graphs*, Discrete Math. 159, (1996) 1–11.
- [2] F. Harary, T. W. Haynes, *Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs*, Discrete Math. 155, (1996) 99–105.
- [3] Min Chih Lin, Michael Mizrahi, On the complexity of the minimum domination problem restricted by forbidden induced subgraphs of small size, Discrete Applied Mathematics 195 (2015), 53–58.

LOS GRAFOS ESTRELLA EXTENDIDA: RECONOCIMIENTO Y PROPIEDADES ESTRUCTURALES

Expositor: Pablo De Caria (CONICET/ Univerisad Nacional de La Plata, pdecaria@mate.unlp.edu.ar)

Autor/es: Pablo De Caria (CONICET/ Univerisad Nacional de La Plata, pdecaria@mate.unlp.edu.ar);
Silvia Tondato (Univerisad Nacional de La Plata, tondato@mate.unlp.edu.ar); Marisa Gutierrez
(CONICET/ Univerisad Nacional de La Plata, marisa@mate.unlp.edu.ar)

Los grafos cordales, aquellos cuyos ciclos de longitud mayor o igual que cuatro poseen una cuerda (arista entre vértices no consecutivos del ciclo), pueden ser caracterizados a través del *árbol clique*. Dado un grafo G , diremos que un árbol T es un árbol clique de G si el conjunto

de vértices de T consiste en los cliques de G y, para todo vértice $v \in V(G)$, el conjunto $\mathcal{C}_v$ de cliques de G que contienen a v induce un subárbol en T . Un grafo es cordal si y sólo si posee un árbol clique [1].

Es habitual definir subclases de los grafos cordales a través de la condición de que el grafo posea un tipo especial de árbol clique. Estas condiciones se pueden referir a la estructura del árbol en sí o a la estructura de los subárboles inducidos por los conjuntos $\mathcal{C}_v$.

Recientemente se han definido los grafos *estrella extendida* (*extended star* en inglés) como aquellos grafos cordales que poseen un árbol clique tal que a lo sumo un vértice de él posea grado mayor que dos. Como consecuencia, se desprende inmediatamente que los grafos de intervalos forman una subclase de grafos estrella extendida. Ambas clases tienen en común que se pueden caracterizar a través de la ausencia de ciertos tipos de triplas asteroidales, como puede verse en [2].

En esta presentación, nos centraremos en el reconocimiento de los grafos estrella extendida. Para ello, introduciremos el concepto de *clique central*. Un clique de un grafo estrella extendida se dice central cuando es un vértice de grado máximo de un árbol clique del grafo con las características que definen la clase. Veremos cómo se puede determinar si un clique dado es central y desarrollaremos un método de reconocimiento de grafos estrella extendida basado en la identificación de potenciales cliques centrales. Para ello, utilizaremos técnicas de descomposición del grafo, las cuales a su vez nos ayudarán para obtener más propiedades estructurales de los grafos estrella extendida.

Referencias

- [1] F. Gavril, *The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs*, Journal of Combinatorial Theory (Series B), 16:47–56, 1974.
- [2] M. Gutierrez y S. Tondato, *Extended star graph*, aceptado para su publicación en Algebra and Discrete Mathematics.

UNA VERSIÓN COMBINATORIA DE LA INVERSA DE DRAZIN PARA ÁRBOLES

Expositor: Rodrigo Sota (Universidad Nacional de San Luis, rodrigo.a.sota@gmail.com)

Autor/es: Rodrigo Sota (Universidad Nacional de San Luis, rodrigo.a.sota@gmail.com); Daniel A. Jaume (Universidad Nacional de San Luis, djaume@unsl.edu.ar)

Hallar el número de matchings máximos en un árbol no es difícil: basta tomar el valor absoluto del producto de todos los autovalores no nulos (incluida la multiplicidad) de la matriz de adyacencia $A(T)$. Sin embargo hallar todos los matchings máximos es un problema difícil. Entre otras cuestiones, en este trabajo respondemos la siguiente pregunta, ¿en cuántos matchings máximos se encuentran una arista dada de un árbol T ? Para ello introducimos una versión combinatoria de la inversa de Drazin de la matriz de adyacencia de T .

LOS GRAFOS DE KNESER ESTABLES, CONJETURAS Y PARTICULARIDADES

Expositor: Pablo Torres (Universidad Nacional de Rosario, ptorres@fceia.unr.edu.ar)

Autor/es: Pablo Torres (Universidad Nacional de Rosario, ptorres@fceia.unr.edu.ar)

Sean n y k dos números naturales tales que $n \geq 2k$ y sea $[n] = \{1, \dots, n\}$, el grafo de Kneser $KG(n, k)$ tiene como vértices los subconjuntos de tamaño k (k -subconjuntos) de $[n]$ y dos vértices son adyacentes si y solo si tienen intersección vacía. Estos grafos fueron definidos por M. Kneser en 1955 y desde entonces una amplia variedad de trabajos han sido dedicados a su estudio. A partir de los grafos de Kneser se definen nuevas familias de grafos en función de los resultados que han sido obtenidos en el estudio de las distintas propiedades de estos grafos, entre ellos los grafos Schrijver y los grafos de Kneser estables. Entre los problemas abiertos para estas familias de grafos se encuentran el de determinar si los grafos de Kneser estables son hom-idempotentes y el de hallar su número cromático. En ambos problemas solo existen trabajos en los que se analizan algunos casos particulares pero el problema general permanece aún sin resolución. En esta charla mostraremos algunos avances y particularidades de estos problemas.

CARACTERIZANDO LOS GRAFOS PROBE DE INTERVALOS UNITARIOS DENTRO LA CLASE DE LOS GRAFOS DE INTERVALO

Expositor: Luciano Grippo (Universidad Nacional de General Sarmiento, lgrippo@ungs.edu.ar)
Autor/es: Luciano Grippo (Universidad Nacional de General Sarmiento, lgrippo@ungs.edu.ar)

Un grafo G es de *intervalos* si es el grafo de intersección de una familia $\mathcal{S}$ de intervalos en la recta real. Se dice que dicha familia $\mathcal{S}$ es un *modelo de intervalos de G* . Un grafo es de *intervalos unitarios* si es un grafo de intervalos que posee un modelo de intervalos con todos sus intervalos de la misma longitud. Los grafos de intervalos fueron caracterizados por subgrafos prohibidos minimales en [1]. Roberts probó que un grafo de intervalos es de intervalos unitarios si y solo si no contiene al grafo $K_{1,3}$ como subgrafo inducido [2].

Un grafo es *probe de intervalos unitarios* si su conjunto de vértices se puede particionar en dos conjuntos: un conjunto de *vértices probe* y un conjunto de vértices *nonprobe*, de forma tal que el conjunto de vértices *nonprobe* es un conjunto independiente de vértices y es posible obtener un grafo de intervalos unitarios mediante el agregado de aristas con ambos extremos en el conjunto de los vértices *nonprobe*. En vista de la caracterización de Roberts, surge una pregunta natural. ¿Cuál es la familia completa de subgrafos prohibidos minimales de intervalos para la familia de los grafos *probe* de intervalos unitarios?. En este trabajo respondemos esta pregunta, presentando una caracterización por subgrafos prohibidos minimales para la clase de los grafos *probe* de intervalos unitarios, dentro de la clase de los grafos de intervalos.

Referencias

- [1] Lekkerkerker, C. G.; Boland, J. Ch. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. Fund. Math. 51 1962/1963 45—64.
 - [2] Roberts, Fred S. Indifference graphs. 1969 Proof Techniques in Graph Theory (Proc. Second Ann Arbor Graph Theory Conf., Ann Arbor, Mich., 1968) pp. 139–146 Academic Press, New York.
-

Expositor: Sebastián Simondi (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo, sebastian.simondi@gmail.com)

Autor/es: Sebastián Simondi (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo, sebastian.simondi@gmail.com); Gastón Quero (Facultad de Agronomía de la Universidad de la República, gastonquero@fagro.edu.uy)

El mapeo asociativo (MA), también conocido como mapeo por desequilibrio de ligamiento (LD), es una herramienta estadística que permite identificar regiones específicas del genoma relacionadas con la variación de un carácter fenotípico de interés. Ésta estrategia nace en el contexto del estudio de enfermedades en humanos por la imposibilidad de desarrollar poblaciones provenientes de cruzamientos controlados. En los últimos años, se ha incrementado el uso del MA como estrategia para la identificación de regiones genómicas o QTL, involucradas con la expresión de características complejas de interés agronómico, tales como rendimiento, tiempo a floración, resistencia a enfermedades, etc. En este contexto, donde el número de marcadores utilizados ha aumentado exponencialmente, debido en parte a técnicas alta producción, es necesaria la implementación de nuevos algoritmos computacionales capaces de identificar QTL con efectos menores sobre la expresión del fenotipo. En esta comunicación se presentará a clusterhap un software desarrollado bajo R capaz de agrupar individuos según los haplotipos presentes en una población para de un determinado QTL. Una de ventajas de clusterhap es que realiza este agrupamiento, independientemente de si los genotipos poseen o no datos faltantes en los marcadores de la región analizada

SOBRE NUEVAS COTAS PARA LOS NÚMEROS DE k -EMPAQUETAMIENTOS LIMITADOS EN GRAFOS

Expositor: María Inés Lopez Pujato (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, mineslpk@hotmail.com)

Autor/es: María Inés Lopez Pujato (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, mineslpk@hotmail.com); Valeria Leoni (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, valeoni@fceia.unr.edu.ar)

Resumen

Muchos problemas de interés práctico y teórico requieren cubrir o empaquetar objetos dentro de una estructura dada. Por ejemplo, uno puede requerir cubrir con el menor número posible de sensores cierta zona para ser monitoreada, teniendo en cuenta que pocos sensores cercanos a un determinado lugar dificulte el control. O, uno puede querer ubicar la mayor cantidad de contenedores radioactivos en cierto lugar, tratando de que no demasiados estén demasiado próximos entre sí. Estos problemas pueden ser modelados, respectivamente, como ciertas variaciones de dominación y empaquetamientos en grafos, a través de k -uplas dominantes y k -empaquetamientos limitados, donde k es el número de sensores requeridos o el número de contenedores radioactivos permitidos.

Para un entero $k \geq 1$ y un grafo G dados, las k -uplas dominantes en G —concepto introducido en 2000— y los k -empaquetamientos limitados —concepto introducido en 2010 por Gallant y otros [3]— son generalizaciones de dos nociones duales muy conocidas en teoría de grafos como son los conjuntos dominantes y 2-empaquetamientos, respectivamente. Para cada k fijo, el problema de hallar una k -upla dominante de tamaño mínimo ($\gamma_{\times k}(G)$) como así también el de hallar un k -empaquetamiento limitado de tamaño máximo ($L_k(G)$) son ambos NP-completos para grafos generales desde el punto de vista de sus complejidades computacionales.

Mientras que determinar el valor exacto de $\gamma_{\times k}(G)$ y $L_k(G)$ para un grafo general G no es fácil, algunos trabajos continúan apareciendo en la literatura en relación a la búsqueda de buenas cotas para los mismos. Sin embargo, por ser un concepto relativamente nuevo, no son muchas las cotas existentes para $L_k(G)$.

Por un lado, no existían cotas inferiores para $L_k(G)$ hasta que en un trabajo reciente y a través de un enfoque probabilístico, Gagarin y Zverovich presentan una [2]. Aunque esa cota parece tener una buena performance en instancias del problema que se resuelven en tiempo polinomial, haciendo uso de resultados que se encuentran en [1], en el presente trabajo exhibimos un conjunto infinito de instancias donde el mismo es NP-completo y la cota de Gagarin y Zverovich no funciona bien (en el sentido en que no mejora siquiera la cota natural dada por k). En cuanto a cotas superiores para $L_k(G)$, se conoce que $L_k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$ para todo $k \leq \delta(G)$ [3] y otra que resulta de la desigualdad $L_k(G) \leq \gamma_{\times k}(G)$ [2]. En el presente trabajo también mostramos una prueba de que estas cotas superiores conocidas pueden ser mejoradas para todos los valores de k considerados. Nuestra prueba es independiente de la relación dual entre los números $L_k(G)$ y $\gamma_{\times k}(G)$.

Referencias

- [1] M. P. Dobson, V. Leoni, and G. Nasini, The Multiple Domination and Limited Packing Problems in Graphs, Inform. Processing. Letters 111 (2011) 1108-1113.
- [2] A. Gagarin and V. Zverovich, The probabilistic approach to limited packing in graphs, Discrete Applied Mathematics 184 (2015) 146-153.
- [3] Gallant, R., Gunther, G., Hartnell, B., Rall, D., Limited Packings in graphs. Discrete Applied Mathematics 158-12 (2010) 1357-1364.

EL CONJUNTO SETWISE ESTABLE EN UN MODELO DE ASIGNACIÓN MUCHOS-A-MUCHOS

Expositor: Paola Belén Manasero (Instituto de Matemática Aplicada San Luis - UNSL-, pb-manasero@gmail.com)

Autor/es: Paola Belén Manasero (Instituto de Matemática Aplicada San Luis - UNSL-, pb-manasero@gmail.com); Alejandro Neme (Instituto de Matemática Aplicada San Luis - UNSL-, aneme@unsl.edu.ar)

Gale y Sotomayor (1985) en un modelo de asignación muchos-a-uno con preferencias *responsivas con cuota*, conocido en la literatura como “*the college admission problem*” describen el mercado de matrimonio *relativo* al modelo muchos-a-uno. Ellos definen una correspondencia natural inyectiva entre las asignaciones de ambos modelos descriptos, la cual es usada para trasladar muchos de los resultados clásicos demostrados en los mercados uno-a-uno al *the college admission problem*. Dicha correspondencia, tiene la propiedad de preservar la estabilidad de las asignaciones entre ambos modelos. En la primera parte de nuestro trabajo, extendemos lo estudiado por Gale y Sotomayor (1985) a un mercado de asignación muchos-a-muchos con preferencias *responsivas con cuota* de un lado del mercado, y estudiamos cómo definir las preferencias de los agentes en su mercado muchos-a-uno *relativo* para conservar la estabilidad de las asignaciones. Luego, definimos una aplicación entre el conjunto de asignaciones de un mercado muchos-a-muchos con preferencias *responsivas con cuota* de un lado del mercado y el conjunto de asignaciones del mercado muchos-a-uno *relativo*, la cual restringida al conjunto de asignaciones estables es biyectiva y de esta manera preservamos la estabilidad de las asignaciones entre

ambos modelos. Sotomayor (1999) en un modelo de asignación muchos-a-muchos, define una versión del concepto de *estabilidad por grupo*, a la que llamó *setwise estabilidad*, que es el conjunto de asignaciones individualmente racionales que no pueden ser bloqueadas por una coalición que forma nuevas asignaciones solo entre sus miembros, pero puede preservar alguna de sus asignaciones de agentes fuera de la coalición. Así, como una aplicación de la función biyectiva definida, probamos que el modelo de asignación muchos-a-muchos con preferencias *responsivas con cuota* de un lado del mercado, y su modelo *relativo* muchos-a-uno, tienen conjuntos de soluciones *setwise estable* equivalentes. Dado que, en los modelos de asignación muchos-a-uno con preferencias *sustituibles* se cumple que el conjunto de asignaciones *estables* y el conjunto de asignaciones *setwise estable* coinciden, probamos como un resultado inmediata de dicha equivalencia, que en un modelo de asignación muchos-a-muchos tal que los agentes de un lado del mercado tienen preferencias *sustituibles* y del otro lado tienen preferencias *responsivas con cuota*, el conjunto de asignaciones *estable* y el conjunto de asignaciones *setwise estable* coinciden, y por lo tanto este último es no vacío. Además, demostramos que esta equivalencia respeta los órdenes de los agentes sobre las asignaciones *setwise estable* lo cual implica que el conjunto de asignaciones *setwise estable* en dicho modelo muchos-a-muchos tiene estructura de reticulado con los correspondientes órdenes de Blair (1988), de aquí se sigue que en ambos modelos los conjuntos de soluciones *setwise estable* tienen estructura de reticulado equivalentes.

Referencias

1. Blair, C. (1988), "The Lattice Structure of The set of Stable Matchings with Multiple Partners", *Mathematics of Operations Research*, **13**, 619-628.
2. Gale, D. y Sotomayor, M. (1985), "Some Remarks on the Stable Marriage Problem", *Discrete Appl. Math*, **11**, 223-232.
3. Sotomayor, M. (1999), "Three Remarks on the Many-to-Many Stable Matching Problem", *Mathematical Social Sciences*, **38**, 55-70.

UNA NOTA SOBRE EXISTENCIA DE ASIGNACIONES ESTABLES EN EL MODELO DE ASIGNACIÓN BILATERAL MUCHOS A UNO CON PREFERENCIAS Q-RESPONSIVA

Expositor: Nadia Cecillia Guiñazu (Instituto de Matemática Aplicada San Luis, nadia_cecilia@hotmail.com.ar)

Autor/es: Nadia Cecillia Guiñazu (Instituto de Matemática Aplicada San Luis, nadia_cecilia@hotmail.com.ar); Jorge Oviedo (Instituto de Matemática Aplicada San Luis, joviedo@unsl.edu.ar)

Sotomayor (1996) demostró en el modelo (M,W,P) que una asignación M-Pareto óptimo débil sobre las asignaciones W-simples es un matching estable. Simétricamente este resultado es válido para W-Pareto óptimo débil sobre los matching M-simple. Nosotros generalizamos este resultado en el modelo (F,W,P) de asignación bilateral muchos a uno con preferencias q-responsiva; este modelo se diferencia del anterior ya que no es simétrico, así obtenemos tres definiciones de asignaciones simple (F-simple fuerte, F-simple débil, W-simple). Luego damos un ejemplo de un matching que es W-Pareto óptimo débil sobre asignaciones F-simple débil pero no es un matching estable. Mientras que si son matching estables cuando utilizamos asignaciones W-Pareto óptimo débil sobre matching F-simple fuerte y también lo son las asignaciones F-Pareto óptimo débil sobre matching W-simple.

ENFOQUE POLIEDRAL DEL PROBLEMA DE DOMINACIÓN EN GRAFOS Y CUBRIMIENTO DE CONJUNTOS

Expositor: Paola Tolomei (Universidad Nacional de Rosario, ptolomei@fceia.unr.edu.ar)
Autor/es: Paola Tolomei (Universidad Nacional de Rosario, ptolomei@fceia.unr.edu.ar)

Cuando nos referimos al *enfoque poliedral* de un problema de Optimización Combinatoria partimos de un modelo de sus soluciones factibles como el conjunto S de puntos a coordenadas enteras en un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, donde A es una matriz $m \times n$ y b un vector en $\mathbb{R}^m$. Dado $c \in \mathbb{R}^n$ un vector de costos, el objetivo es hallar $\min\{cx : x \in S\}$. Claramente, si P^* es el poliedro cápsula convexa de los puntos en S , $\min\{cx : x \in S\} = \min\{cx : x \in P^*\}$.

Determinar las desigualdades lineales que participan en la descripción del poliedro P^* es una tarea de gran riqueza teórica y práctica. La existencia de un algoritmo de tiempo polinomial para la resolución del problema de optimización combinatoria y la existencia de una descripción compacta de la cápsula convexa de sus soluciones factibles por desigualdades lineales, son propiedades que generalmente se presentan juntas [2]. En esta charla abordamos este enfoque sobre instancias polinomiales del problema de cubrimiento de conjuntos de costo mínimo.

Consideremos un conjunto finito $N = \{1, \dots, n\}$ y una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos. Un subconjunto de N es un cubrimiento de $\mathcal{F}$ si tiene al menos un elemento en común con cada elemento de $\mathcal{F}$. Dado un vector de costos $c \in \mathbb{R}^n$, el costo de un subconjunto F de N es $c(F) = \sum_{i \in F} c_i$. El *problema de cubrimiento de conjuntos de costo mínimo* asociado a c y a $\mathcal{F}$, consiste en encontrar un cubrimiento de $\mathcal{F}$ con costo mínimo.

Si A es una matriz cuyas filas son los vectores característicos de los elementos de $\mathcal{F}$, un vector x de entradas 0,1 corresponde a un cubrimiento de $\mathcal{F}$ si $Ax \geq 1$. De esta forma, los vectores característicos de los cubrimientos de $\mathcal{F}$ son los vectores 0,1 del poliedro $Q(A) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq 1\}$. Entonces, el problema de cubrimiento de conjuntos asociado a c y $\mathcal{F}$ consiste en encontrar $\min\{cx : x \in Q^*(A)\}$. Este problema es NP-difícil para familias de conjuntos generales.

Uno de los problemas de cubrimiento de conjuntos más estudiados corresponde al problema de *dominación en grafos*. En este caso, dado un grafo G , un subconjunto de nodos D es un *conjunto dominante de G* si interseca a las vecindades cerradas de todos sus nodos. O sea, D es un cubrimiento de la familia de conjuntos $\mathcal{F}$ que incluye las vecindades cerradas de todos sus nodos. En este caso, la matriz A que permite su enfoque poliedral, se conoce como $N[G]$.

Se sabe que el problema de dominación en *grafos circulares* puede ser resuelto en tiempo polinomial. Si G es un grafo circular, $N[G]$ es una matriz circular. Un caso particular de grafos circulares son los grafos redes, para los cuales $N[G]$ es una matriz circulante. En trabajos previos [1] se trabajó en la búsqueda del poliedro de cubrimiento cuando la matriz A es circulante, pudiendo lograr el objetivo en familias muy particulares de esta clase de matrices.

En esta charla presentamos los resultados de un trabajo en colaboración con S. Bianchi, G. Nasini y L.M. Torres, donde se logra la descripción completa del problema de cubrimiento de conjuntos cuando A es una matriz circular cualquiera, cerrando también la búsqueda de tal descripción para matrices circulantes generales.

Referencias

- [1] P. Tolomei, *Matrices circulantes: relevancia de los menores circulantes en la descripción de su poliedro de cubrimiento*, Tesis doctoral, Universidad Nacional de Rosario, 2012.
- [2] L. Wolsey. Integer Programming. John Wiley and Sons, 1998.

Expositor: Jorge Oviedo (Instituto de Matemática Aplicada San Luis. UNSL-CONICET, joviedo12@gmail.com)

Autor/es: Jorge Oviedo (Instituto de Matemática Aplicada San Luis. UNSL-CONICET, joviedo12@gmail.com)

En este trabajo extendemos el concepto de estrategia evolucionariamente estable para juegos simétricos para 3 o más jugadores. Estrategias evolucionariamente estable fue definida por Smith y Price (1973) para juegos simétricos bimatriciales. Una estrategia evolucionariamente estable, es una estrategia que se perpetúa el tiempo por no ser vulnerable la estrategias alternativas. Mostramos que cualquier juego simétrico tiene equilibrio de Nash. Similarmente como los juegos simétricos bimatriciales mostramos que los juegos simétricos de n -personas el conjunto de equilibrio evolucionariamente estable es finito (posiblemente puede ser vacío).

DESCOMPOSICIÓN AUTOVECTORIAL DE ÁRBOLES

Expositor: Gonzalo Molina (Universidad Nacional de San Luis, lgmolina@unsl.edu.ar)

Autor/es: Gonzalo Molina (Universidad Nacional de San Luis, lgmolina@unsl.edu.ar); Daniel A. Jaume (Universidad Nacional de San Luis, djaume@unsl.edu.ar)

En este trabajo presentamos una descomposición de árboles basada en el estudio del espacio nulo de su matriz de adyacencia. Estudiando el soporte del espacio nulo podemos descomponer cualquier árbol en bloques singulares, llamados S-subárboles, y bloques no-singulares, llamados N-subárboles. Esta descomposición es esencialmente única para cada árbol.

Utilizamos dicha descomposición para estudiar varios problemas en árboles como dominación, independencia, matching number, etc. Por ejemplo, demostramos que el número de matching máximos de un árbol T solo depende de su S-bosque (el bosque dado por todos los S -subárboles de T).

SOBRE p -PARTICIONES CONVEXAS Y p -CUBRIMIENTOS CONVEXOS

Expositor: Lucía González (Universidad Nacional de General Sarmiento, lgonzale@ungs.edu.ar)

Autor/es: Lucía González (Universidad Nacional de General Sarmiento, lgonzale@ungs.edu.ar); Luciano Grippo (Universidad Nacional de General Sarmiento, lgrippo@ungs.edu.ar); Martín D. Safe (Universidad Nacional del Sur, Universidad Nacional de General Sarmiento, msafe@uns.edu.ar); Vinícius F. Dos Santos (Universidade Federal de Minas Gerais, viniciussantos@dcc.ufmg.br)

Las convexidades en grafos han sido ampliamente estudiadas en los últimos años. En la literatura se pueden encontrar muchos artículos que tratan sobre problemas algorítmicos y sobre la complejidad de parámetros relacionados con convexidades en grafos. Es interesante comparar el comportamiento de estos parámetros en diferentes convexidades desde un punto de vista tanto algorítmico como de su complejidad.

Si $\mathcal{P}$ es un conjunto de caminos en un grafo G y $\mathcal{C}$ es la colección de todos los subconjuntos S de $V(G)$ tal que para todo $P \in \mathcal{P}$, cuyos vértices extremos pertenecen a S , cada vértice de P pertenece a S , entonces $\mathcal{C}$ es una convexidad en el grafo. Algunos ejemplos son: la *convexidad monofónica*, la P_3^* -convexidad, y la P_3 -convexidad, cuyos conjuntos convexos son aquellos generados por los caminos inducidos, los caminos inducidos de longitud dos, y los caminos de

longitud dos del grafo, respectivamente. Los conjuntos convexos de un grafo G bajo la *convexidad digital* son los conjuntos S de G tales que para cada vértice $v \in V(G)$, si $N_G[v] \subseteq N_G[S]$, entonces $v \in S$.

Dado un grafo G , el problema de particionar $V(G)$ en p conjuntos convexos y el problema de cubrir $V(G)$ con p conjuntos convexos fueron introducidos en [1] y [2], respectivamente. En este trabajo presentaremos resultados algorítmicos y de complejidad para ambos problemas, en las convexidades mencionadas en el párrafo anterior.

Referencias

- [1] D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter. Partitioning a graph into convex sets. *Discrete Math.* 311 (2011), no. 17, 1968–1977.
- [2] D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter. Convex covers of graphs. *Mat. Contemp.*, 39 (2010), 31–38.

SOBRE LA CONJETURA DEL COLOREO ADITIVO

Expositor: Daniel Esteban Severin (Univ. Nac. de Rosario - CONICET, daniel@fceia.unr.edu.ar)

Autor/es: Daniel Esteban Severin (Univ. Nac. de Rosario - CONICET, daniel@fceia.unr.edu.ar)

Sea un grafo finito y simple $G = (V, E)$, sea $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una asignación de etiquetas a G y sea $f(W) = \sum_{w \in W} f(w)$ para cualquier $W \subset V$. Decimos que f es un *k-coloreo aditivo* si, para todo $(u, v) \in E$, $f(N(u)) \neq f(N(v))$. El *número cromático aditivo* de G , $\eta(G)$, es definido como el menor k para el cual G tiene un *k-coloreo aditivo*. Hallar este parámetro es, al igual que en el coloreo clásico, *NP-difícil*. En 2009, Czerwi ski, Grytczuk y  elazny propusieron la *Conjetura del Coloreo Aditivo* que dice que, para todo grafo G , $\eta(G) \leq \chi(G)$, donde $\chi(G)$ es el número cromático clásico de G . Incluso, hasta la fecha, se desconoce si $\eta(G) \leq 2$ para G bipartito. Entre las restringidas familias donde esta conjetura está comprobada se encuentran los completos, los árboles y los grafos planares no-bipartitos con girth al menos 26.

En este trabajo obtenemos cotas y valores exactos de $\eta(G)$ para diferentes familias de grafos, probando que la conjetura se satisface en todas ellas.

En el caso de los *grafos multipartitos completos* probamos que, si $G = (V_1 \cup \dots \cup V_r, E)$ es el grafo completo r -partito ($V_1, \dots, V_r$ son sus conjuntos estables) y $|V_i| \geq |V_{i+1}|$ para todo $i \in \{1, \dots, r-1\}$ entonces $\eta(G) = \max\{\lceil \frac{s_i}{|V_i|} \rceil : i \in \{1, \dots, r\}\}$ donde $s_r = |V_r|$ y $s_i = \max\{1 + s_{i+1}, |V_i|\}$ para todo $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Más aún, $\eta(G) \leq r = \chi(G)$.

En el caso de los *grafos split* probamos que, si $G = (Q \cup S, E)$ es un grafo split cuya clique máxima es Q y $T \subset Q$ es un conjunto no vacío tal que los grados de cada vértice de T son todos distintos entre sí, entonces $\eta(G) \leq |Q| - |T| + 1 \leq |Q| = \chi(G)$. Para familias particulares de splits también pudimos calcular el número cromático aditivo de forma exacta. Si G es un split completo de clique máxima Q , entonces $\eta(G) = |Q| - 1$. Si G es una ar a (flaca o gorda) sin cabeza y con q patas, entonces $\eta(G) = \lceil \frac{q+1}{2} \rceil$. Si G es un sol completo con m rayos, entonces $\eta(G) = \lceil \frac{m+2}{3} \rceil$.

También probamos que si G es un grafo de n vértices y Δ es el mayor grado en G , entonces $\eta(G \vee K_q) = \max\{\eta(G), q\}$ para todo $q \leq n - \Delta - 1$, donde $G \vee K_q$ es el grafo que resulta de hacer la operación *join* entre G y un grafo completo de tamaño q . Usando este resultado con

$q = 1$ probamos lo siguiente. Si G es un n -fan ($P_{n+1} \vee K_1$) con $n \geq 3$, entonces $\eta(G) = 2$. Si G es el grafo Windmill (m copias de K_n que comparten un mismo vértice) con $n \geq 3$ y $m \geq 2$, entonces $\eta(G) = n - 1$. Si G es un grafo rueda ($C_n \vee K_1$) con $n \geq 4$, entonces $\eta(G) = 2$ si n es par y $\eta(G) = 3$ si n es impar.

MATCHING FRACCIONARIOS FUERTEMENTE ESTABLES

Expositor: Pablo Neme (I.M.A.S.L. (U.N.S.L.), pabloneme08@gmail.com)

Autor/es: Pablo Neme (I.M.A.S.L. (U.N.S.L.), pabloneme08@gmail.com); Jorge Oviedo (I.M.A.S.L. (U.N.S.L.), joviedo12@gmail.com)

Roth, Rothblum y Vande Vate (1993), para el modelo de matching uno a uno (Modelo de Matrimonio), plantearon un programa lineal, cuyas restricciones son el conjunto de desigualdades lineales utilizadas por Vande Vate (1989) y Rothblum (1992). Mostraron que el conjunto de matching estables son exactamente los vértices del politopo. Caracterizaron las soluciones no necesariamente enteras del programa lineal, las cuales en nuestro modelo las llamaremos matching fraccionarios débilmente estables, a las que podemos pensar como una distribución de probabilidad sobre el conjunto de matching estables.

Observaron que un matching fraccionarios débilmente estable puede estar bloqueado por una pareja, así definieron la estabilidad fuerte, como los matching fraccionarios débilmente estables los cuales no estén bloqueados.

En este trabajo estudiamos el conjunto de matching fraccionarios fuertemente estables desde otro ángulo.

Caracterizamos el conjunto de matching fraccionarios fuertemente estables como combinaciones convexas de *ciertos* vértices, matching estables. Estos se diferencian de los matching fraccionarios débilmente estables, ya que estos últimos son *todas* las combinaciones convexas de los vértices del politopo.

Nuestra caracterización de los matching fraccionarios fuertemente estables se basa en identificar los vértices que son necesarios (y suficientes) para definir la combinación convexa. Dichos vértices son caracterizados por un matching estable (μ) y sus matching estables cíclicos, a este conjunto lo denotamos por $\mathcal{M}_\mu$. Estos matching cíclicos se construyen usando una adaptación del algoritmo para calcular todos los matching estables de Irving y Leather (1986). Así probamos que cada matching fraccionario fuertemente estable es una combinación convexa de matching cíclicos. Por lo que el conjunto de los matching fraccionarios fuertemente estable será igual a la unión de las capsulas convexas de los conjuntos $\mathcal{M}_\mu$ para cada matching μ estable.

EL PROBLEMA DE DOMINACIÓN GRUNDY PARA GRAFOS BLOCK

Expositor: Carolina Gonzalez (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR, caro811@gmail.com)

Autor/es: Gabriela Argiroffo (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR, garua@fceia.unr.edu.ar); Carolina Gonzalez (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR, caro811@gmail.com)

Una sucesión $(x_1, \dots, x_k)$ de vértices de un grafo G es una sucesión de dominación *legal* si, para todo $i = 2, \dots, k$,

$$N[x_i] - \cup_{j=1}^{i-1} N[x_j] \neq \emptyset.$$

Una *sucesión de dominación Grundy* es una sucesión de dominación legal de máxima cardinalidad. El número de dominación Grundy de un grafo G , denotado $\gamma_{gr}(G)$, es el máximo cardinal de una sucesión de dominación Grundy. En este trabajo consideraremos el problema de decisión asociado, es decir:

Problema de dominación Grundy (DOM-GR)

Instancia: $G = (V, E)$, j natural

Pregunta: ¿Admite G una función de sucesión de dominación Grundy de cardinal por lo menos j ?

Este problema fue estudiado en [1], donde se prueba que DOM-Gr es NP-completo para grafos en general. Más aún, el problema también es NP-completo para grafos cordales. En el mismo trabajo, los autores presentan un algoritmo lineal que permite calcular el número de dominación Grundy de árboles.

En esta contribución estudiamos DOM-Gr para grafos *block*. En particular, probamos que el problema se puede resolver en tiempo polinomial para esta familia de grafos.

Referencias

- [1] B. Brešar, T. Gologranc, M. Milanič, D. Rall, R. Rizzi, *Dominating sequences in graphs*, Discrete Mathematics 336 (2014) 22–36.

CARACTERIZACIÓN DE LOS GRAFOS QUE SON INTERSECCIÓN POR VÉRTICES DE CAMINOS EN UNA GRILLA DENTRO DE LAS CLASE DE LOS GRAFOS BLOCK

Expositor: María Pía Mazzoleni (Universidad Nacional de La Plata y CONICET, pia@mate.unlp.edu.ar)

Autor/es: Liliana Alcón (Universidad Nacional de La Plata, liliana@mate.unlp.edu.ar); Flavia Bonomo (Universidad de Buenos Aires y CONICET, fbonomo@dc.uba.ar); María Pía Mazzoleni (Universidad Nacional de La Plata y CONICET, pia@mate.unlp.edu.ar)

Una representación VPG de un grafo G es una colección de caminos en una grilla donde los caminos representan a los vértices de G de manera que dos vértices de G son adyacentes en G si y sólo si los correspondientes caminos comparten al menos un vértice de la grilla. Un grafo que tiene una representación VPG es llamado un grafo VPG. En este trabajo, consideramos la subclase B_0 -VPG.

Una representación B_0 -VPG de G es una representación VPG en la cual cada camino representante es horizontal o vertical. Un grafo es B_0 -VPG si tiene una representación B_0 -VPG.

Reconocer a esta clase de grafos es un problema NP-completo. Aunque, existe un algoritmo polinomial para reconocer a los grafos Cordales B_0 -VPG.

En este trabajo, presentamos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales de los grafos B_0 -VPG restringidos a los grafos Block. Además, la prueba del teorema principal provee un algoritmo de reconocimiento alternativo para los grafos B_0 -VPG en la clase de los grafos Block.

ON SOCIETIES CHOOSING SOCIAL OUTCOMES, AND THEIR MEMBERSHIPS:
STRATEGY-PROOFNESS

Expositor: Alejandro José Neme (Instituto de Matemática Aplicada de San Luis. Universidad Nacional de San Luis and CONICET, neme.alejandroj@gmail.com)

Autor/es: Alejandro José Neme (Instituto de Matemática Aplicada de San Luis. Universidad Nacional de San Luis and CONICET, neme.alejandroj@gmail.com)

We consider a society whose members have to choose not only an outcome from a given set of outcomes but also the subset of agents that will remain members of the society. We assume that each agent is indifferent between any two alternatives (pairs of final societies and outcomes) provided that the agent does not belong to any of the two final societies, regardless of the chosen outcome. Under this preference domain restriction we characterize the class of all strategy-proof, unanimous and non-bossy rules as the family of all serial dictator rules.

SOBRE LA ENERGÍA LAPLACIANA DE DIGRAFOS (h, j) ADJUNTOS DE PATHS Y CICLOS

Expositor: Teresa Claudia Braicovich (UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE, tere-sabraicovich@gmail.com)

Autor/es: Teresa Claudia Braicovich (UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE, tere-sabraicovich@gmail.com); Raquel Cognigni (UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE, rcognigni@gmail.com)

Temas relevantes dentro de la Teoría de Grafos son la adjunción, el espectro y la energía. Dentro de la adjunción, consideramos los digrafos (h, j) adjuntos, ${}^{h,j}G$, cuyos vértices son los caminos del digrafo G de longitud h y cuya relación de precedencia ${}^{h,j}\sigma$ está definida por: $y \in {}^{h,j}G(x)$ si y sólo si el j -subcamino final de x coincide con el j -subcamino inicial de y (no necesariamente $x \neq y$). Se mostrarán los digrafos (h, j) adjuntos de los paths P_n y de los ciclos C_n en términos generales, en función de los parámetros n, h y j . Las caracterizaciones son las siguientes para cada uno de los casos mencionados:

-tPara el caso de los paths se tiene que el digrafo (h, j) adjunto de P_n es de orden $(n - h)$ y es la unión de $(h - j)$ componentes conexas. Al hacer la división entre $(n - h)$ y $(h - j)$ nos da un cociente d y un resto r , es decir $n - h = (h - j) \cdot d + r$. Si el resto r es igual a 0 el digrafo (h, j) adjunto de P_n es la unión de $(h - j)$ componentes conexas de orden d . Si el resto r es distinto de 0 el digrafo (h, j) adjunto de P_n es la unión de $(h - j - r)$ componentes conexas P_d y r componentes conexas P_{d+1} .

-tPara el caso de los ciclos se tiene que el digrafo (h, j) adjunto de C_n es de orden n e igual a la unión de d componentes conexas iguales, siendo d el máximo común divisor (MCD) entre los valores n y $(h - j)$ y el orden de cada una de las componentes es igual al cociente entre los valores n y d .

A partir de lo anteriormente citado se analizó y encontraron algunas regularidades para la energía de dichos dígrafos. Una de ellas referida a la relación existente entre la energía del digrafo (h, j) adjunto y la suma de las energías de sus componentes conexas. Es sabido que la energía ordinaria coincide con la suma de las energías de sus componentes conexas, pero en el caso de la energía laplaciana esto no siempre es así. En el caso de ciclos ambos valores coinciden para la energía laplaciana. En cambio, para los paths no se puede generalizar, en algunos casos es mayor la energía del (h, j) adjunto que la suma de las energías de sus componentes conexas, en otros es menor y también existen casos, cuando el (h, j) adjunto de P_n son $(h - j)$ componentes iguales, en que ambas energías coinciden./

Referencias bibliográficas:

Brouwer, A.; Haemers, W. (2011) Spectra of graphs. Ed. Springer.

Chiappa, R. (1982) Palabras circulares equilibradas. Grafos Adjuntos. INMABB – CONICET. Universidad Nacional del Sur.

Chung, F. (1997) Spectral Graph Theory. American Mathematical Society with support from the National Science Foundation.

Fritscher, E. (2011). Propriedades espectrais de um grafo. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

Gutman, I; Zhou, B (2006). Laplacian energy of a graph. Linear Algebra and its applications 414. 29-37.

CARACTERIZACIÓN Y DETECCIÓN EN TIEMPO LINEAL DE LAS OBSTRUCCIONES MINIMALES PARA LOS GRAFOS CONCAVE-ROUND Y LA PROPIEDAD DE LOS UNOS CIRCULARES

Expositor: Martín D. Safe (Universidad Nacional del Sur y Universidad Nacional de General Sarmiento, msafe@uns.edu.ar)

Autor/es: Martín D. Safe (Universidad Nacional del Sur y Universidad Nacional de General Sarmiento, msafe@uns.edu.ar)

Un grafo es *concave-round* si sus vértices pueden enumerarse circularmente de modo que la vecindad cerrada de cada vértice sea un intervalo de dicha enumeración. Alan Tucker [7] fue el primero en estudiar la clase de los grafos concave-round, demostrando que es una subclase de la clase de los grafos arco-circulares y una superclase de la clase de los grafos arco-circulares propios. En este trabajo obtenemos la lista de subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de los grafos concave-round, resolviendo así un problema planteado en [1]. También probamos que es posible encontrar en tiempo lineal uno de dichos subgrafos inducidos prohibidos minimales en cualquier grafo dado que no sea concave-round. Como parte del análisis, a partir de resultados en [5] y [8] obtenemos las submatrices prohibidas minimales para la propiedad de los unos circulares para filas (reportadas como desconocidas en [2]) y para filas y columnas y, también para cada una de las dos variantes de la propiedad, un algoritmo de tiempo lineal que devuelve un correspondiente ordenamiento circular o una submatriz prohibida minimal. En este trabajo estudiamos también la relación entre los grafos concave-round y otras clases de grafos arco-circulares. Observamos que a partir de resultados en la literatura [3, 4, 6, 7] es posible concluir que los grafos concave-round son arco-circulares normales. Nuestros resultados implican que un grafo arco-circular Helly es concave-round si y sólo si es quasi-line. Más aún, hallamos la lista de subgrafos inducidos prohibidos minimales de la intersección entre la clase de los grafos concave-round y la clase de los grafos arco-circulares Helly.

Referencias

- [1] J. Bang-Jensen, J. Huang, and A. Yeo. Convex-round and concave-round graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 13(2):179–193, 2000.
- [2] M. Dom, J. Guo, and R. Niedermeier. Approximation and fixed-parameter algorithms for consecutive ones submatrix problems. *J. Comput. Syst. Sci.*, 76(3-4):204–221, 2010.
- [3] M. C. Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [4] P. Hell and J. Huang. Interval bigraphs and circular arc graphs. *J. Graph Theory*, 46(4):313–327, 2004.

- [5] N. Lindzey and R. M. McConnell. Linear-time algorithms for finding Tucker submatrices and Lekkerkerker–Boland subgraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 30(1):43–69, 2016.
- [6] H. Müller. Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time. *Discrete Appl. Math.*, 78(1-3):189–205, 1997.
- [7] A. Tucker. Matrix characterizations of circular-arc graphs. *Pacific J. Math.*, 39(2):535–545, 1971.
- [8] A. Tucker. A structure theorem for the consecutive 1’s property. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 12(2):153–162, 1972.

R-SEQUENCIABILIDAD DE GRUPOS ABELIANOS

Expositor: Adrián Gabriel Pastine (Michigan Technological University, agpastine@gmail.com)
 Autor/es: Adrián Gabriel Pastine (Michigan Technological University, agpastine@gmail.com);
 Donald L Kreher (Michigan Technological University, kreher@mtu.edu); Brian Alspach (University of Newcastle, brian.alspach@newcastle.edu.au)

En 1974 Gerhard Ringel introdujo el problema de *R*-sequeñciabilidad al estudiar coloreo de mapas sobre variedades 2-dimensionales. Un grupo G es *R-sequeñciable* si sus elementos distintos de la identidad pueden ser ordenados cíclicamente, $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$, tal que los productos $g_i^{-1}g_{i+1}$ son todos distintos (con subíndice modulo $n - 1$).

El digrafo de Cayley completo Γ de un grupo G , es el digrafo completo con $|G|$ vértices, donde el arco (x, y) tiene la etiqueta $x^{-1}y$. Un subgrafo H de Γ es *ortogonal* si por cada elemento distinto de la identidad, $z \in G \setminus e$, H contiene exactamente un arco con la etiqueta z . En este lenguaje el problema de Ringel pregunta para qué grupos G el digrafo completo Γ admite un ciclo dirigido ortogonal.

En este trabajo estudiamos la *R*-sequeñciabilidad de los grupos abelianos.

SOBRE POSETS k -TREE QUE ADMITEN UN MODELO POR CONTENCIÓN DE CAMINOS EN UN ÁRBOL

Expositor: Noemí Amalia Gudiño (CONICET; DTO DE MATEMATICA FCE UNLP; DTO CIENCIAS BASICAS FI UNLP, noemigudino@hotmail.com)

Autor/es: Noemí Amalia Gudiño (CONICET; DTO DE MATEMATICA FCE UNLP; DTO CIENCIAS BASICAS FI UNLP, noemigudino@hotmail.com); Liliana Alcón (DTO DE MATEMATICA FCE UNLP, liliana@mate.unlp.edu.ar); Marisa Gutierrez (CONICET; DTO DE MATEMATICA FCE UNLP, marisa@mate.unlp.edu.ar)

Dado un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ decimos que una familia de conjuntos $\mathcal{F} = (F_x)_{x \in X}$ es un *modelo por contención* de $\mathbf{P}$ si a cada elemento x se le puede asignar un conjunto F_x tal que $x < y$ en $\mathbf{P} \leftrightarrow F_x \subset F_y$. Cuando los elementos de la familia $\mathcal{F}$ son caminos de un árbol decimos que $\mathbf{P}$ es un poset *CPT* [2]. En [1] presentamos la siguiente condición necesaria para ser *CPT*:

Si z es un vértice de un poset *CPT* $\mathbf{P}$ entonces $\mathbf{P}(D[z])$ es un poset *CI*. (i)

Un grafo G es k -tree si puede ser construido de manera recursiva, comenzando con un completo formado por k vértices y luego, en cada paso, adicionando un vértice con exactamente k vecinos los cuales inducen un completo [3]. Decimos que un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ es k -tree si su grafo de comparabilidad $G_{\mathbf{P}}$ es un grafo k -tree.

En este trabajo probamos que, así como los grafos k -tree admiten una construcción recursiva, los posets k -tree también admiten un proceso de construcción recursivo. Como consecuencia de esta propiedad demostramos que la condición (i) es también suficiente para la clase de posets k -tree. Y obtenemos una caracterización de los posets k -tree CPT por una familia infinita de subposets prohibidos.

Referencias

- [1] L. Alcón, N. Gudiño, M. Gutierrez, *On containment graphs of paths in a tree*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, vol.50, pp. 175–180 (2015).
- [2] Golumbic, Martin Charles and Scheinerman Edward R., *Containment Graphs, Posets, and Related Classes of Graphs*, Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference, Volume 555, 192–204 (1989).
- [3] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications (1999).

COOPERATIVE AND AXIOMATIC APPROACHES TO THE KNAPSACK ALLOCATION PROBLEM

Expositor: R. Pablo Arribillaga (Instituto de Matemática Aplicada de San Luis. Universidad Nacional de San Luis and CONICET, rarribi@unsl.edu.ar)

Autor/es: R. Pablo Arribillaga (Instituto de Matemática Aplicada de San Luis. Universidad Nacional de San Luis and CONICET, rarribi@unsl.edu.ar); Gustavo Bergantiños (Universidad de Vigo, gbergant@uvigo.es)

In the knapsack problem a group of agents want to fill a knapsack with several goods. Two issues should be considered. Firstly, to decide optimally the goods selected for the knapsack, which has been studied in many papers. Secondly, to divide the total revenue among the agents, which has been studied in few papers (including this one). We associate to each knapsack problem a cooperative game and we prove that the core is non-empty. Later, we follow the axiomatic approach. We propose two rules. The first one is based in the optimal solution of the knapsack problem. The second one is the Shapley value of the so called optimistic game. We offer axiomatic characterizations of both rules.
