3. Comunicaciones: Análisis Numérico y Optimización

Aplicaciones del método de penalidad externa en optimización no lineal

Expositor: María Laura Schuverdt (Departamento de Matemática-Fac. De Cs. Exactas-UNLP, mlschuverdt@gmail.com)
Autor/es: María Laura Schuverdt (Departamento de Matemática-Fac. De Cs. Exactas-UNLP, mlschuverdt@gmail.com)

El método de penalidad externa es un método clásico en optimización no lineal que por su filosofía simple posee innumeras aplicaciones en diferentes ramas de la optimización y la programación.

En este trabajo se abordan dos líneas de auge en la actualidad que surgen de la aplicación del método de penalidad externa.

La primer línea de aplicación es el estudio de condiciones de calidad y de optimalidad sucesivas de primer orden en la resolución de problemas escalares. Las condiciones de optimalidad son condiciones claves en el análisis de convergencia de métodos prácticos y en los últimos años se han definido condiciones sucesivas cada vez más débiles.

La segunda línea aborda la aplicación de penalidad externa para la resolución de problemas con objetivos múltiples o problema multiobjetivo. El abordaje planteado en este trabajo introduce el uso de una función auxiliar con ciertas propiedades para resolver en cada paso del método un subproblema escalar adecuado. Se analizan condiciones de calidad y de optimalidad sucesivas apropiadas para obtener los resultados de convergencia global y convergencia de primer orden a puntos regulares.

Estimaciones de interpolacion en piramides con aplicaciones a problemas mixtos con singularidades de arista y vertice.

Expositor: Alexis Jawtuschenko (IMAS CONICET; UBA, ajawtu@dm.uba.ar)
Autor/es: Alexis Jawtuschenko (IMAS CONICET; UBA, ajawtu@dm.uba.ar); Ariel Lombardi (UNGS; UBA; CONICET, aldoc7@dm.uba.ar)

Consideramos problemas de ecuaciones diferenciales en fomulación débil sobre un poliedro no convexo Ω. Sus soluciones pueden tener singularidades en aristas con ángulo interior mayor a π o en vértices entrantes. La presencia de estas singularidades degrada el orden de convergencia de la aproximación por el Método de Elementos Finitos (con mallas cuasi–uniformes). En este trabajo proponemos usar mallas graduadas a–priori para aproximar la solución de la ecuación de Poisson en forma mixta con condiciones homogéneas.

$$\boldsymbol{u} + \nabla p = 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = f \qquad \text{en } \Omega \tag{7}$$

con dato $f \in L^2(\Omega)$. Las mallas graduadas constan, necesariamente, de elementos anisótropos. En [1] se muestra que no todos los tetraedros admiten estimaciones de interpolación con anisotropía arbitraria. Entonces, el método que proponemos resulta de una malla que combina prismas y pirámides con los tetraedros que no presentan la limitación mencionada. Además el número de elementos usados se reduce. Aquí presentamos la siguiente estimación uniforme y óptima del error de interpolación local de Raviart–Thomas para variables vectoriales en pirámides anisótropas

$$\|\boldsymbol{u} - \pi_k \boldsymbol{u}\|_{L^p(\Omega)^3} \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} h_i \,\|\partial_i \boldsymbol{u}\|_{L^p(\Omega)^3} + h_\Omega \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\|_{L^p(\Omega)}$$

con $k = 1$ y para todo $p \geqslant 1$. La definición del interpolador π_1 en pirámides se encuentra en [2]. Anteriormente probamos el resultado análogo para prismas con anisotropía arbitraria [3], y para los tetraedros usados la estimación se encuentra en [1]. A continuación, mediante las estimaciones de interpolación probamos el siguiente teorema de error de aproximación de las soluciones del problema (20)–(7) que muestra que nuestro método recupera el orden óptimo de convergencia del caso convexo, aun en presencia de singularidades de arista y vértice:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\, h \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\, h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Referencias

[1] Apel, T., Acosta, G., Durán, R., Lombardi, A. (2011): *Error Estimates for Raviart–Thomas Interpolation of any order on Anisotropic Tetrahedra*, Math. Comp., **80**,273, 141–163.

[2] Gradinaru, V., Hiptmair, R. (1999): *Whitney Elements on Pyramids*, ETNA, **8**, 154–168.

[3] Jawtuschenko, A., Lombardi, A. (2015): *Anisotropic estimates for H(**curl**)– and H(div)–conforming elements on prisms and applications.* Proceedings of V MACI, MACI Vol. **V**.

Paralelismo basado en tareas para la descomposición LU por bloques.

Expositor: Luis Biedma (FaMAF - UNC, lbiedma@famaf.unc.edu.ar)
Autor/es: Luis Biedma (FaMAF - UNC, lbiedma@famaf.unc.edu.ar); Flavio Colavecchia (División Física Atómica, Molecular y Óptica, Centro Atómico Bariloche., flavioc@cab.cnea.gov.ar)

Los sistemas lineales de ecuaciones surgen en varias áreas de la ciencia para describir una gran variedad de problemas. Los continuos avances en la tecnología de cálculo permiten trabajar con sistemas lineales cada vez más grandes. La descomposición LU es una estrategia muy utilizada para ésto. A medida que las matrices se hacen más grandes, la necesidad de paralelizar este proceso también crece, trabajando con matrices en bloque y dividiendo al algoritmo en tareas que deben ser aplicadas en un cierto orden.

La computación basada en tareas es una forma de paralelismo en memoria compartida que se concentra en distribuir tareas interdependientes que se desarrollan en hilos a través de diferentes procesadores. Requiere de tres componentes básicas: un conjunto de tareas bien definidas, las dependencias entre estas tareas y un grafo acíclico dirigido que representa el flujo de trabajo del algoritmo, el cual puede ser recorrido en orden topológico.

Para aplicar este paradigma a la descomposición LU de matrices densas de gran tamaño que surgen del estudio del problema de varios cuerpos en mecánica cuántica[1], hacemos uso de QuickSched[2], una librería para programación basada en tareas que toma un enfoque diferente al de schedulers más conocidos: requiere que el programador cree el grafo de tareas completo y las dependencias explícitamente antes de la ejecución. Esto permite que el ordenador de tareas haga un mejor uso de los recursos disponibles y será útil cuando las matrices sean más grandes que la cantidad de memoria disponible en el sistema.

La descomposición LU por bloques de una matriz densa puede ser completada con 4 tipos de tareas[3] y en este trabajo presentamos un método automático para crear el grafo de tareas, que funciona para una cantidad arbitraria de bloques en la matriz A. Mostraremos el resultado de varias pruebas para estudiar la performance de la versión en QuickSched del algoritmo de descomposición LU para diferentes tamaños de matrices y configuraciones de bloques. Los cálculos numéricos sobre cada bloque son desarrollados con rutinas de LAPACK[4] en CPU y con la librería MAGMA[5] para GPU.

Referencias

[1] M. J. Ambrosio, F. D. Colavecchia, G. Gasaneo, D. M. Mitnik, L. U. Ancarani *Double ionization of helium by fast electrons with the Generalized Sturmian Functions method*, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **48** 055204, 2015.

[2] P. Gonnet, A.B.G. Chalk, M. Schaller, *QuickSched: Task-based parallelism twith dependencies and conflicts*, arXiv:1601.05384, 2016.

[3] R.M. Badia, J.R. Herrero, J. Labarta, J.M. Pérez, E.S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, *Parallelizing dense and banded linear algebra libraries using SMPSs*, Concurrency Computat.: Pract. Exper. **21**, 2438–2456, 2009.

[4] E. Anderson *et al*, *LAPACK Users' Guide* (SIAM, Philadelphia, 1992).

[5] *Matrix Algebra on GPU and Multicore Architectures*, (http:/icl.cs.utk.edu/magma/).

Reformulación de un problema de programación no lineal con restricciones multiobjetivo

Expositor: Viviana A. Ramirez (CRUB-Univ. Nac. del Comahue, viviramirezana@gmail.com)
Autor/es: Viviana A. Ramirez (CRUB-Univ. Nac. del Comahue, viviramirezana@gmail.com); Roberto Andreani (IMECC-UNICAMP-Campinas-San Pablo-Brasil, andreani@ime.unicamp.br); Sandra A. Santos (IMECC-UNICAMP-Campinas-San Pablo-Brasil, sandra@ime.unicamp.br)

En este trabajo presentamos estrategias para resolver una clase importante de problemas de toma de decisiones. Nuestro propósito consiste en minimizar una determinada función objetivo $F(x)$, donde $F : \Re^n \to \Re$ y x es un punto propriamente eficiente del problema multiobjetivo $\min\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x)$, con $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Este problema es formulado como un problema en dos niveles, donde con un escalamiento conveniente, podemos garantizar puntos propriamente eficientes del problema vectorial del nivel inferior, usando resultados de Geoffrion (1968). Este tipo particular de punto es util para la toma de decisiones óptimas sin negligenciar ninguno de los objetivos de la función vectorial.

También analizamos una dificultad presente en los métodos de Restauración Inexacta en la resolución de problemas con restricciones de complementariedad y mostramos el artificio para contornar la complicación.

Para resolver el problema en dos niveles presentamos estrategias de Restauración Inexacta (RI) y las comparamos con la estrategia de reformulación, en la cual se utilizan las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) del problema del segundo nivel como restricción de un problema de programación no lineal. También presentamos resultados numéricos que evidencian que las estrategias de RI son mejores que la reformulación KKT.

Referencias

[1] Andreani R., Castro S. L. DE C., Chela J. L., Friedlander A., Santos S. A., "An inexact-restoration method for nonlinear bilevel programming problems", *Computational Optimization and Applications*, 43 (2009), 307-328.

[2] Birgin E. G., Martínez J. M., Raydan M., "Inexact Spectral Projected Gradient methods on convexs sets", *IMA J. Numer. Anal.*, 23 (2003), 539-559.

[3] Dempe S., *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[4] Geoffrion A. M., "Proper efficiency and theory of vector maximization", *Operations Research* 15 (1968), 39-54.

[5] Martínez J. M., Pilota E., "Inexact-Restoration Algorithm for Constrained Optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications* 104 (2000), pp. 135-163.

[6] Martínez J. M., "Inexact-Restauration Method with Lagrangian Tangent Decrease and New Merit Function for Nonlinear Programming". *Journal of Optimization Theory and Applications* 111 (2001), pp. 39-58.

Soluciones numéricas para una ecuación de evolución en mecánica cuántica.

Expositor: Tatiana Da Costa (Universidad Nacional de General Sarmiento, dctatiana@hotmail.com)

Autor/es: Mariano Fernando De Leo (Universidad Nacional de General Sarmiento, marianodeleo@gmail.com); Tatiana Da Costa (Universidad Nacional de General Sarmiento, dctatiana@hotmail.com); Carla Del Grosso (Universidad Nacional de General Sarmiento, delgrossocarla@hotmail.com)

El modelado matemático del movimiento de cargas en dispositivos semiconductores con un alto grado de integración requiere del uso de la ecuación de Schroedinger, ver [4]. En esta comunicación se tomará en cuenta la ecuación $iu_t = -u_{xx} + |x|u \pm |u|^{2\sigma}u$, donde u es la función de onda, el término $|x|u$ representa un campo eléctrico unitario apuntando hacia el origen y $\pm|u|^{2\sigma}u$ representa una interacción no lineal de carácter local. Aplicando métodos espectrales de descomposición temporal, ver [2], se presentarán soluciones numéricas para el problema de Cauchy respectivo para lo cual se aprovechará la natural descomposición del operador como la suma entre el operador lineal y el término de interacción local, cada uno de los cuales posee flujos computables. El cómputo del flujo parcial lineal requiere de la descomposición espectral del operador lineal $L = -\partial_x^2 + |x|$ definido en $D(L) = \{\phi \in L^2 : \int(|x||\phi(x)|^2 + |\phi_x(x)|^2)dx < \infty\}$, que resulta ser expresable mediante funciones de Airy, ver [1,5], y del cómputo de nodos y pesos para una cuadratura gaussiana apropiada, ver [3]. El flujo parcial asociado al término de interacción local es obtenido gracias a una ley de conservación.

Referencias

[1] M. De Leo, C. Sánchez de la Vega, D. Rial, Controllability of Schroedinger equation with a nonlocal term, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 20, (2014), 23-41.

[2] M. De Leo, C. Sánchez de la Vega, D. Rial, High-order time-splitting methods for irreversible equations, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25, (2015), 1-25.

[3] W. Gautschi, Computational aspects of orthogonal polynomials, in *Orthogonal Polynomials–Theory and Practice*. P. Nevai, ed. NATO ASI Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 294, Kluwer Academic Publisher, (1990), 181-216.

[4] P.A. Markowich, C.A. Ringhofer, and C. Schmeiser, *Semiconductor equations,* Springer, (1990).

[5] O. Vallée, M. Soares, *Airy Functions and Applications to Physics*, Imperial College Press, (2004).

Implementación simple del MEF aplicado al problema del laplaciano fraccionario con condición de Dirichlet homogénea en 2D

Expositor: Francisco Bersetche (IMAS-CONICET-FyCEN, bersetche@gmail.com)
Autor/es: Gabriel Acosta (IMAS-CONICET-FyCEN, gacosta@dm.uba.ar); Francisco Bersetche (IMAS-CONICET-FyCEN, bersetche@gmail.com); Juan Pablo Borthagaray (IMAS-CONICET-FyCEN, jpbortha@dm.uba.ar)

La naturaleza no local del laplaciano fraccionario en la forma integral

$$\left\{ \begin{array}{rl} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c. \end{array} \right. \tag{8}$$

trae como consecuencia problemas de implementación atípicos a la hora de aplicar el método de elementos finitos. Siguiendo el lineamiento de la formulación débil del problema, el ensamblado de la matriz de rigidez requiere el cómputo de integrales que se extienden sobre dominios no acotados involucrado nucleos singulares. Por otro lado las matrices de rigidez son densas en contraste con el caso del laplaciano clásico.

En nuestro trabajo presentamos una implementación en Matlab del MEF para el problema ya mencionado, con la cual se intentó lograr un equilibrio entre eficiencia computacional y simplicidad, priorizando esta última para lograr un código fácilmente adaptable a problemas similares. Asimismo se detallan con rigurosidad las técnicas utilizadas para el tratamiento de las integrales implicadas y se dan ejemplos para los problemas tratados en [1, 2].

Referencias

[1] G. Acosta and J. Borthagaray, A Fractional Laplace Equation: Regularity of Solutions and Finite Element Approximations, preprint, arXiv:1507.08970, 2015

[2] J. Borthagaray, L. M. Del Pezzo, S. Martínez, Finite element approximation for the fractional eigenvalue problem, preprint, arXiv:1603.00317, 2016

Aproximación por elementos finitos de problemas de Stokes-Darcy en dominios curvos.

Expositor: María Lorena Stockdale (IMAS-CONICET, lore2095@yahoo.com.ar)
Autor/es: María Gabriela Armentano (IMAS-CONICET-Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA, garmenta@dm.uba.ar); María Lorena Stockdale (IMAS-CONICET, lore2095@yahoo.com.ar)

En este trabajo estudiamos la resolución por elementos finitos del modelo acoplado de las ecuaciones de Stokes y de Darcy en un dominio curvo en el plano.

Estos problemas modelan la interfaz entre un fluido viscoso incompresible, gobernado por la ecuación de Stokes, y el flujo del fluido en un medio poroso, gobernado por la ecuación de Darcy, los cuales despiertan gran interés dadas sus múltiples aplicaciones en diversos campos, tales como la ingeniería de reservorios, el transporte de contaminantes en un río, etc.

Asumiendo que el dominio Ω se puede descomponer como $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_F$, siendo Ω_p la porción porosa de Ω y Ω_F la porción de Ω ocupada por el fluido, nuestro problema es entonces hallar la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p del fluido tal que:

$$
\begin{cases}
\alpha \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega_P \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega_P \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = k & \text{en } \Gamma_P \\
-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega_F \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega_F \\
\mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_F \\
\mathbf{u}|_{\Omega_P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}|_{\Omega_F} \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma \\
-p|_{\Omega_P} \mathbf{n} = \nu \; \partial_n \mathbf{u}|_{\Omega_F} - p|_{\Omega_F} \; \mathbf{n} & \text{en } \Gamma
\end{cases}
$$

siendo $\Gamma_P = \partial\Omega \cap \partial\Omega_P$, $\Gamma_F = \partial\Omega \cap \partial\Omega_F$ y Γ la interfase entre el fluido y el medio poroso. Los parámetros ν y α son constantes positivas y representan la viscosidad del fluido y la proporción de la viscosidad sobre la permeabilidad del medio, respectivamente.

Es sabido que las familias de elementos finitos estables para el problema de Stokes y de Darcy no suelen ser las mismas, siendo entonces un problema interesante la elección de espacios de elementos finitos adecuados para el problema acoplado. Trabajaremos con triángulos curvos con la finalidad de poder representar fehacientemente el dominio, y más específicamente la interface, y mostraremos elementos finitos estables para los cuales se obtienen estimaciones de error de orden óptimo.

Estimación de parámetros estocásticos en modelos

Expositor: German Ariel Torres (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE, torres@famaf.unc.edu.ar)
Autor/es: German Ariel Torres (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE, torres@famaf.unc.edu.ar)

En este trabajo se propone utilizar el método Expectation-Maximization (EM) para estimar parámetros estocásticos en modelos no lineales de predicción.

El método EM es un método iterativo que consiste en dos etapas:

- calcular la función log-likelihood condicionada a observaciones, y
- maximizar tal función para encontrar una nueva estimación de los parámetros.

Cada iteración del método EM involucra la aplicación del filtro de Kalman y un smoother en cada iteración. Además involucra un procedimiento de maximización que puede realizarse a través de técnicas de optimización o en el mejor de los casos, se podría encontrar un máximo analítico.

Se ha demostrado que en el caso de state-space models lineales el método EM es convergente.

Nuestro objetivo es aplicar esta técnica para estimar parámetros que en modelos no lineales y donde los parámetros a estimar sean no aditivos. Se realizaron experimentos numéricos preliminares en modelos no lineales como el modelo Lorenz 63 y el modelo Lorenz 96. La aplicación final de esta metodología es aplicarla en modelos meteorológicos para estimar parámetros estocásticos.

Estimación de parámetros biológicos espaciales en un modelo de reacción-difusión para la distribución poblacional de ranas.

Expositor: Maria De Los Angeles Martinez Arraigada (FaMAF, mary_cba03@hotmail.com)
Autor/es: Maria De Los Angeles Martinez Arraigada (FaMAF, mary_cba03@hotmail.com); Luis Biedma (FaMAF, lbiedma17@gmail.com); Damián Fernández Ferreyra (FaMAF, dfernandez@famaf.unc.edu.ar); Melina Zárate (FaMAF, melina.zarate@gmail.com)

En este trabajo se intentará estimar parámetros en un modelo de crecimiento de población de ranas, gobernado por una ecuación diferencial del tipo reacción-difusión. La estimación paramétrica se resolverá utilizando cuadrados mínimos, trabajando con datos de la población obtenidos en la región de las yungas jujeñas.

El modelo original tiene en cuenta la evolución en el tiempo de la población. Sin embargo, en este trabajo se considerará un estado cuasi estacionario, pues la población es endémica y el estudio apunta a relacionarla con cada tipo de terreno.

Dado que el comportamiento de las ranas y los parámetros que se buscan dependen del tipo de superficie en el que se encuentran, se propone resolver la ecuación aplicandouna técnica de descomposición de dominios basándose en imágenes satelitales NDVI, un índice usado para estimar la calidad, cantidad y desarrollo de la vegetación.

La ecuación posee un término de taxismo, que representa la preferencia de las ranas por las zonas cercanas de mayor humedad. Se propone una forma de calcular este término mediante un filtro de búsqueda de diferencia máxima, utilizando datos de imágenes satelitales NDWI, las cuales poseen información sobre la cantidad de agua y el nivel de humedad del ambiente.

La resolución de la ecuación se realizará mediante el método de elementos finitos. Se utilizarán elementos cuadrados para la resolución numérica del problema, pues la información con la que se trabaja está delimitada por los píxeles de las imágenes.

Se evaluará la consistencia del modelo en relación a la solución obtenida y los datos disponibles.

Ecuaciones de Euler–Lagrange Fraccionarias utilizando solo Derivadas de Caputo

Expositor: Melani Barrios (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-UNR-CONICET, melani@fceia.unr.edu.ar)
Autor/es: Melani Barrios (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-UNR-CONICET, melani@fceia.unr.edu.ar); Gabriela Reyero (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-UNR, greyero@fceia.unr.edu.ar)

En este trabajo se presentan avances en problemas variacionales fraccionarios del tipo

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha y)\, dx,$$

donde la derivada fraccionaria por derecha se entiende en el sentido de Caputo ([4]).

Se muestran nuevas formulaciones de la ecuación de Euler–Lagrange fraccionaria asociada:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} + {}_x D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0.$$

una en forma integral, y una que depende sólo de las derivadas fraccionarias de Caputo ([3]).
La importancia de esto reside en que las ecuaciones diferenciales fraccionarias que involucran sólo derivadas de Caputo se adaptan mejor a aplicaciones en física e ingeniería que las ecuaciones diferenciales fraccionarias que involucran derivadas de Caputo y de Riemman–Liouville.
Se plantean problemas variacionales fraccionarios isoperimétricos con restricción integral y se presentan algunos ejemplos.

Referencias

[1] Agrawal O.P., Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems, J. Math. Anal. Appl. 272(1) pp. 368-379 (2002).

[2] Almeida R., Ferreira R., Torres D., Isoperimetric problems of the calculus of variations with fractional derivatives. arXiv:1105.2078v1, (2011).

[3] Lazo M., Torres D., The DuBois-Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and an Euler-Lagrange equation involving only derivatives of Caputo. J. Optim. Theory and Appl. 156, pp56-67, (2013).

[4] Odzijewicz T., Malinowska A., Fractional Variational Calculus with Classical and Combined Caputo Derivatives, arXiv:1101.2932v1, (2011).

Estimación anisotrópica del error de interpolación bajo la doble condición del ángulo

Expositor: Gabriel Monzón (Universidad Nacional de General Sarmiento, gabrielmonzon@gmail.com)

Autor/es: Gabriel Monzón (Universidad Nacional de General Sarmiento, gabrielmonzon@gmail.com)

Sobre un rectángulo R de lados l_1 y l_2 paralelos a los ejes coordenados, vale la siguiente estimación anisotrópica del error para el operador de interpolación de Lagrange de primer orden (Q_1)

$$|u - Q_1 u|_{1,R} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,R} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,R} \right]. \tag{9}$$

Si una estimación similar valiera sobre un cuadrilátero K, es razonable pensar que para este elemento existen dos direcciones particularmente distinguidas l_1, l_2 de modo que K no difiere significativamente del paralelogramo determinado por tales direcciones. Esta intuición respecto a la geometría del cuadrilátero puede verse corroborada con las condiciones usualmente pedidas a tal fin. Concretamente, y hasta donde sabemos, los elementos para los cuales vale (9) son rectángulos o pequeñas perturbaciones de éstos. Hablar de *perturbaciones de rectángulos* es poco preciso; no obstante, lo haremos en el sentido otorgado en [Apel Th., Adv. in Num. Math. B. G. Teubner, Stuttgart, 261 pp (1999)]: un cuadrilátero K es una perturbación de un rectángulo si el mapeo F_K entre el cuadrado unitario $\hat{K}$ y K está dado por

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + \sum_{i=1}^{4} a^{(i)} \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \qquad (b \leq a) \tag{10}$$

donde $\hat{\phi}_i$ denota la función base asociada al vértice $\hat{V}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$; y, para los vectores *distorsivos* $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, existen constantes a_0, a_1, a_2 tales que

$$|a_i^{(j)}| \leq a_i b, \quad 0 \leq a_i \lesssim 1, \quad i = 1, 2, \; j = 1, \ldots, 4, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{b} a_1 - a_2 \geq a_0 > 0. \tag{12}$$

El primer término en el lado derecho de (10) corresponde a la tansformación que aplica $\hat{K}$ en el rectángulo $R_{ab} = [0, a] \times [0, b]$; mientras que el segundo término es la perturbación de R_{ab} propiamente dicha. No obstante, la interpretación geométrica de (11) y (12) no es evidente ni clara.

Nosotros hemos probado que, para los elementos de interés; es decir, cuadriláteros anisotrópicos (aquellos que no satisfacen la *propiedad de regularidad*), la *doble condición del ángulo DAC* (ángulo mínimo acotado lejos de cero y ángulo máximo acotado lejos de π) es una condición equivalente a (11)-(12). En consecuencia, para aquellos cuadriláteros que satisfacen la DAC, hemos obtenido la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,K} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,K} \right] \tag{13}$$

siendo l_1 y l_2 dos lados adyacentes de K de modo que el paralelogramo determinado por estas direcciones contiene enteramente a K.

La ventaja de esta nueva caracterización no es solo la simplificación en el chequeo de la DAC, en contraposición a la complejidad de (11)-(12); sino también, una caracterización alternativa en términos de cierta configuración de referencia.

Construcción de multiwavelets de Hermite

Expositor: Lucila Daniela Calderón (Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, CONICET, luciladaniela@yahoo.com.ar)

Autor/es: Lucila Daniela Calderón (Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, CONICET, luciladaniela@yahoo.com.ar); María Teresa Martín (Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, teremartin.map@gmail.com); Victoria Vampa (Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, victoriavampa@gmail.com)

La solución numérica de problemas con aplicación real, modelados en diversos casos mediante sistemas de ecuaciones diferenciales, conduce a modelos matemáticos cada vez más complejos. En las últimas décadas, el uso del análisis wavelet ha tenido un crecimiento significativo en la resolución de este tipo de problemas, ya que las wavelets suelen tener propiedades que son especialmente útiles para representar soluciones de ecuaciones diferenciales, tales como ortogonalidad, soporte compacto y regularidad.

Además de la capacidad que brinda el análisis multirresolución de representar funciones en diferentes niveles de resolución, sugiere la aplicación del método de wavelet-Galerkin para el cálculo de aproximaciones eficientes y estables de la solución buscada.

La idea de este trabajo es construir bases wavelet de splines cúbicas de Hermite en un intervalo, que satisfagan ciertas condiciones específicas de ortogonalidad. En 1992, Chui y Wang [1], diseñaron wavelets semi-ortogonales adaptadas luego al intervalo $[0, 1]$. Más recientemente, Rong-Qing et al. [2], propusieron una nueva estrategia basada en las splines cúbicas de Hermite, en la que en lugar de la semi-ortogonalidad, se requiere que las wavelets de diferentes niveles de resolución sean ortogonales con respecto al producto interior de las derivadas de las funciones, esto es $\langle u', v' \rangle = \int_{\mathbb{R}} u'(x)\, v'(x)\, dx, \quad \text{para } u, v \in L_2(\mathbb{R})$.

Nuestra propuesta es extender el requerimiento de ortogonalidad, definiendo un producto interior más general basado en la forma bilineal planteada por el problema de segundo orden que se estudia. Para verificar las propiedades ventajosas en cuanto a condicionamiento se muestra además, en este trabajo, una aplicación de las bases wavelets de Rong-Qing et al. [2], para la resolución de la ecuación de Sturn-Liouville con condiciones de contorno de Dirichlet.

Referencias

[1] C.K. Chui and J.Z. Wang, *On compasupported wavelets and a duality principle*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1992), pp 903-916.

[2] Rong-Qing Jia and Song-Tao Liu, *Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval*, Advance in Computational Mathematics 25 (2006), pp 23-39.