Las ocho geometrías de Thurston

Silvio Reggiani

Universidad Nacional de Rosario - CONICET

reggiani@fceia.unr.edu.ar

Reunión Anual de la UMA

Bahía Blanca, 20–23 de septiembre de 2016

Problema de geometrización

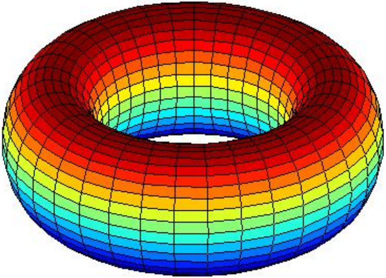
Topología

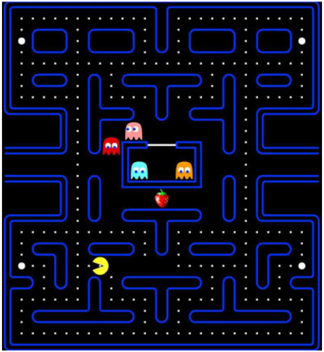
- Variedades topológicas
- Dimensión
- Noción de proximidad (cualitativa)
- Funciones continuas
- Homeomorfismos

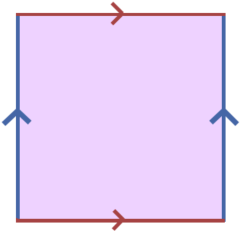
Geometría

- Variedades riemannianas
- Noción de distancia entre puntos
- Ángulos entre curvas que se intersectan
- Funciones diferenciables
- Isometrías
- Gradiente, hessiano, laplaciano, etc.

La misma variedad topológica puede admitir distintas geometrías.







Pregunta

¿Cuándo se le puede dar a una variedad topológica una única geometría que la caracterice?

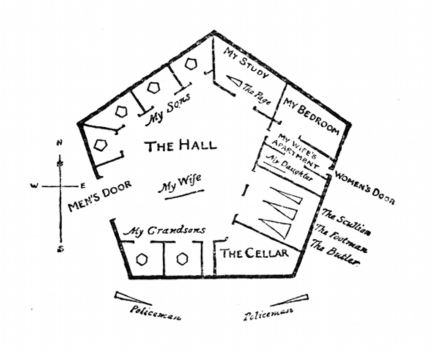
Teorema (Uniformization theorem)

Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces M admite una y sólo una de las siguientes geometrías:

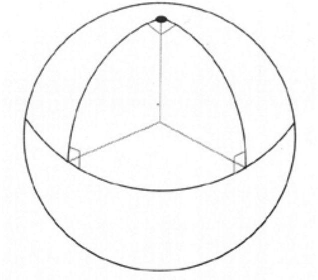
- *la geometría del plano euclidiano;*
- *la geometría de la esfera;*
- *la geometría del plano hiperbólico.*

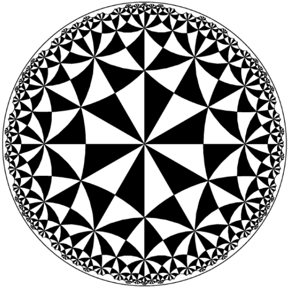
Superficies de Riemann

Localmente lucen como el plano complejo. Sus puntos pueden describirse usando coordenadas complejas $z = x + iy$ y los cambios de coordenadas están dados por una transformación holomorfa.



MY STUDY
The Page
MY BEDROOM
My Sons
THE HALL
MY WIFE'S APARTMENT
My Daughter
WOMEN'S DOOR
N
W
E
S
MEN'S DOOR
My Wife
The Scullion
The Footman
The Butler
My Grandsons
THE CELLAR
Policeman
Policeman

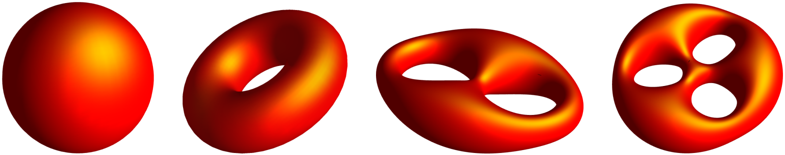




Teorema (Clasificación topológica)

Las superficies cerradas orientables se clasifican, salvo homeomorfismo, de acuerdo a su género.

- Cerrada: compacta sin borde
- Orientable: tiene dos lados
- Género: cantidad de agujeros



Teorema (Clasificación geométrica)

Una superficie cerrada y orientable admite (esencialmente) una única geometría de curvatura constante. Luego, las superficies cerradas y orientables están clasificadas de acuerdo a su característica de Euler.

Característica de Euler

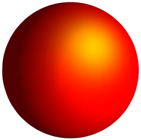
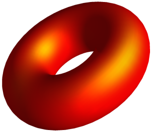
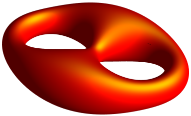
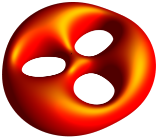
$$\chi = V - E + F$$

Gauss-Bonnet

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_M K \, dA$$

Superf. cerr. orientable

$$\chi = 2 - 2g$$

M	g	$\chi(M)$	K
	0	2	> 0
	1	0	$= 0$
	2	-2	< 0
	3	-4	< 0

El signo de la característica de Euler determina qué tipo de geometría de curvatura constante admite M

El caso tridimensional es más complejo de describir.

1. Descomponemos el espacio en *sumandos primos*.
2. Problema de geometrización para *sumandos primos*.

Teorema (Descomposición prima)

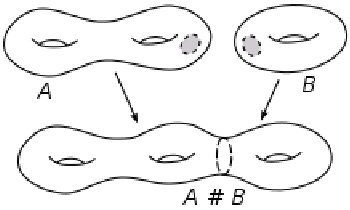
Si M es una 3-variedad cerrada y orientable, entonces M es la **suma conexa**

$$M = P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_n$$

de las **variedades primas** $P_1, \ldots, P_n$. *Los sumandos primos P_i y la descomposición anterior son únicos salvo homeomorfismo, reordenamiento y agregado o quitado de esferas tridimensionales.*

Suma conexa

La suma conexa de dos 3-variedades se realiza quitando el interior de una bola tridimensional en cada una de ellas y pegando por la esfera que rodea dicha bola.



3-variedad prima

$$P \neq M \# N$$

con $M, N \neq S^3$

Lema

$M = M \# S^3$

Teorema (Conjetura de Geometrización de Thurston)

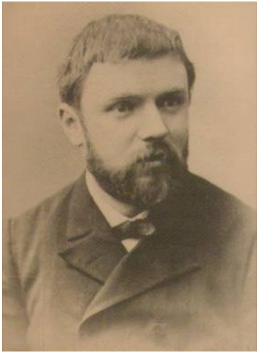
Sea P una 3-variedad cerrada, orientable y prima. Entonces P se puede cortar a lo largo de toros de tal forma que los interiores de las partes resultantes admiten una geometría que puede ser modelada por una de las ocho geometrías de Thurston.

Bill Thurston
1946–2012

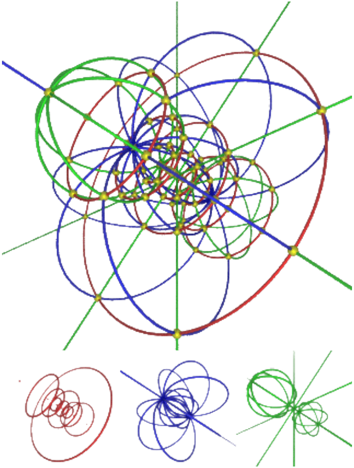
La conjetura de Thurston implica la conjetura de Poincaré

Teorema (Conjetura de Poincaré)

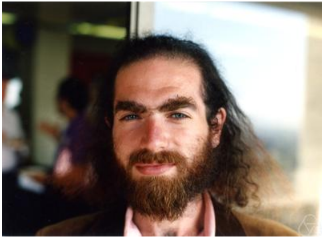
Toda 3-variedad cerrada simplemente conexa es homeomorfa a la esfera S^3.



Henri Poincaré 1854–1912



La conjetura de Thurston y la conjetura de Poincaré fueron probadas por Grisha Perelman en 2002–2003



Cornell University Library

arXiv.org > search

arXiv.org Search Results

Back to Search form

The URL for this search is http://arxiv.org:443/find/all/1/au:+perelman_grisha/0/1/0/2002,2003/0/1

Showing results 1 through 3 (of 3 total) for au:perelman_grisha

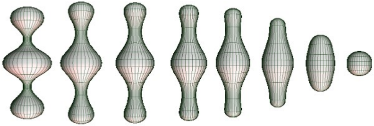
1. arXiv:math/0307245 [pdf, ps, other]
   Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds
   Grisha Perelman
   Comments: 7 pages
   Subjects: **Differential Geometry (math.DG)**

2. arXiv:math/0303109 [pdf, ps, other]
   Ricci flow with surgery on three-manifolds
   Grisha Perelman
   Comments: 22 pages
   Subjects: **Differential Geometry (math.DG)**

3. arXiv:math/0211159 [pdf, ps, other]
   The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications
   Grisha Perelman
   Comments: 39 pages
   Subjects: **Differential Geometry (math.DG)**

La demostración se basa en el **flujo de Ricci**

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\,\mathrm{Ric}(g(t))$$



¿Qué es una geometría modelo?

- Un espacio simplemente conexo M
- Un **grupo de Lie** (maximal) G de transformaciones de M, transitivo y con estabilizadores G_p compactos para todo p

Acción transitiva

Para todos $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$

Estabilizador

$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$

Ejemplo (geometría euclídea)

$$M = \mathbb{R}^3 \qquad G = \mathbb{R}^3 \rtimes O(3) \qquad G_p = T_p \cdot O(3) \cdot (T_p)^{-1}$$

Toda isometría del espacio euclídeo $g = T_v \circ A$ tiene una parte de

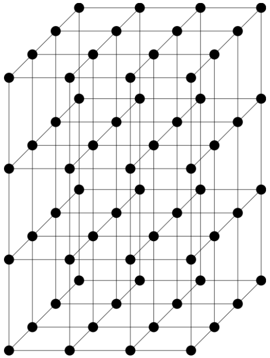
- **traslación:** $T_v(x) = x + v$ y una parte de
- **rotación**: $A(x) = Av$, con $A \in O(3)$ (matriz ortogonal)

¿Cómo se modela una 3-variedad X en (M, G)?

$$X = \Gamma \backslash M = M/\sim$$

en donde Γ es un subgrupo de G

- sin puntos fijos
- discreto
- $p \sim q$ sii $q = \gamma \cdot p$ p.a. $\gamma \in \Gamma$



Ejemplo euclídeo

La única posibilidad para X, salvo homeomorfismo, es

$$\Gamma = \{ T_v : v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3 \}$$

y el cociente es el toro tridimensional

$$T^3 = \Gamma \backslash \mathbb{R}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$$

Ejemplo (Geometría esférica tridimensional)

$$M = S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 1\}$$

$$G = O(4), \qquad G_p = O(3)$$

- $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{\pm \mathrm{id}\}$ geometría proyectiva
- $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ espacios lente
- $\Gamma \subset O(4)$ subgrupo finito: 3-**variedad esférica**

Las ocho geometrías de Thurston

1. E^3, geometría euclídea
2. S^3, geometría esférica
3. H^3, geometría hiperbólica
4. $S^2 \times \mathbb{R}$, producto de una 2-esfera y una recta
5. $H^2 \times \mathbb{R}$, producto del plano hiperbólico y una recta
6. $\widetilde{SL_2}$, cubrimiento universal del grupo lineal especial
7. Nil, geometría del grupo de Heisenberg
8. Sol, movimientos rígidos del plano de Minkowski

Los tres primeros modelos corresponden a los modelos de **curvatura constante**.

La mayoría de estas geometrías aparecen como la geometría de **grupos de Lie** con **métricas invariantes a izquierda**.

La **geometría riemanniana homogénea** provee un marco de trabajo apropiado para estudiar estas geometrías. Para poder hablar de geometría riemanniana en (una variedad topológica) M necesitamos

- Una **estructura diferenciable:** nos permite hablar de funciones diferenciables que salen y llegan a M
- Una **métrica riemanniana:** nos permite introducir nociones geométricas en M como distancia, ángulos, curvatura, etc.

Una misma estructura diferenciable en M puede admitir distintas métricas riemannianas (geométricamente distintas).

A veces una métrica riemanniana impone condiciones sobre la estructura diferenciable.

Teorema (Hadamard)

Si M admite una métrica de curvatura no positiva, entonces M tiene la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^3$.

Estructura diferenciable de M

En los casos que nos interesan, siempre se dará una de las siguientes situaciones:

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $M \subset \mathbb{R}^4$

Ejemplo

La esfera S^3 está contenida en $\mathbb{R}^4$, pero no puede incluirse en $\mathbb{R}^3$ de manera continua.

Definición

Supongamos $M \subset \mathbb{R}^n$ con $n = 3$ o $n = 4$. Decimos que $f : \mathbb{R}^m \to M$ es **diferenciable** si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lo es. Es decir, si cada una de sus funciones coordenadas es diferenciable.

Definición

Una **curva** c en M es una función diferenciable $c : I \to M$ en donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Para definir la diferenciabilidad de funciones que salen de M es necesario introducir coordenadas locales.

Los puntos de M pueden describirse usando tres **coordenadas locales** x, y, z. Es decir, existe una colección de sistemas de coordenadas (homeomorfismos) $\varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^3 \to M$ tales que

- la familia $\varphi_i(U_i)$ cubre M;
- los cambios de coordenadas son diferenciables.

En algunos casos se necesita más de un sistema de coordenadas para cubrir todos los puntos del espacio.

Ejemplo (Coordenadas en la esfera)

La esfera S^3 puede cubrirse con ocho sistemas de coordenadas definidos en la bola abierta

$$D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

de radio 1 y centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo (Continuación)

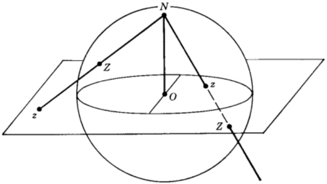
$$\varphi_1^{\pm}(x,y,z) = \left(\pm\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}, x, y, z\right)$$

$$\varphi_2^{\pm}(x,y,z) = \left(x, \pm\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}, y, z\right)$$

$$\varphi_3^{\pm}(x,y,z) = \left(x, y, \pm\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}, z\right)$$

$$\varphi_4^{\pm}(x,y,z) = \left(x, y, z, \pm\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}\right)$$

Es posible utilizar otros sistemas de coordenadas para cubrir la esfera, pero siempre necesitaremos más de uno.



Ejercicio

Encontrar las proyecciones estereográficas para S^3

Definición

Decimos que $f : M \to \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** si

$$f \circ \varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable para todos los sistemas de coordenadas (φ_i, U_i) necesarios para cubrir M. O sea, f es una función diferenciable cuando la escribimos en coordenadas locales.

Ejemplo

La función altura $h : S^3 \to R$ definida por $h(u) = u_4$ para $u \in S^3$ es diferenciable. En efecto en coordenadas locales tenemos que

$$h(\varphi_i^{\pm}(x, y, z)) = z \qquad i = 1, 2, 3$$

$$h(\varphi_4^{\pm}(x, y, z)) = \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

Grupos de Lie

Diremos que G es un grupo de Lie si

- G es un grupo,
- G tiene una estructura diferenciable tal que la multiplicación es diferenciable.

G grupo

Existe una operación asociativa en G con elemento neutro y tal que todo elemento tiene un inverso

- $ge = eg = g$ para todo g
- para cada g existe g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Producto diferenciable

La función $(g, h) \mapsto gh$ es diferenciable de dos variables (i.e. es diferenciable de G en G de una variable cuando dejamos la otra fija)

Ejemplo

- $\mathbb{R}^n$
- $GL_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A \neq 0\}$

Vectores tangentes

Dado $p \in M$, un **vector tangente** a M en p es la velocidad inicial de una curva $c(t)$ en M tal que $c(0) = p$. Observar que si M está contenida en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$v = c'(0) = (c_1'(0), \ldots, c_n'(0)) \in \mathbb{R}^n.$$

v no necesariamente es un elemento de M, sino que es un elemento de $\mathbb{R}^n$.

Si $n > \dim M$, entonces no todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es vector tangente a M en p.

Definición

El **espacio tangente** T_pM a M en p consiste de todos los vectores tangentes a M en p.

Teorema

T_pM es un espacio vectorial de dimensión $\dim T_pM = \dim M$.

Ejemplo

$T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$. En efecto, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$$v = \frac{d}{dt}\Big|_0 c(t)$$

con $c(t) = p + tv$.

Ejemplo

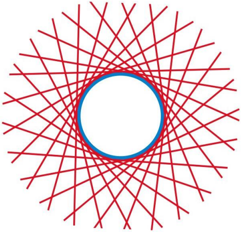
Sea $p \in S^3$ y $c(t)$ una curva en S^3 tal que $c(0) = p$. Observar que $\langle c(t), c(t)\rangle = 1$. Luego

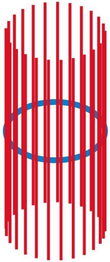
$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 \langle c(t), c(t)\rangle = 2\langle c(0), c'(0)\rangle = 2\langle p, c'(0)\rangle.$$

Por lo tanto

$$T_pS^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 : v \perp p\}.$$

Fibrado tangente. Es un objeto geométrico que nos permite estudiar todos los espacios tangentes al mismo tiempo.





Definición

El **fibrado tangente** a M se define como

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M,\ v \in T_pM\}$$

Si $M \subset \mathbb{R}^n$, entonces $TM \subset \mathbb{R}^{2n}$ y tiene un estructura diferenciable natural: es localmente un producto.

Si G es un grupo de Lie, se denota $\mathfrak{g} = T_e G$ y se llama el **álgebra de Lie** de G.

Las álgebra de Lie son objetos algebraicos *lineales* que determinan la estructura algebraica *no lineal* de G.

Todos los espacios tangentes $T_g G$ se pueden identificar con $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma: si $c(t)$ es una curva en G con $c(0) = e$. Entonces $c_g(t) = gc(t)$ es una curva en G con $c_g(0) = g$. De este modo uno identifica $c_g'(0)$ con $c'(0)$.

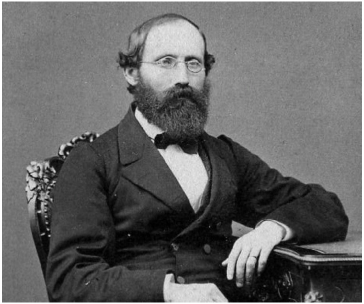
Teorema

Todo grupo de Lie G es paralelizable: $TG = G \times \mathfrak{g}$.

Las variedades **paralelizables** son aquellas tales que su fibrado tangente es globalmente un producto.

Una **métrica riemanniana** en M asigna a cada $p \in M$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en T_pM de manera diferenciable.

En tal caso decimos que M es una **variedad riemanniana**.



En general, no hay ninguna relación entre el producto interno en T_pM dado por una métrica riemanniana y el producto interno en T_pM inducido por la inclusión $T_pM \subset \mathbb{R}^n$.

Diferenciabilidad de la métrica riemanniana

Si $V, W : M \to TM$ son **campos diferenciables** en M (o sea, funciones diferenciables tales que $V(p), W(p) \in T_pM$), entonces la asignación $p \mapsto \langle V(p), W(p) \rangle_p$ es diferenciable.

Una métrica riemanniana en M nos permite medir

- Ángulos entre vectores tangentes a un mismo punto o entre curvas que se intersectan.
- Longitud de curvas $c : [a, b] \to M$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\langle c'(t), c'(t)\rangle_{c(t)}}\, dt.$$

- Distancia entre dos puntos $p, q \in M$

$$d(p, q) = \inf_c \{L(c) : c(a) = p,\ c(b) = q\}.$$

Teorema

La topología de M coincide con la topología métrica inducida por la distancia riemanniana.

Variedad riemanniana completa. Toda sucesión de Cauchy converge.

Ejemplo (Métrica usual en $\mathbb{R}^3$)

En $\mathbb{R}^3$ tenemos el producto escalar usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Como $T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ para todo p podemos considerar la métrica riemanniana que asigna el *mismo* producto interno a cada espacio tangente. La geometría euclídea en $\mathbb{R}^3$ es la geometría de la métrica riemanniana usual.

Ejemplo (Métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie)

En un grupo de Lie G, **todos** los espacios tangentes se **identifican** con $\mathfrak{g} = T_eG$. Luego la elección de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ en $\mathfrak{g}$, determina una métrica riemanniana en G, pero en este caso el producto interno puede variar en cada espacio tangente. Si $v, w \in T_gG$, digamos $v = \alpha'(0)$, $w = \beta'(0)$ con $\alpha(0) = \beta(0) = g$,

$$\langle v, w\rangle_g = \langle \alpha'_{g^{-1}}(0), \beta'_{g^{-1}}(0)\rangle_e$$

donde $\alpha_{g^{-1}}(t) = g^{-1}\alpha(t)$, $\beta_{g^{-1}(t)} = g^{-1}\beta(t)$.

Fijemos una métrica riemanniana en M.

Geodésicas. Son las curvas que *localmente* minimizan la distancia.

Notación. $\gamma_v(t)$ es la geodésica con condiciones iniciales

$$\gamma_v(0) = p, \quad \gamma_v'(0) = v \in T_pM$$

Teorema (Hopf-Rinow)

Existen geodésicas en cualquier dirección $v \in T_pM$. Más aún, M es completa si y sólo si $\gamma_v(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso, dos puntos cualesquiera en M pueden ser conectados por una geodésica que minimiza la distancia.

Para mostrar la existencia de geodésicas en M se estudia la ecuación geodésica (ODE que satisfacen las curvas geodésicas).

Derivación covariante. Dada una curva $c : I \to M$, el operador de **derivación covariante** D^c/dt se aplica a campos tangentes a lo largo de c y devuelve campos tangentes a lo largo de c.

Campo tangente a lo largo de c. $V(t) \in T_{c(t)}M$.

Propiedades de la derivación covariante

- Linealidad:

$$\frac{D^c}{dt}(V(t) + \lambda W(t)) = \frac{D^c V}{dt} + \lambda \frac{D^c W}{dt}$$

- Regla de Leibniz 1: si $f : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable,

$$\frac{D^c}{dt}(f(t)V(t)) = f'(t)V(t) + f(t)\frac{D^c V}{dt}$$

- Regla de Leibniz 2 (la derivada covariante es métrica):

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle_{c(t)} = \left\langle \frac{D^c V}{dt}, W(t) \right\rangle_{c(t)} + \left\langle V(t), \frac{D^c W}{dt} \right\rangle_{c(t)}$$

Teorema

El operador de derivación covariante a lo largo de $c : I \to M$ existe y es único.

- La derivada covariante nos permite definir la aceleración de una curva en una variedad riemanniana.
- Las geodésicas de M también se describen como las curvas de aceleración nula.

Definición

Una curva $\gamma : I \to M$ es una geodésica si

$$\frac{D^\gamma}{dt}\gamma'(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Tensor de curvatura. Se aplica a tres vectores $v, w, u \in T_pM$ y devuelve un nuevo vector tangente $R_{v,w}u \in T_pM$. Algebraicamente queda caracterizado por las siguientes propiedades:

1. R es lineal en cada variable fijando las otras dos,
2. $R_{v,w} = -R_{w,v}$,
3. $R_{v,w}$ es una transformación antisimétrica de T_pM
$$\langle R_{v,w}u, z\rangle_p = -\langle R_{v,w}z, u\rangle_p,$$
4. $\langle R_{v,w}u, z\rangle_p = \langle R_{u,z}v, w\rangle_p$,
5. Primera identidad de Bianchi
$$R_{v,w}u + R_{w,u}v + R_{u,v}w = 0.$$

Ejercicio

La cuarta propiedad es consecuencia de las demás.

La tercera propiedad nos permite estudiar la curvatura desde un punto de vista algebraico (holonomía).

El tensor de curvatura también se puede caracterizar analíticamente: *mide qué tanto falla el operador de derivación covariante de satisfacer la identidad de Clairaut.*

Si $f : \mathbb{R}^2 \to M$ es una superficie parametrizada en M y $V(s,t) \in T_{f(s,t)}M$ es un campo a lo largo de f, entonces

$$R_{\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}} V = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V.$$

Curvatura seccional. Mide la curvatura gaussiana de una superficie parametrizada en M. Más aún, la curvatura seccional se puede calcular en cada punto de M en la dirección de un plano $\pi \subset T_pM$: si $v, w \in \pi$ son dos vectores ortonormales entonces

$$K(\pi) = K(v,w) = \langle R_{u,v}v, u\rangle.$$

Espacios de curvatura constante. $K(\pi) = \text{const}.$

Isometrías. Son las transformaciones de M que preservan la métrica riemanniana.

Definición

$f : M \to M$ es una **isometría** si f es biyectiva y preserva el producto interno en cada punto. O sea, si $f(p) = q$, entonces

$$\langle df(v), df(w) \rangle_q = \langle v, w \rangle_p.$$

Recordemos que la **diferencial** de f en p se define como sigue, si $v = c'(0)$ para una curva en M con $c(0) = p$, entonces

$$df(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(c(t)).$$

Grupo de isometrías

$I(M) = \{f : M \to M : f \text{ isometría}\}$

Espacio homogéneo

$I(M)$ transitivo en M

Ejemplo (Isometrías en grupos de Lie)

- G grupo de Lie, $g \in G$.
- G con métrica invariante a izquierda.
- $L_g(h) = gh$ traslación a izquierda.
- $R_g(h) = hg$ traslación a derecha.
- $L_g \in I(G)$ para todo g.
- Si $R_g \in I(G)$ para todo g la métrica se dice **bi-invariante**.
- $\dim I(G) \geq 3$, $G \subset I(G)$.
- Distintas métricas invariantes a izquierda pueden tener diferente grupo de isometría (y por tanto distinta geometría). Veremos ejemplos de esto más adelante.
- G es un espacio homogéneo: $g = L_{gh^{-1}}(h)$, luego todo $h \in G$ puede ser llevado a g por una isometría.

Teorema (Myers–Steenrod)

Si M es una variedad riemanniana de dimensión n entonces $I(M)$ es un grupo de Lie con $\dim I(M) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$. Más aún, si $\dim I(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$ entonces M es un espacio de curvatura constante.

Para los módelos geométricos de Thurston, M homogénea de dimensión 3. Luego

$$3 \leq \dim I(M) \leq 6.$$

Lema

$\dim M = 3 \implies \dim I(M) \neq 5.$

Demostración.

No hay estabilizadores compactos de dimensión 2. $\square$

Geometría de E^3

- Estructura diferenciable: la usual de $\mathbb{R}^3$.
- Métrica Riemanniana: la usual en $\mathbb{R}^3$.
- Derivada Covariante: la derivada usual en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{D^c}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}V(t).$$

- Geodésicas:

$$\frac{d}{dt}\gamma_v'(t) = 0 \implies \gamma_v(t) = tv + p$$

- Curvatura: $R = 0$ (el espacio euclídeo es plano). En efecto, como la derivada covariante coincide con la derivada usual, las derivadas covariantes conmutan (por el Teorema de Clairaut) y por lo tanto la curvatura se anula.
- E^3 espacio de curvatura constante $K = 0$.

Grupo de isometrías de E^3

- El espacio euclídeo es un grupo de Lie (con la suma de $\mathbb{R}^3$), luego las traslaciones (a izquierda) son isometrías

$$T_v(x) = x + v$$

- Una isometría que fija el origen es una transformación lineal (que preserva el producto escalar de $\mathbb{R}^3$). Luego el estabilizador de $I(E^3)$ es el **grupo ortogonal** de orden 3

$$\begin{aligned} O(3) &= \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle\} \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : AA^t = I\} \end{aligned}$$

Estructura de grupo de Lie de $I(E^3)$

- $I(E^3) = \mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ (producto semidirecto, dim $= 6$)
- $(v, A) = T_v \circ A$
- $(v, A)(w, B) = (Aw + v, AB)$

Geometría de S^3

- Estructura diferenciable: coordenadas locales $\varphi_i^{\pm}$.
- La esfera S^3 tiene una geometría natural, heredada de la geometría euclídea de $\mathbb{R}^4$.
- La esfera S^3 es un grupo de Lie, y por lo tanto admite muchas geometrías que provienen de métricas invariantes a izquierda

Geometría inducida de $\mathbb{R}^4$

- $T_pS^3 = \{v \in S^3 : v \perp p\}$
- $\langle v, w\rangle_p = \langle v, w\rangle_{E^4} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$
- $\dfrac{D^c}{dt}V(t) = \left[\dfrac{d}{dt}V(t)\right]^{T_{c(t)}S^3} = V'(t) - \langle V'(t), c(t)\rangle c(t)$

Estructura de grupo de Lie de la esfera

Ejemplo 0

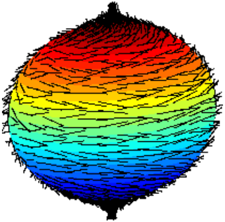
$S^0 = \{p \in \mathbb{R} : |p| = 1\} = \{\pm 1\}$ es un grupo (de Lie) isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 1

$S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie (conmutativo)

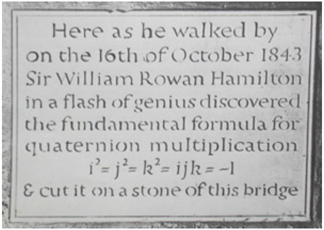
Ejemplo 2

$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p| = 1\}$ no es un grupo de Lie (por el Teorema de la bola de pelos)



Cuaterniones

- $\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$



$$S^3 = \{p \in \mathbb{H} : |p| = 1\}$$

Ejercicio

1. Si $p, q \in S^3$, entonces $pq \in S^3$.
2. Si $p \in S^3$ entonces $p^{-1} = \bar{p} \in S^3$, $\overline{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.
3. S^3 es grupo de Lie.

Teorema

1. *Las únicas esferas que son grupos de Lie son S^0, S^1 y S^3.*
2. *Las únicas esferas paralelizables son S^0, S^1, S^3 y S^7.*

Para definir una métrica invariante a izquierda en S^3 basta con fijar un producto interno en

$$T_{\mathbf{1}}S^3 = \operatorname{im}\mathbb{H} = \{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{1}}$ en im H queda determinado por una matriz simétrica definida positiva A:

$$\langle v, w\rangle_{\mathbf{1}} = \langle Av, w\rangle$$

en donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ es el producto interno en im H tal que $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ es una base ortonormal.

Lema

$$T_pS^3 = \{pv : v \in \operatorname{im}\mathbb{H}\}$$

Demostración.

$$\langle pv, p\rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle pv, p\mathbf{1}\rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle v, \mathbf{1}\rangle_{\mathbb{R}^4} = 0 \qquad \square$$

La métrica en $p \in S^3$ está determinada por

$$\langle v, w\rangle_p = \langle \bar{p}v, \bar{p}w\rangle_{\mathbf{1}}.$$

Proposición

La métrica usual en S^3 es bi-invariante.

Demostración.

- Tomamos $p, q \in S^3$, $v, w \in T_pS^3$
- $qv, qw \in T_{qp}S^3$
- $vq, wq \in T_{pq}S^3$
- $\langle qv, qw\rangle_{qp} = \langle vq, wq\rangle_{pq} = \langle v, w\rangle_p$ $\square$

Corolario

Con la métrica usual

1. $I(S^3) = O(4) = S^3 \times S^3$
2. *S^3 tiene curvatura constante positiva*

Demostración.

1. $L_pR_q = R_qL_p$
2. Teorema de Hadamard $\square$

Geodésicas de la métrica bi-invariante

- $\gamma(t) = \gamma_v(t)$, $v \in T_pS^3$
- $0 = \dfrac{D^\gamma}{dt}\gamma'(t) = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma(t)\rangle \gamma(t)$
- $\dfrac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 2\left\langle \dfrac{D^\gamma}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t)\right\rangle = 0$
- $\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = \kappa$
- $0 = \dfrac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle = \langle \gamma''(t), \gamma(t)\rangle + \kappa$
- $\gamma''(t) = -\kappa\gamma(t)$

Círculos máximos

$$\gamma_v(t) = \cos(\sqrt{\kappa}t)p + \frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}}v$$

Otras métricas invariantes a izquierda en S^3

- $\langle v, w \rangle_{\mathbf{1}} = \langle Av, w \rangle_{\mathbf{1}}^{\text{usual}}$
- A matriz simétrica definida positiva
- Cambiando coordenadas se puede tomar

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

con $\lambda \geq \mu \geq \nu > 0$

ADVANCES IN MATHEMATICS 21, 293–329 (1976)

Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups

JOHN MILNOR

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540

Math. Nachr. **282,** No. 6, 868 – 898 (2009) / **DOI** 10.1002/mana.200610777

Left invariant metrics and curvatures on simply connected three-dimensional Lie groups

Ku Yong Ha*[1] and **Jong Bum Lee****[2]

[1] The Research Institute of Basic Sciences, Seoul National University, Seoul 151-747, Korea
[2] Department of Mathematics, Sogang University, Seoul 121-742, Korea

Journal of Geometry and Physics 62 (2012) 189–203

ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Geometry and Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jgp

The isometry groups of simply connected 3-dimensional unimodular Lie groups

Ku Yong Ha *, Jong Bum Lee

Department of Mathematics, Sogang University, Seoul 121-742, Republic of Korea

Teorema

La métrica es bi-invariante si y sólo si $\lambda = \mu = \nu$. En este caso la geometría de S^3 con esta métrica corresponde a la geometría usual de una esfera de radio $2\lambda^2$.

Teorema (Curvatura seccional)

$$K(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \frac{(\lambda - \mu + \nu)^2 + 4\nu(\mu - \nu)}{4\lambda\mu\nu}$$

$$K(\mathbf{i}, \mathbf{k}) = \frac{(\lambda - \mu - \nu)^2 + 4\mu(\lambda - \mu)}{4\lambda\mu\nu}$$

$$K(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = \frac{(\lambda + \mu - \nu)^2 + 4\lambda(\lambda - \nu)}{4\lambda\mu\nu}$$

Teorema

Toda métrica invariante izquierda en S^3 admite una geodésica cerrada.

Teorema

Si G es un grupo de Lie simplemente conexo con una métrica invariante a izquierda tal que todas las geodésicas son cerradas, entonces G es la esfera S^3 con la métrica bi-invariante.

Teorema

El grupo de isometrías una métrica invariante a izquierda en S^3 que no es bi-invariante está dado por

1. $S^3 \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2$ *si* $\lambda > \mu > \nu$ $(\dim = 3)$.
2. $S^3 \rtimes O(2)$ *si* $\lambda = \mu > \nu$ *o* $\lambda > \mu = \nu$ $(\dim = 4)$.

Sólo la métrica usual en S^3 da una geometría de Thurston.

Geometría de H^3

- Estructura diferenciable:

$$H^3 = \{p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$$

  tiene la estructura diferenciable del semi-espacio superior.
- Métrica riemanniana: $T_p H^3 = \mathbb{R}^3$,

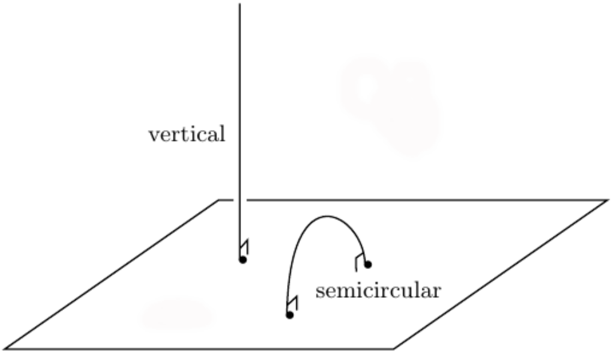
$$\langle v, w \rangle_p = \frac{1}{(x_3)^2} \langle v, w \rangle_E$$

- Los ángulos se miden igual que en E^3 pero la geometría se "dilata" cuando $x_3 \to 0$ y se "expande" cuando $x_3 \to \infty$

$$\cosh d(p, q) = 1 + \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}{2 x_3 y_3}$$

Geodésicas en H^3

- Semirrectas (euclídeas) ortogonales al hiperplano $x_3 = 0$
- Semicírculos (euclídeos) que intersectan ortogonalmente al hiperplano $x_3 = 0$



La métrica en H^3 es completa con respecto a la distancia riemanniana pero no lo es con respecto a la distancia de $\mathbb{R}^3$.

Modelo de Minkowski

- $H^3 = \{p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1\}$
- $\langle\langle p, q\rangle\rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$ (geometría pseudo-riemanniana)
- $T_p H^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 : \langle\langle v, p\rangle\rangle = 0\}$
- Métrica riemanniana: $\langle v, w\rangle_p = \langle\langle v, w\rangle\rangle$ (definida positiva)
- Geodésicas: $\gamma_v(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$, donde $\langle v, v\rangle_p = 1$

Isometrías

$$O(1,3) = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} : \langle\langle Av, Aw\rangle\rangle = \langle\langle v, w\rangle\rangle \text{ para todos } v, w\}$$

Teorema

$I(H^3) = O(1,3)$ *con estabilizadores* $O(3)$.

Si $p = (1, 0, 0, 0)$,

$$\mathrm{Stab}_p = O(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in O(3) \right\}$$

Corolario

$\dim I(H^3) = 6$, *por lo tanto* H^3 *es un espacio de curvatura constante* $K = -1$.

El grupo de isometrías del espacio hiperbólico tiene la mayor dimensión posible y por tanto es una geometría de Thurston.

Geometría de $S^2 \times \mathbb{R}$

- Estructura diferenciable:

$$S^2 \times \mathbb{R} = \{(u, r) : u \in S^2,\ r \in \mathbb{R}\}$$

  tiene la **estructura diferenciable producto** que consiste en tomar coordenadas locales para u y una coordenada global para r.

- Fibrado tangente: $T_{(u,r)}(S^2 \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$ identificamos

$$\begin{aligned} T_{(u,r)}(S^2 \times \mathbb{R}) &= \{v \in \mathbb{R}^4 : (v_1, v_2, v_3) \perp u\} \\ &= T_u S^2 \times T_r \mathbb{R} \\ &= T_u S^2 \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- $S^2 \times \mathbb{R}$ tiene la **métrica producto**, la cual coincide con la métrica inducida de $\mathbb{R}^4$

$$\langle (v, x), (w, y) \rangle_{(u,r)} = \langle v, w \rangle_u + xy.$$

Geometría de S^2

- S^2 tiene la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$
- Derivada covariante inducida de $\mathbb{R}^3$
- Geodésicas unitarias $\gamma_v(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$
- Curvatura constante $K = 1$
- Grupo de isometrías $I(S^2) = O(3)$

Geometría de $\mathbb{R}$

- Geometría euclídea (plana) de la línea recta
- $I(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{\pm 1\} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$

Geodésicas en $S^2 \times \mathbb{R}$

$$\gamma_{(v,x)}(t) = \left(\cos(\sqrt{\kappa}t)p + \frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}}v, tx + r\right)$$

Curvatura en $S^2 \times \mathbb{R}$

Tenemos superficies de curvatura positiva correspondientes a las esferas $S^2 \subset S^2 \times \mathbb{R}$ y también superficies de curvatura nula correspondientes a los cilindros $S^1 \times \mathbb{R} \subset S^2 \times \mathbb{R}$

Grupo de isometrías

$$I(S^2 \times \mathbb{R}) = O(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$$

Como $I(S^2 \times \mathbb{R})$ tiene dimensión 4, la métrica producto tiene la máxima dimensión posible (no puede ser 5, ni 6 pues la curvatura no es constante). Luego la geometría de $S^2 \times \mathbb{R}$ es de Thurston.

Geometría de $H^2 \times \mathbb{R}$

- Estructura diferenciable:

$$H^2 \times \mathbb{R} = \{(p, r) : p \in H^2,\ r \in \mathbb{R}\}$$

  tiene la **estructura diferenciable producto**. Para poder describirla necesitamos elegir un modelo para H^2.

  1. Semiplano superior: estructura diferenciable de abierto en $\mathbb{R}^3$.
  2. Hiperboloide de revolución: estructura diferenciable producto (inducida de $\mathbb{R}^4$).

- Fibrado tangente: con cualquier elección tenemos una identificación

$$T_{(p,r)}(H^2 \times \mathbb{R}) = T_p H^2 \times \mathbb{R}.$$

- $H^2 \times \mathbb{R}$ tiene la **métrica producto**

  1. $\langle (v, x), (w, y) \rangle_{(u,r)} = \dfrac{1}{v_3^2} \langle v, w \rangle_u + xy$
  2. $\langle (v, x), (w, y) \rangle_p = \langle\langle v, w \rangle\rangle + xy = v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 + xy$

Geometría de H^2

- Geom. hiperbólica bidimensional de curvatura const. $K = -1$
- Geodésicas unitarias $\gamma_v(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$ (en el modelo del hiperboloide de revolución)
- Grupo de isometrías $I(H^2) = O(1,2)$

Geodésicas (primera componente unitaria) en $H^2 \times \mathbb{R}$

$$\gamma_{(v,x)}(t) = ((\cosh t)p + (\sinh t)v, tx + r)$$

Curvatura en $H^2 \times \mathbb{R}$

- $H^2 \subset H^2 \times \mathbb{R}$, $K = -1$
- $\mathbb{R}^2 \subset H^2 \times \mathbb{R}$, $K = 0$

Grupo de isometrías

$I(H^2 \times \mathbb{R}) = O(1,2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$

$\dim I(S^2 \times \mathbb{R}) = 4$, stab compacto y geometría no plana, es Thurston.

Geometría de $\widetilde{SL}_2$

- Es la geometría del cubrimiento universal del grupo lineal espacial SL_2.
- $SL_2 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det A = 1\}$.
- Topología vs. Álgebra
    - SL_2 no es simplemente conexo pero es un grupo de matrices.
    - $\widetilde{SL}_2$ es simplemente conexo pero no es un grupo de matrices.
- SL_2 y $\widetilde{SL}_2$ tienen la misma álgebra de Lie (espacio tangente en la identidad).
- El álgebra de Lie determina la estructura de grupo de Lie.
- La geometría de una métrica invariante a izquierda en SL_2 se levanta a $\widetilde{SL}_2$.
- ¡Haremos las cuentas en SL_2!

Estructura diferenciable de SL_2

Hay dos maneras equivalentes de presentar la estructura diferenciable de SL_2.

- Coordenadas locales para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\varphi_{11}(a_{11}, a_{12}, a_{21}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{1+a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}, \qquad a_{11} \neq 0$$

$$\varphi_{12}(a_{11}, a_{12}, a_{22}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{-1+a_{11}a_{22}}{a_{12}} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad a_{12} \neq 0$$

etc.

- Se puede usar el teorema de la función implícita para describir los puntos de SL_2: es la hipersuperficie de nivel 1 de la función det, la diferencial de la función det es la traza.

Fibrado tangente

- Tomamos una curva $c(t)$ en SL_2 tal que $c(0) = I$
- $1 = \det c(t) = c_{11}(t)c_{22}(t) - c_{12}(t)c_{21}(t)$
- $0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \det c(t) = c_{11}(0)c'_{22}(0) + c'_{11}(0)c_{22}(0) = \operatorname{tr} c'(0)$
- $\mathfrak{sl}_2 = T_I SL_2 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \operatorname{tr} A = 0\}$

Ejercicio

$\mathfrak{sl}_2$ es cerrado con respecto al corchete de Lie

$$[A, B] = AB - BA$$

- El corchete de Lie determina la estructura de grupo de Lie de SL_2
- $e^A \in SL_2$ para toda $A \in \mathfrak{sl}_2$
- $e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$

Base de $\mathfrak{sl}_2$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

$$[X_1, X_2] = 2X_3 \qquad [X_1, X_3] = -2X_2 \qquad [X_2, X_3] = -2X_1$$

Teorema (Ha-Lee)

Salvo isometría, las métricas invariantes a izquierda en SL_2 están determinadas, en la base X_1, X_2, X_3 por la matriz simétrica definida positiva

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \qquad \lambda > 0,\ \mu \geq \nu > 0.$$

Teorema (Ha-Lee)

1. *Si* $\mu > \nu$ *entonces*
$$I(SL_2) = SL_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2)^3.$$
2. *Si* $\mu = \nu$ *entonces*
$$I(SL_2) = SL_2 \rtimes (O(2) \rtimes \mathbb{Z}_2).$$

- En el primer caso $\dim I(SL_2) = 3$ (solo traslaciones a izquierda) y por lo tanto no es una geometría de Thurston.
- En el segundo caso $\dim I(SL_2) = 4$ con estabilizador $O(2)$ y por lo tanto son Thurston.
- Las geometrías de Thurston son todas homotéticas a $\lambda > 0$ $\mu = \nu = 1$.
- Sin embargo, estas geometrías son distintas desde el punto de vista riemanniano (tienen distinto operador de Ricci).

Teorema (Curvatura seccional)

$$K(X_1, X_2) = \frac{(\lambda + \mu - \nu)^2 + 4\nu(\mu - \nu)}{\lambda\mu\nu}$$
$$K(X_1, X_3) = \frac{(\lambda - \mu + \nu)^2 + 4\mu(\mu - \nu)}{\lambda\mu\nu}$$
$$K(X_2, X_3) = -\frac{(\lambda + \mu + \nu)^2 + 2(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)}{\lambda\mu\nu}$$

Corolario (Curvatura seccional de la geometría de Thurston)

$$K(X_1, X_2) = \lambda \qquad K(X_1, X_3) = \lambda \qquad K(X_2, X_3) = -(3\lambda + 4)$$

Geometría de *Nil*

Estructura diferenciable

Nil tiene la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^3$.

Estructura de grupo de Lie

Hay dos presentaciones comunes que corresponden al grupo de Lie de Heisenberg.

- $H = \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \tfrac{1}{2}(xy' - yx'))$$

- $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ (producto de matrices)

Ejercicio

Encontrar un isomorfismo de grupos entre estas dos presentaciones.

Fibrado tangente

- Con la primera presentación $T_pH = \mathbb{R}_3$
- Con la segunda presentación

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Base del álgebra de Lie

- $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$
- $\mathfrak{h}$ es un ejemplo de álgebra de Lie **nilpotente**

Exponencial en álgebras nilpotentes

- $\exp : \mathfrak{h} \to H$ es un difeomorfismo
- $\exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2$
- $\exp \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(\exp A)(\exp B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B])$
- $\exp 0 = I$
- $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

Geometría *Nil***.** Geometría de una métrica invariante a izquierda en el grupo de Heisenberg.

Teorema

Salvo isometría, las métricas invariantes a izquierda en H están determinadas, en la base X_1, X_2, X_3, por la matriz simétrica definida positiva

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda > 0$$

Corolario

Salvo reescalamiento, existe una única métrica invariante a izquierda en H. Por lo tanto, hay una única posible geometría en Nil.

Teorema (Lauret)

Las únicas geometrías con esta propiedad son E^3 y Nil.

- Tomemos $\lambda = 1$ en la métrica inv. izq.
- Escribimos $\mathfrak{h} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{h}$
- $\mathfrak{v} = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2$, $\mathfrak{z} = \mathbb{R}X_3$
- Para $Z \in \mathfrak{z}$, sea $j(Z)$ la transformación antisimétrica en $\mathfrak{v}$ definida por
$$\langle j(Z)X, Y\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle$$
(se comporta como la multiplicación por $\mathbf{i}$ en $\mathfrak{v} \simeq \mathbb{C}^2$)

Teorema (Kaplan)

Sea $\gamma(t) = \exp(X(t) + Z(t))$ *en donde*

- $X(t) \in \mathfrak{v}$, $Z(t) \in \mathfrak{z}$
- $X(0) = Z(0) = 0$, $X'(0) = X_0$, $Z'(0) = Z_0$

Entonces $\gamma(t)$ *es una geodésica si y sólo si*

- $X''(t) = j(Z_0)X'(t)$
- $Z'(t) + \frac{1}{2}[X'(t), X(t)] = Z_0$

Curvatura en *Nil*

Si $X, Y \in \mathfrak{v}$, $Z \in \mathfrak{z}$, entonces

- $R_{X,Y}X = \frac{3}{4} j([X, Y])X$
- $R_{X,Z}Y = -\frac{1}{4}[X, j(Z)Y]$
- $R_{X,Y}Z = -\frac{1}{4}[X, j(Z)Y] + \frac{1}{4}[Y, j(Z)X]$
- $R_{X,Z}Z = -\frac{1}{4} j(Z)^2 X$

Curvatura seccional en *Nil*

- $K(X_1, X_2) = -\frac{3}{4}$
- $K(X_1, X_3) = K(X_2, X_3) = \frac{1}{4}$

Grupo de isometrías

$I(Nil) = Nil \rtimes O(2)$

Estabilizador compacto $O(2)$, dimensión máxima. *Nil* es geometría de Thurston.

Geometría de *Sol*

- Es la geometría del los movimientos rígidos del **plano de Minkowski**.
- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}^2$ pero con la forma bilineal

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = v_1 w_1 - v_2 w_2$$

- $E(1,1)$ movimientos rígidos de $\mathbb{R}^{1,1}$
- $E(1,1) = \mathbb{R}^{1,1} \rtimes O(1,1)$
- $E(1,1) = \mathbb{R}^2 \rtimes_\rho \mathbb{R}$, con $\rho = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$
- $E(1,1) = \mathbb{R}^3$ con el producto

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + e^z x', y + e^{-z} y', z + z')$$

- Grupo de Lie soluble unimodular

Álgebra de Lie

Se puede tomar una base X_1, X_2, X_3 de $\mathfrak{e}(1,1)$ tal que

$$[X_1, X_2] = 0 \qquad [X_1, X_3] = -X_1 \qquad [X_2, X_3] = X_2$$

Álgebra de Lie soluble

$$[[\mathfrak{e}(1,1), \mathfrak{e}(1,1)], [\mathfrak{e}(1,1), \mathfrak{e}(1,1)]] = 0$$

Soluble

El corchete se comporta como el corchete de matrices triangulares

$$\Longleftarrow$$

Nilpotente

El corchete se comporta como el corchete de matrices triangulares estrictas

Teorema (Ha-Lee)

Salvo isometría, las métricas invariantes a izquierda en $E(1,1)$ están determinadas, en la base X_1, X_2, X_3 por las matrices simétricas definidas positivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \qquad \nu > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \qquad \nu > 0,\ \mu > 1$$

Teorema (Ha-Lee)

El grupo de isometrías de $\mathfrak{e}(1,1)$ *está dado por*

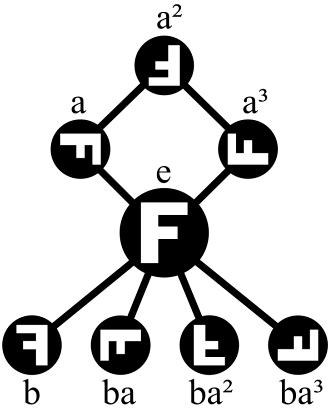
1. $I_\nu(Sol) = Sol \rtimes D(4)$
2. $I_{\nu,\mu}(Sol) = Sol \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2$

Grupo diedral $D(4)$

Grupo (no conmutativo) de orden 8 formado por las simetrías del cuadrado.

Ejercicio

$D(4)$ no posee ningún subgrupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_2)^2$, luego todas las métricas i.i. en $E(1,1)$ son de Thurston.



Teorema (Curvatura seccional)

1. *Para la métrica asociada a* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$, $\nu > 0$

$$K(X_1, X_2) = \frac{1}{\nu} \qquad K(X_1, X_3) = K(X_2, X_3) = -\frac{1}{\nu}$$

2. *Para la métrica asociada a* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$, $\nu > 0$, $\mu > 1$

$$K(X_1, X_2) = \frac{\mu}{\nu\sqrt{\mu^2 - 1}} \quad K(X_1, X_3) = K(X_2, X_3) = \frac{2 - \mu}{\nu(\mu - 1)}$$