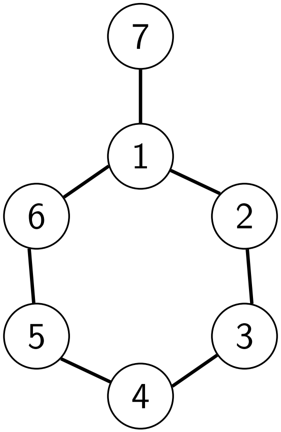
# *Descomposición Nula: Un estudio sobre el espacio nulo de la matriz de Adyacencia*

Adrián Pastine

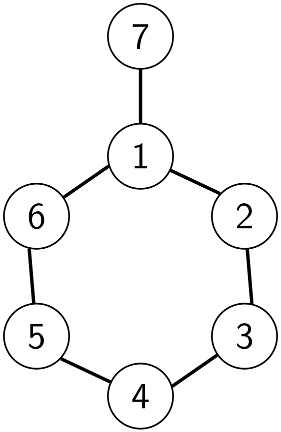
Grupo de Teoría Algebraica de Grafos
Universidad Nacional de San Luis

IX Seminario de la Red Latinoamericana de Optimización Discreta y Grafos
SODyG 2018

# *Matriz de Adyacencia*

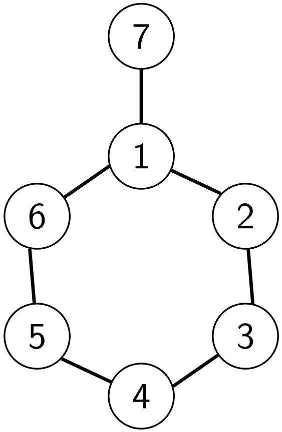


# *Matriz de Adyacencia*



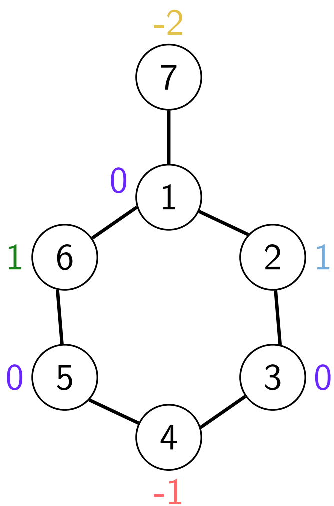

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Adyacencia



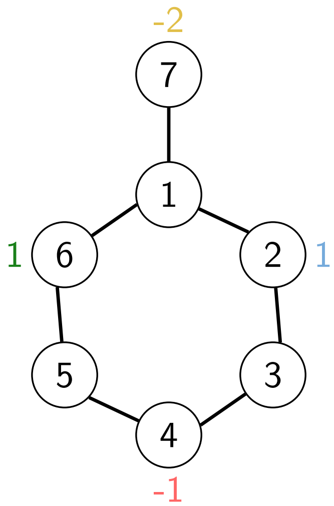

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Adyacencia



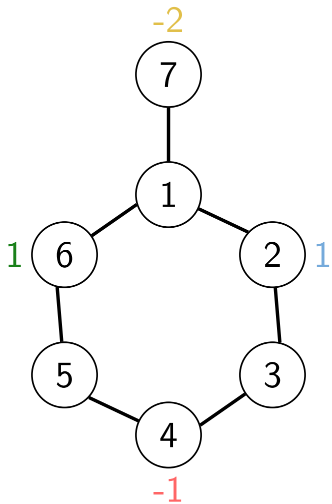

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Adyacencia



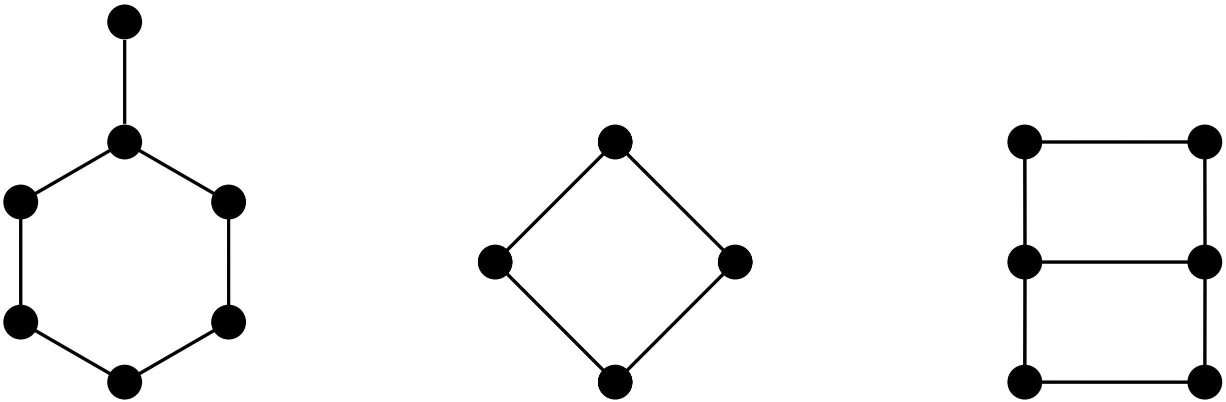

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

# *Matriz de Adyacencia*

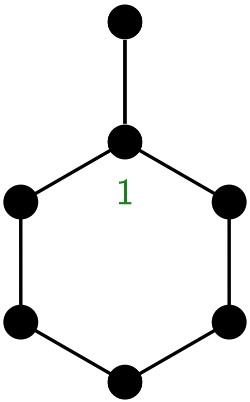


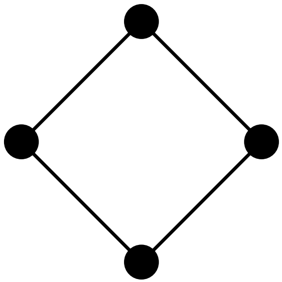

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

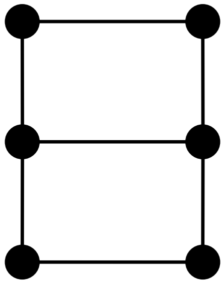
# Tres grafos



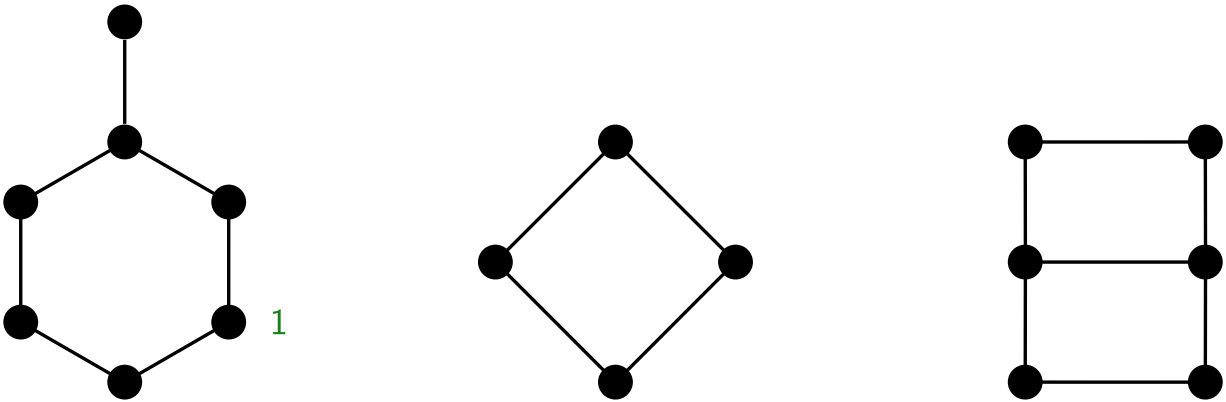
# *Tres grafos*



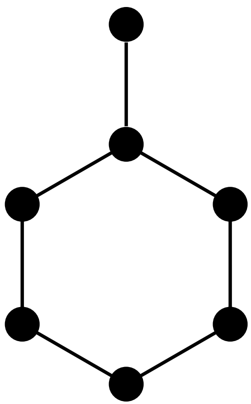





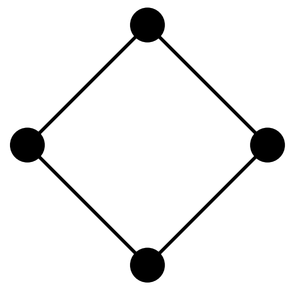
# *Tres grafos*

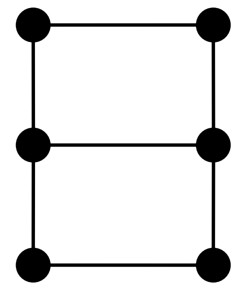


# Tres grafos

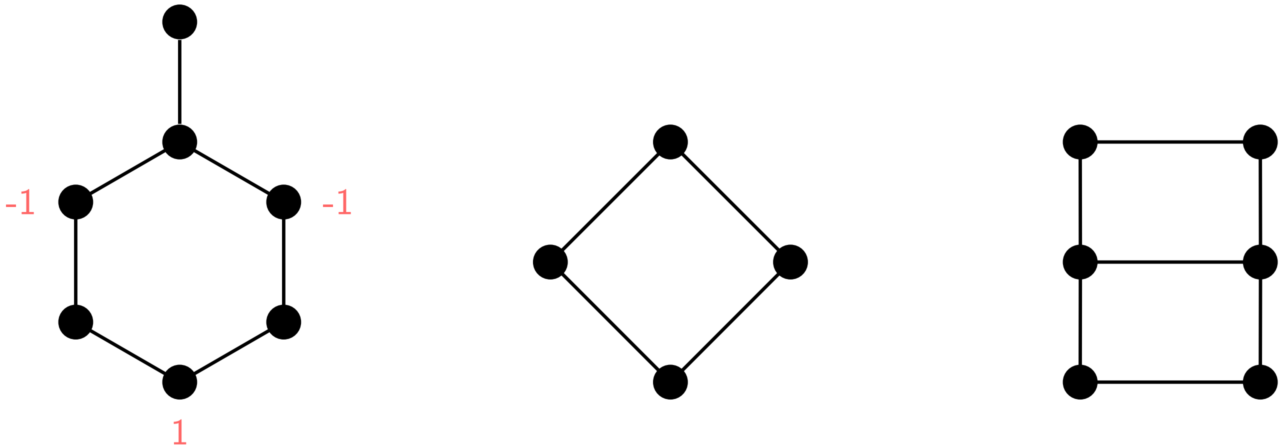


1

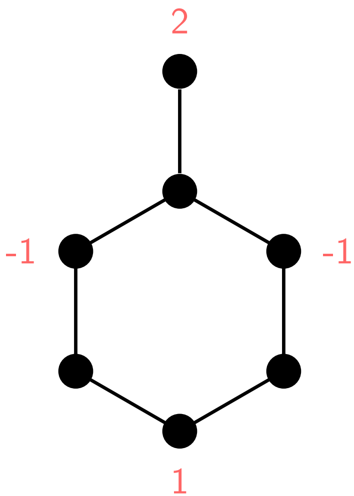


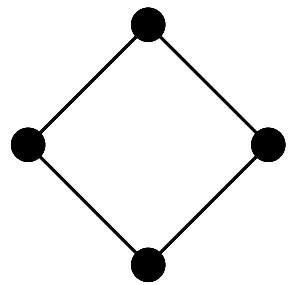


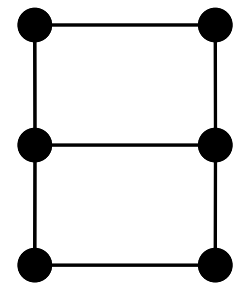
# *Tres grafos*



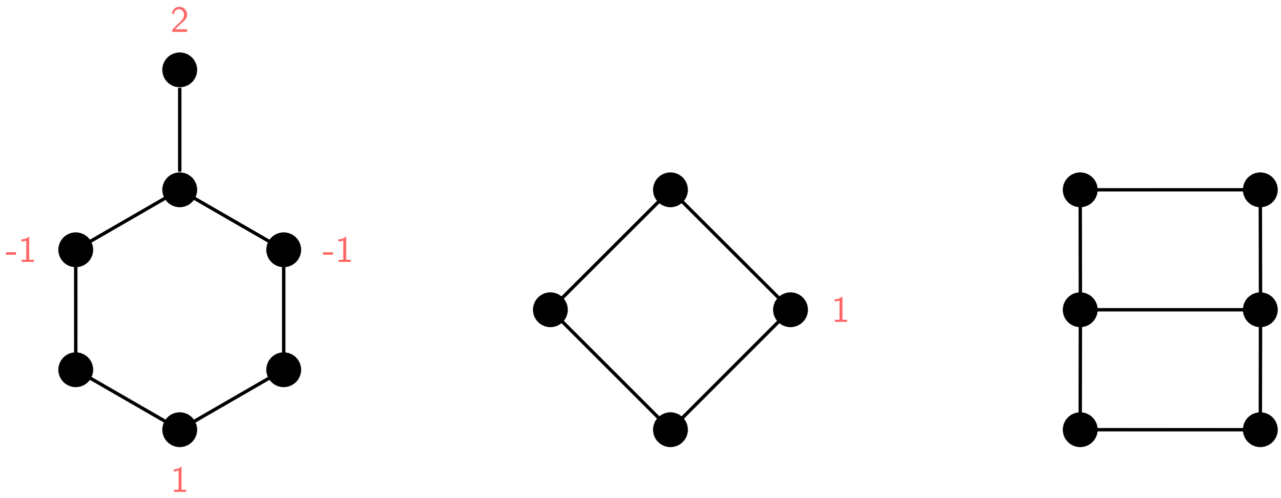
# *Tres grafos*



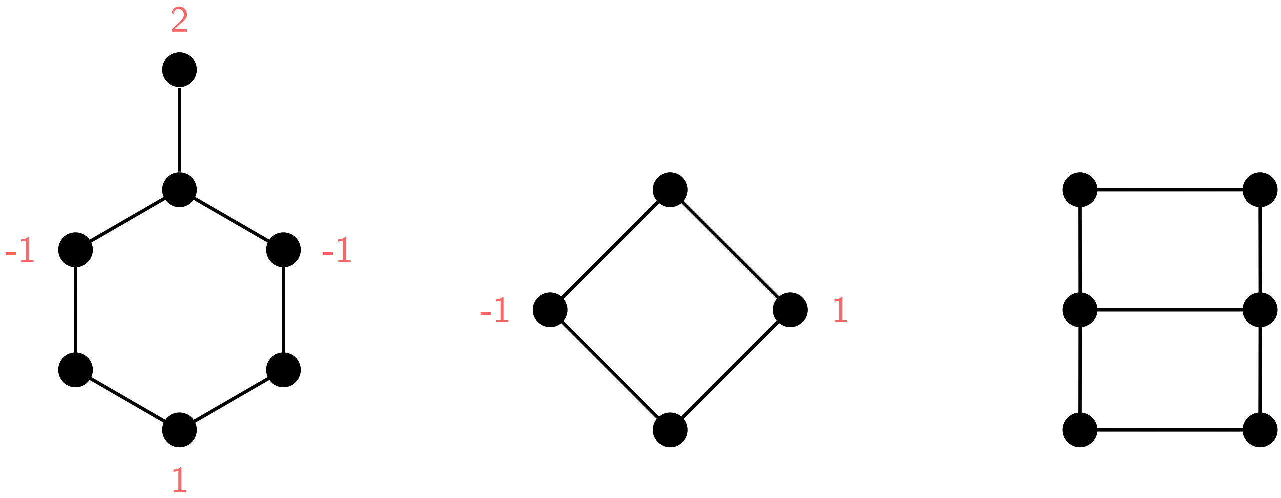





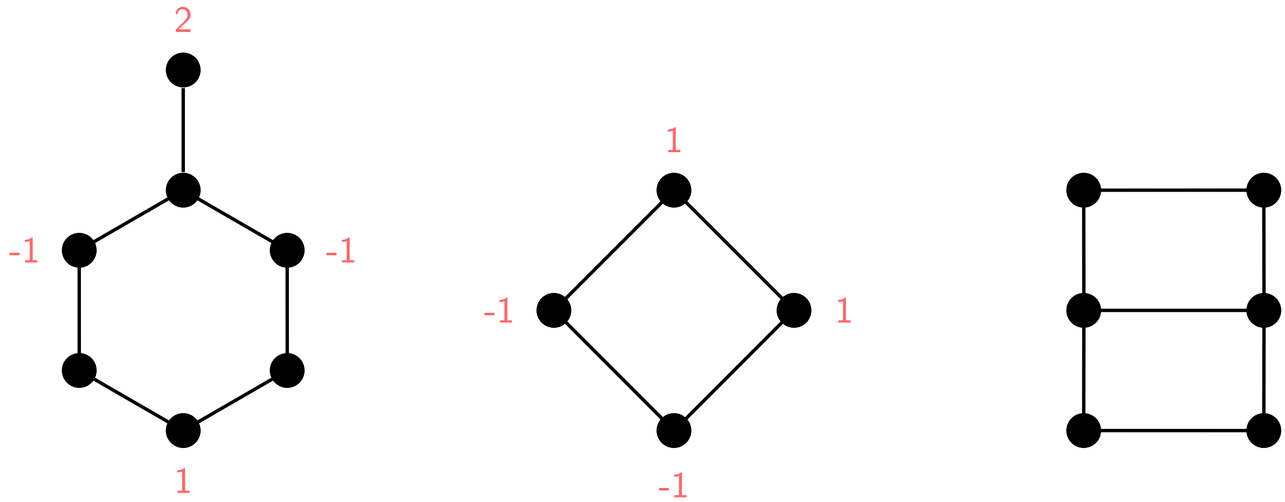
# *Tres grafos*



# *Tres grafos*



# Tres grafos



# Soporte, Core y Parte N

**Definición (Soporte)**

El *soporte* de un grafo $G$, $\mathrm{Supp}(G)$, es el conjunto de vértices con una entrada distinta de cero en algún vector del espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

# *Soporte, Core y Parte N*

### *Definición (Soporte)*

El *soporte* de un grafo $G$, $\mathrm{Supp}(G)$, es el conjunto de vértices con una entrada distinta de cero en algún vector del espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

### *Definición (Core)*

El *core* de un grafo $G$, $\mathrm{Core}(G)$, es el conjunto de vecinos de los vértices del soporte de $G$.

# Soporte, Core y Parte N

### Definición (Soporte)

El *soporte* de un grafo $G$, $\mathrm{Supp}(G)$, es el conjunto de vértices con una entrada distinta de cero en algún vector del espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

### Definición (Core)

El *core* de un grafo $G$, $\mathrm{Core}(G)$, es el conjunto de vecinos de los vértices del soporte de $G$.

### Definición (Parte $N$)

La *parte* $N$ de un grafo $G$, $\mathrm{Npart}(G)$, es el conjunto de vértices que no está ni en $\mathrm{Supp}(G)$ ni en $\mathrm{Core}(G)$,

# *Soporte, Core y Parte $N$*

**Definición (Soporte)**

El *soporte* de un grafo $G$, $\operatorname{Supp}(G)$, es el conjunto de vértices con una entrada distinta de cero en algún vector del espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

**Definición (Core)**

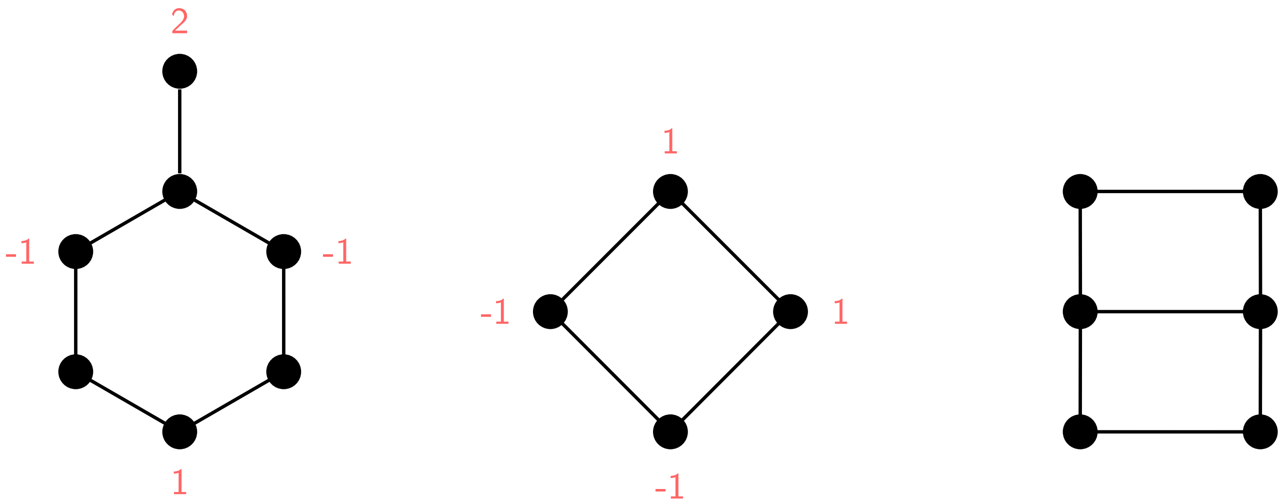
El *core* de un grafo $G$, $\operatorname{Core}(G)$, es el conjunto de vecinos de los vértices del soporte de $G$.

**Definición (Parte $N$)**

La *parte $N$* de un grafo $G$, $\operatorname{Npart}(G)$, es el conjunto de vértices que no está ni en $\operatorname{Supp}(G)$ ni en $\operatorname{Core}(G)$,

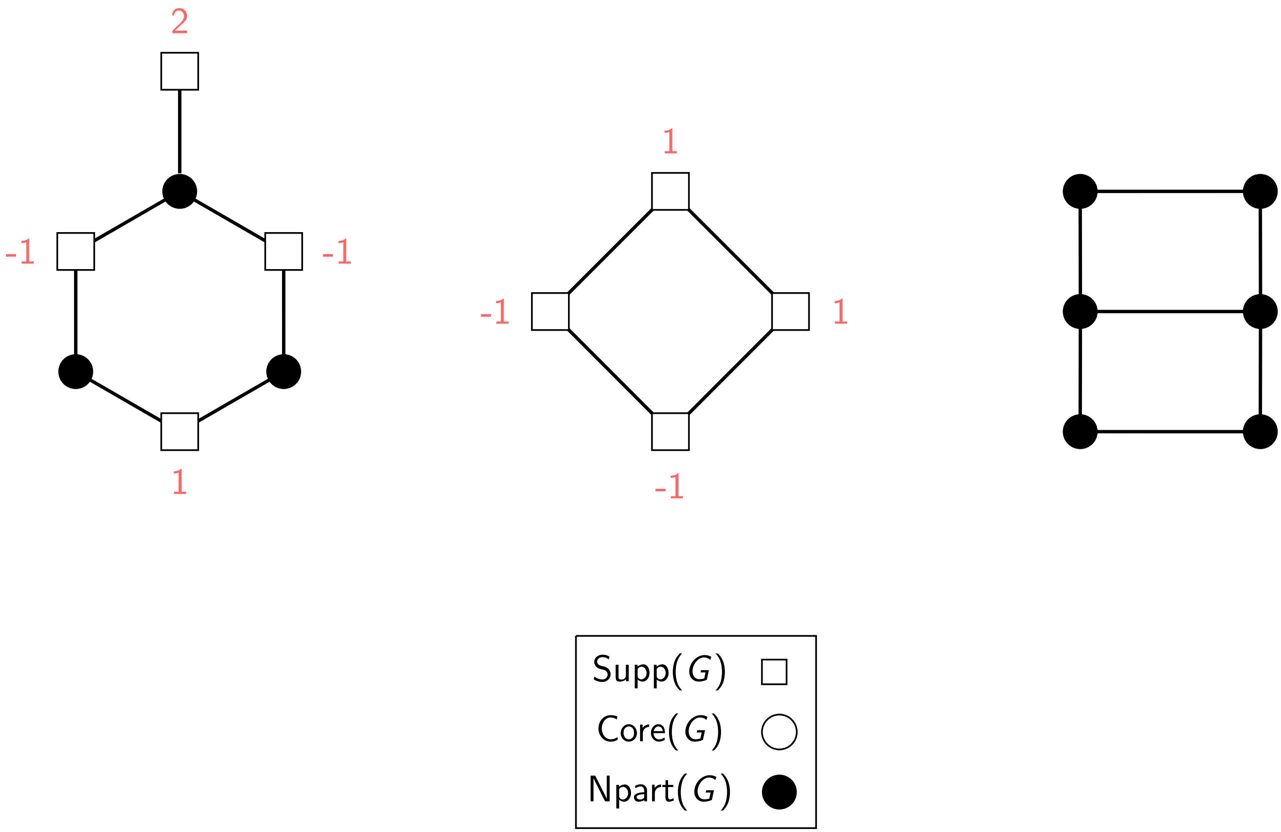
$$\operatorname{Npart}(G) = V(G) - (\operatorname{Supp}(G) \cup \operatorname{Core}(G))$$

# *Soporte, Core, y Parte N en los ejemplos*

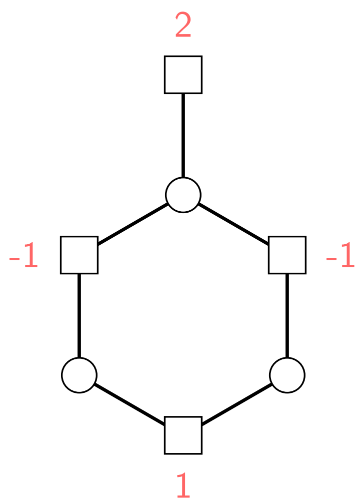


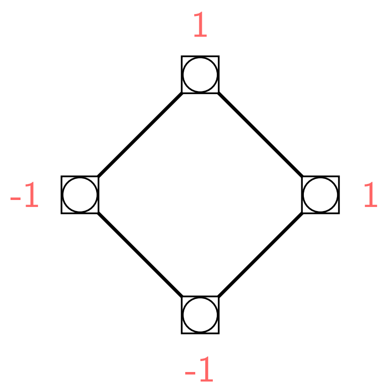

| | |
|---|---|
| Supp($G$) | □ |
| Core($G$) | ○ |
| Npart($G$) | ● |

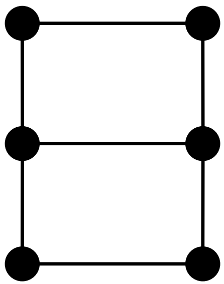
# *Soporte, Core, y Parte* N *en los ejemplos*

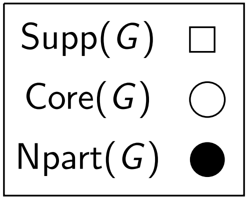


# *Soporte, Core, y Parte N en los ejemplos*

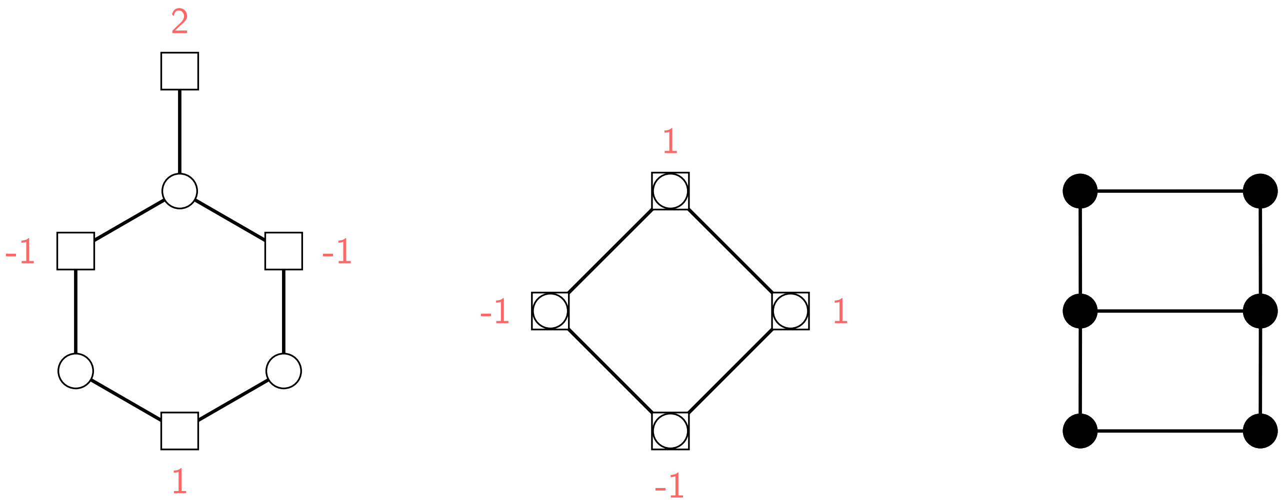




# *Soporte, Core, y Parte N en los ejemplos*




Supp($G$) □
Core($G$) ○
Npart($G$) ●

# Algunos resultados

**Teorema (Jaume y Molina, 2017)**

En árboles, el soporte, el core y la parte $N$ particionan los vértices.

# *Algunos resultados*

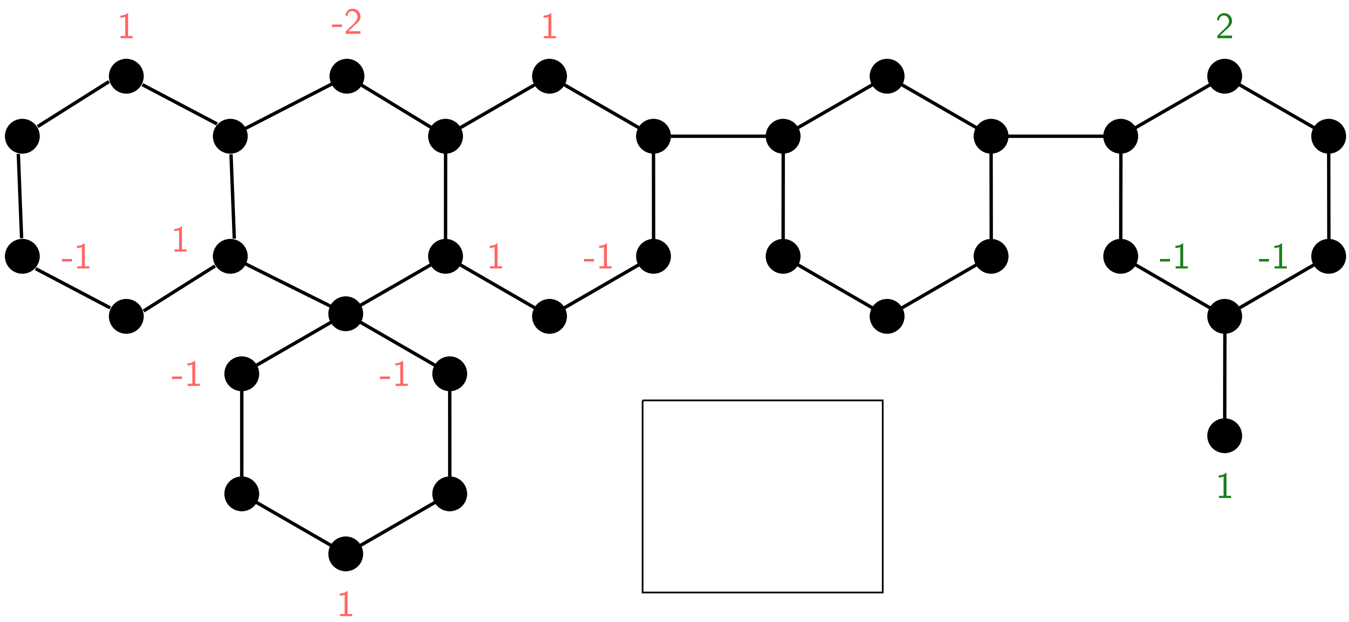
***Teorema (Jaume y Molina, 2017)***

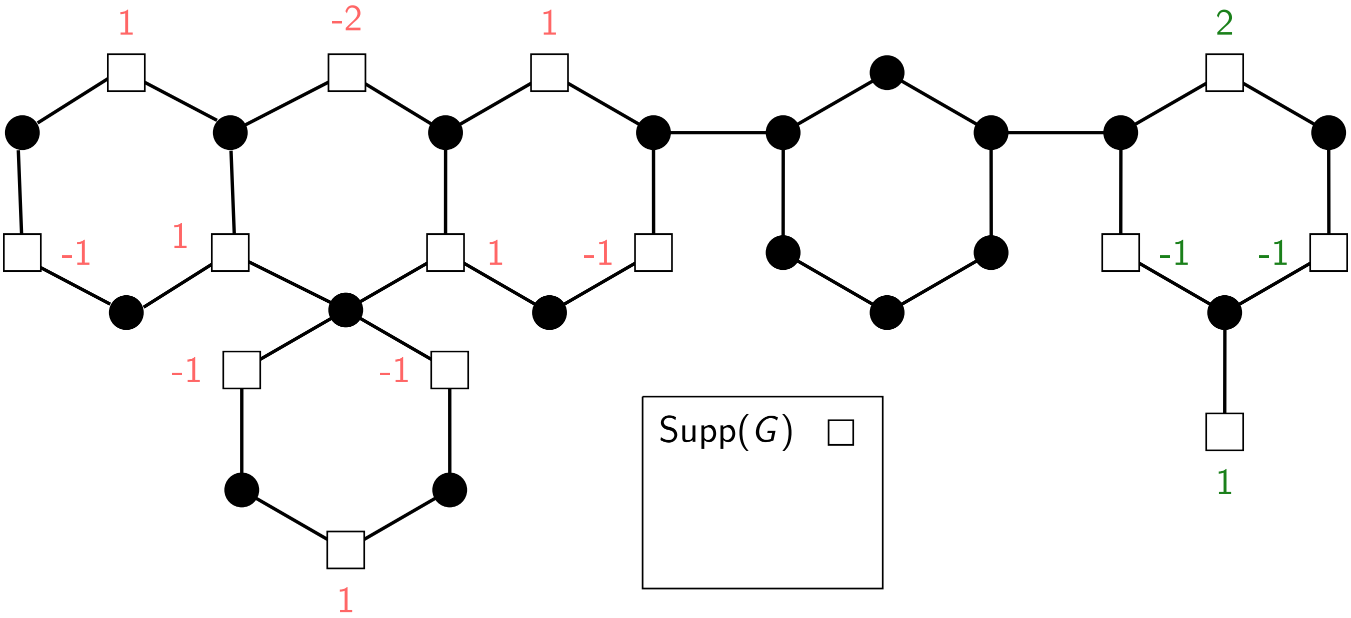
En árboles, el soporte, el core y la parte $N$ particionan los vértices.

***Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)***

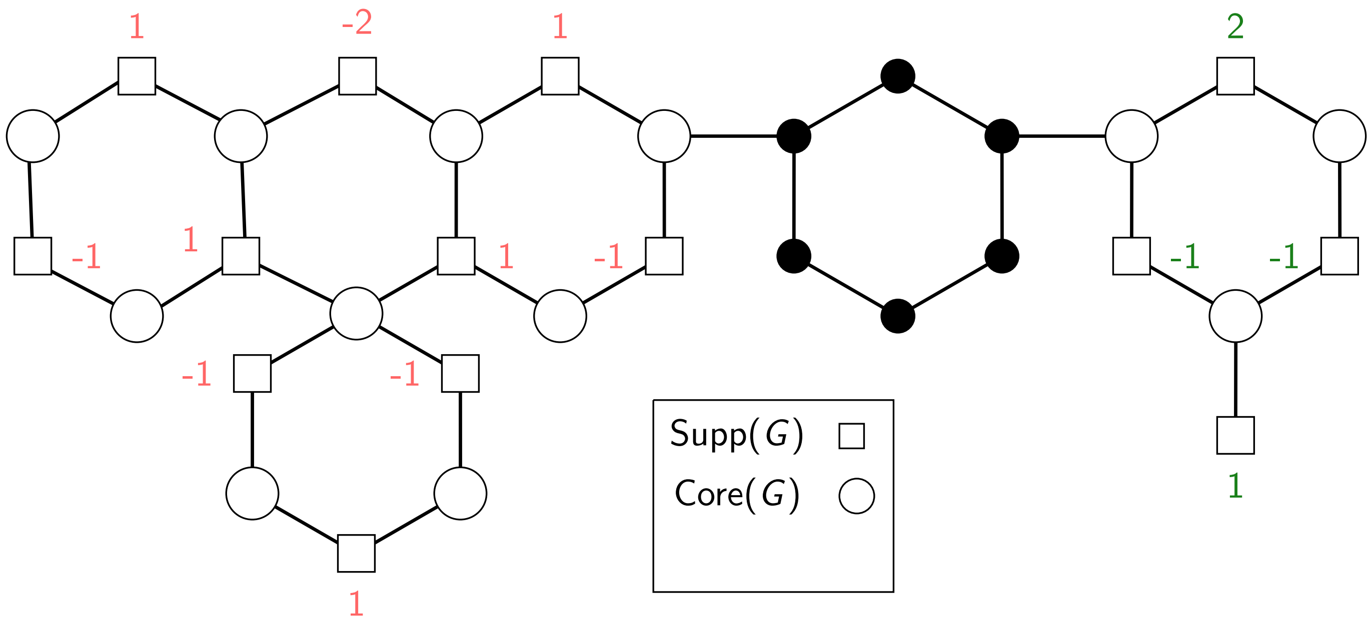
En grafos bipartitos sin ciclos de longitud múltiplo de 4, el soporte, el core y la parte $N$ particionan los vértices.

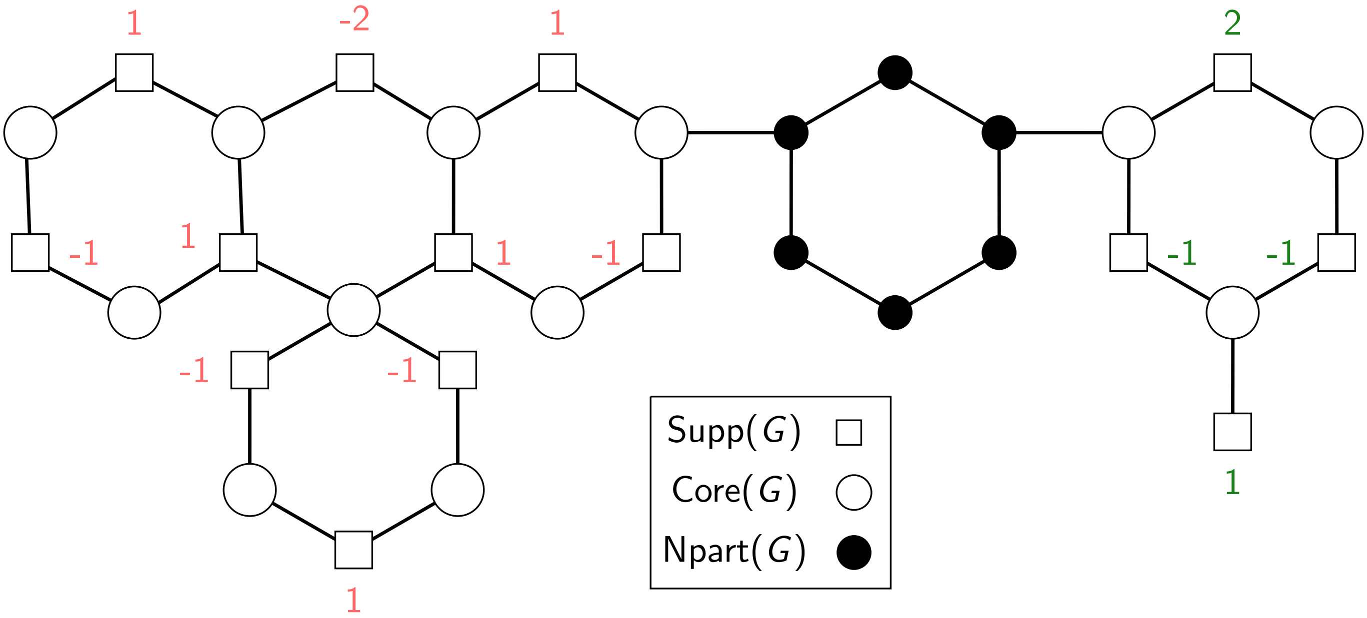
# Grafos Bipartitos $C_{4k}$-free




1
-2
1
2
-1
1
1
-1
-1
-1
-1
-1
1
1
Supp($G$)

# Grafos Bipartitos $C_{4k}$-free




1
-2
1
2
-1
1
1
-1
-1
-1
-1
-1
1
1
Supp($G$)
Core($G$)
Npart($G$)

# *Subgrafos* $S$ *y* $N$

### *Definición*

Dado un grafo $G$, el *subgrafo N* de $G$, $C_N(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Npart}(G)$.

# *Subgrafos $S$ y $N$*

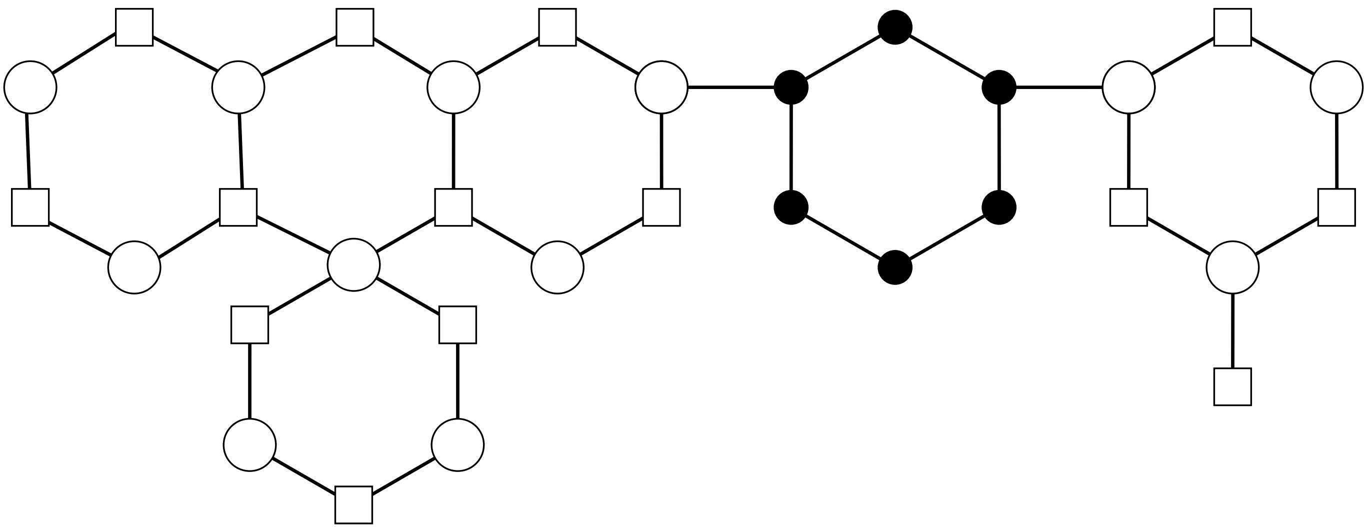
*Definición*

Dado un grafo $G$, el *subgrafo $N$* de $G$, $C_N(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Npart}(G)$. El *subgrafo $S$* de $G$, $C_S(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Supp}(G) \cup \mathrm{Core}(G)$.

# *Subgrafos $S$ y $N$*

**Definición**

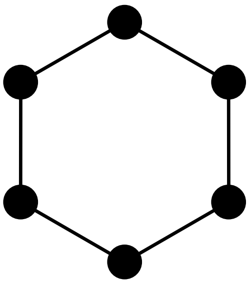
Dado un grafo $G$, el *subgrafo N* de $G$, $C_N(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Npart}(G)$. El *subgrafo S* de $G$, $C_S(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Supp}(G) \cup \mathrm{Core}(G)$.



# *Subgrafos* $S$ *y* $N$

## *Definición*

Dado un grafo $G$, el *subgrafo N* de $G$, $C_N(G)$, es el subgrafo inducido por Npart$(G)$. El *subgrafo S* de $G$, $C_S(G)$, es el subgrafo inducido por Supp$(G) \cup$ Core$(G)$.

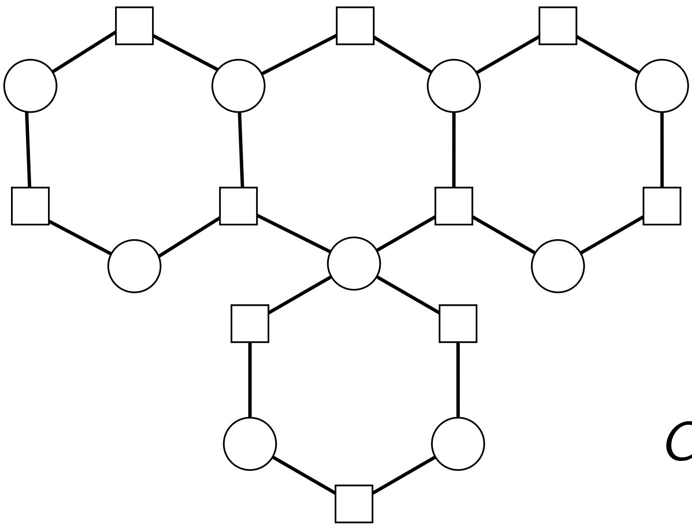


$C_N(G)$

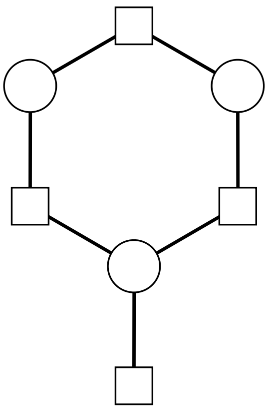
# Subgrafos $S$ y $N$

## Definición

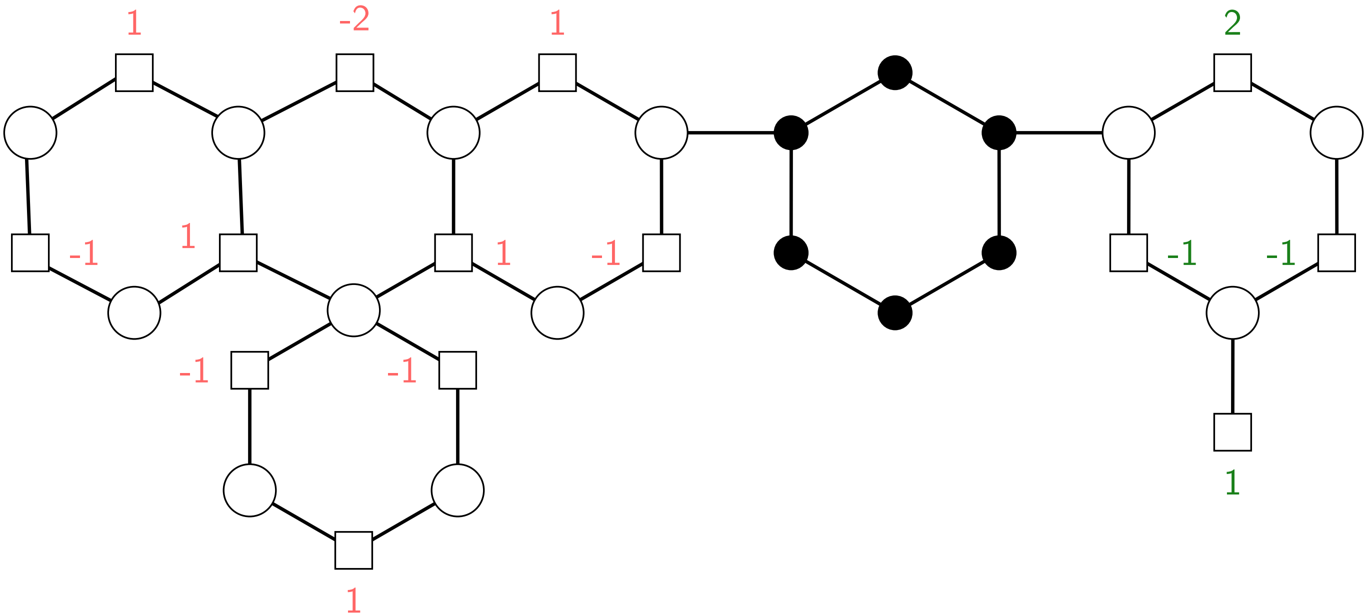
Dado un grafo $G$, el *subgrafo N* de $G$, $C_N(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Npart}(G)$. El *subgrafo S* de $G$, $C_S(G)$, es el subgrafo inducido por $\mathrm{Supp}(G) \cup \mathrm{Core}(G)$.



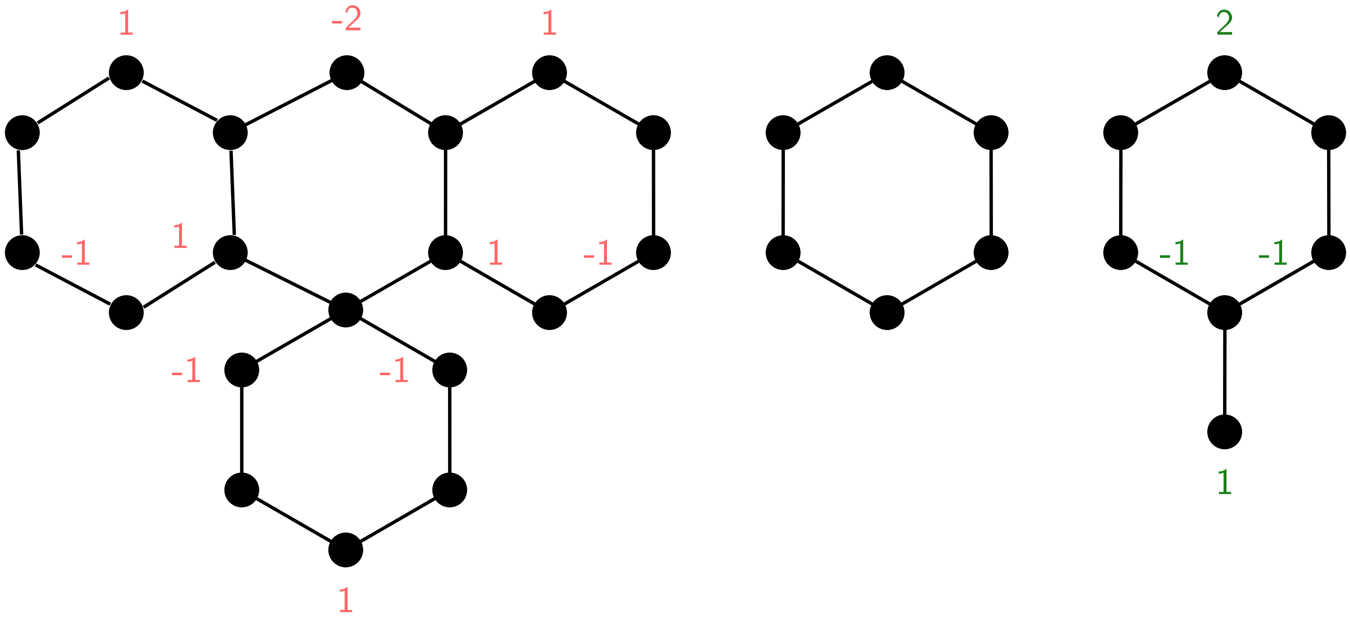
$C_S(G)$



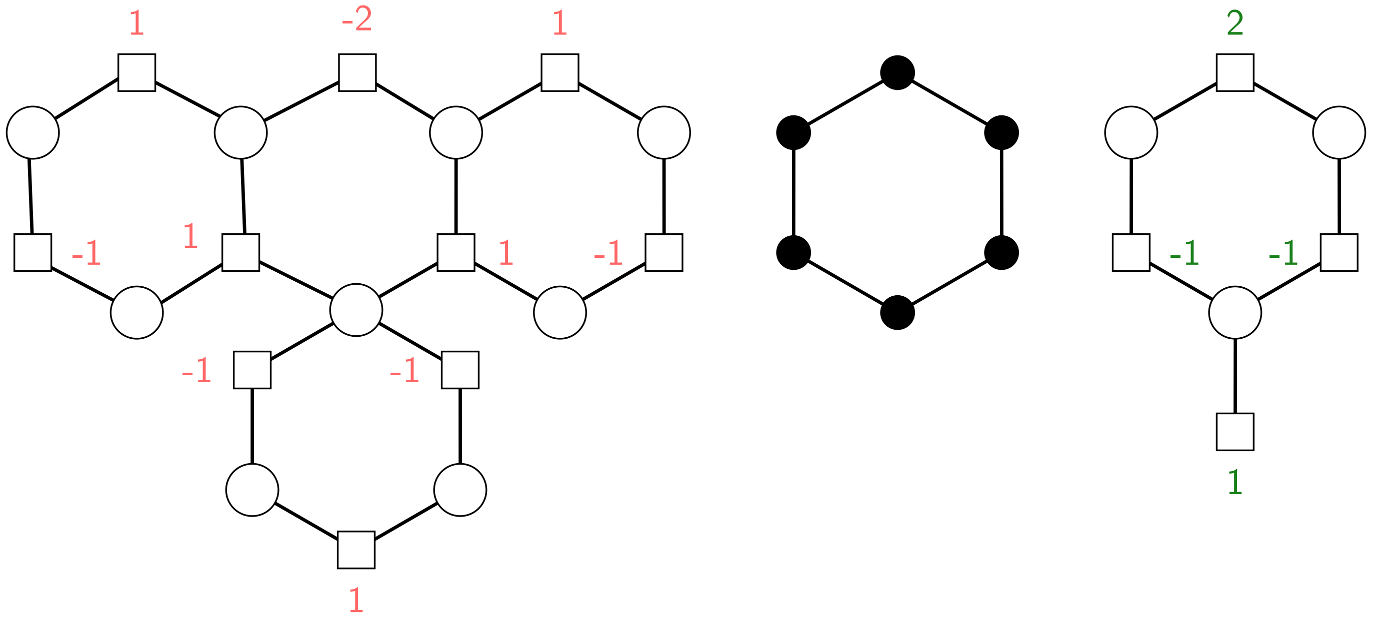
## *Soporte, core y parte* $N$ *de* $C_N(G)$ *y* $C_S(G)$



# *Soporte, core y parte* $N$ *de* $C_N(G)$ *y* $C_S(G)$



# *Soporte, core y parte* $N$ *de* $C_N(G)$ *y* $C_S(G)$



*Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

# *Propiedades espectrales de la descomposición*

### *Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

### *Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

# Propiedades espectrales de la descomposición

*Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\mathrm{Supp}(G) = \mathrm{Supp}(C_S(G))$,

# Propiedades espectrales de la descomposición

**Definición**

Sea $G$ un grafo, por $\text{Rank}(G)$ y $\text{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\text{Supp}(G) = \text{Supp}(C_S(G))$,
2. $\text{Core}(G) = \text{Core}(C_S(G))$,

# Propiedades espectrales de la descomposición

### *Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

### *Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\mathrm{Supp}(G) = \mathrm{Supp}(C_S(G))$,
2. $\mathrm{Core}(G) = \mathrm{Core}(C_S(G))$,
3. $\mathrm{Npart}(G) = \mathrm{Npart}(C_N(G))$,

## Propiedades espectrales de la descomposición

### *Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

### *Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\mathrm{Supp}(G) = \mathrm{Supp}(C_S(G))$,
2. $\mathrm{Core}(G) = \mathrm{Core}(C_S(G))$,
3. $\mathrm{Npart}(G) = \mathrm{Npart}(C_N(G))$,
4. $\mathrm{Supp}(C_N(G)) = \mathrm{Core}(C_N(G)) = \mathrm{Npart}(C_S(G)) = \emptyset$,

# Propiedades espectrales de la descomposición

## *Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

## *Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\mathrm{Supp}(G) = \mathrm{Supp}(C_S(G))$,
2. $\mathrm{Core}(G) = \mathrm{Core}(C_S(G))$,
3. $\mathrm{Npart}(G) = \mathrm{Npart}(C_N(G))$,
4. $\mathrm{Supp}(C_N(G)) = \mathrm{Core}(C_N(G)) = \mathrm{Npart}(C_S(G)) = \emptyset$,
5. $\mathrm{Null}(C_N(G)) = \vec{0}$,

# *Propiedades espectrales de la descomposición*

*Definición*

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\mathrm{Supp}(G) = \mathrm{Supp}(C_S(G))$,
2. $\mathrm{Core}(G) = \mathrm{Core}(C_S(G))$,
3. $\mathrm{Npart}(G) = \mathrm{Npart}(C_N(G))$,
4. $\mathrm{Supp}(C_N(G)) = \mathrm{Core}(C_N(G)) = \mathrm{Npart}(C_S(G)) = \emptyset$,
5. $\mathrm{Null}(C_N(G)) = \vec{0}$,
6. $\mathrm{Null}(G) = \mathrm{Null}(C_S(G)) \oplus \mathrm{Null}(C_N(G))$,

# Propiedades espectrales de la descomposición

### Definición

Sea $G$ un grafo, por $\mathrm{Rank}(G)$ y $\mathrm{Null}(G)$ denotamos el rango y el espacio nulo de la matriz de adyacencia de $G$.

### Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Las siguientes igualdades de conjuntos y de espacios son válidas:

1. $\mathrm{Supp}(G) = \mathrm{Supp}(C_S(G))$,
2. $\mathrm{Core}(G) = \mathrm{Core}(C_S(G))$,
3. $\mathrm{Npart}(G) = \mathrm{Npart}(C_N(G))$,
4. $\mathrm{Supp}(C_N(G)) = \mathrm{Core}(C_N(G)) = \mathrm{Npart}(C_S(G)) = \emptyset$,
5. $\mathrm{Null}(C_N(G)) = \vec{0}$,
6. $\mathrm{Null}(G) = \mathrm{Null}(C_S(G)) \oplus \mathrm{Null}(C_N(G))$,
7. $\mathrm{Rank}(G) = \mathrm{Rank}(C_S(G)) \oplus \mathrm{Rank}(C_N(G))$.

# *Matching*

**Definición (Matching)**

Dado un grafo $G$, un *matching* de $G$ es un conjunto de aristas de $G$ que no comparten vértices.

# Matching

**Definición (Matching)**

Dado un grafo $G$, un *matching* de $G$ es un conjunto de aristas de $G$ que no comparten vértices.

**Ejemplo**

¿Por qué no lo hacés en el pizarrón?

# *Matching*

### *Definición (Matching)*

Dado un grafo $G$, un *matching* de $G$ es un conjunto de aristas de $G$ que no comparten vértices.

### *Ejemplo*

¿Por qué no lo hacés en el pizarrón?

### *Definición (Número de Matching y Matching máximo)*

El *número de matching* de $G$, $\nu(G)$, es la mayor cardinalidad de un matching de $G$.

# Matching

*Definición (Matching)*

Dado un grafo $G$, un *matching* de $G$ es un conjunto de aristas de $G$ que no comparten vértices.

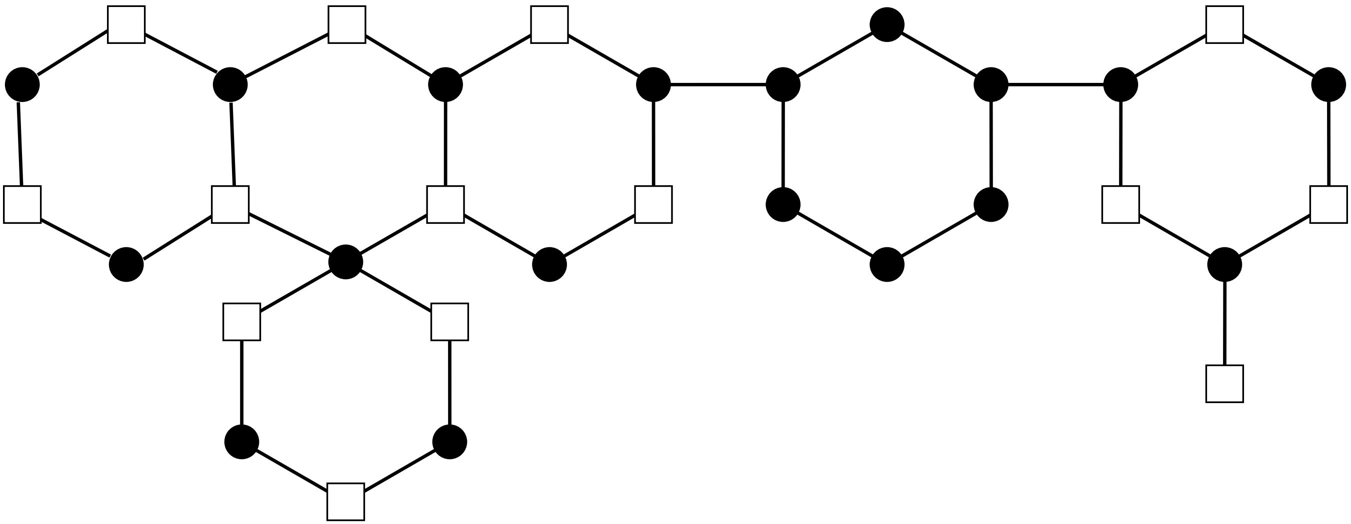
*Ejemplo*

¿Por qué no lo hacés en el pizarrón?

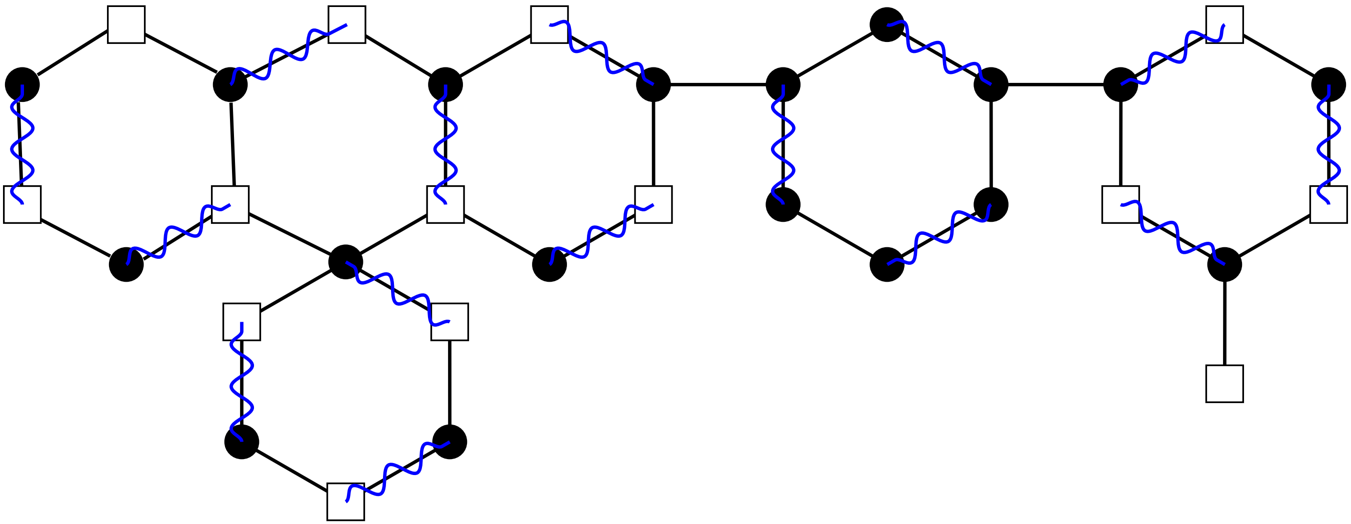
*Definición (Número de Matching y Matching máximo)*

El *número de matching* de $G$, $\nu(G)$, es la mayor cardinalidad de un matching de $G$. Un *matching máximo* de $G$ es un matching de $G$ de cardinalidad $\nu(G)$.

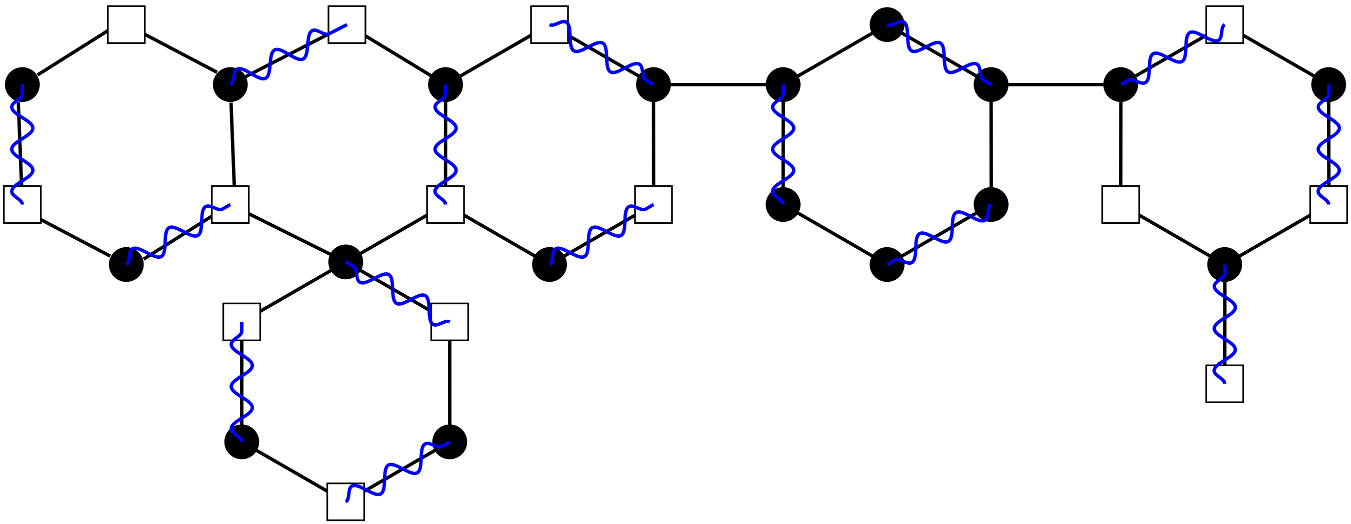
# *Matching, soporte, core y parte* N



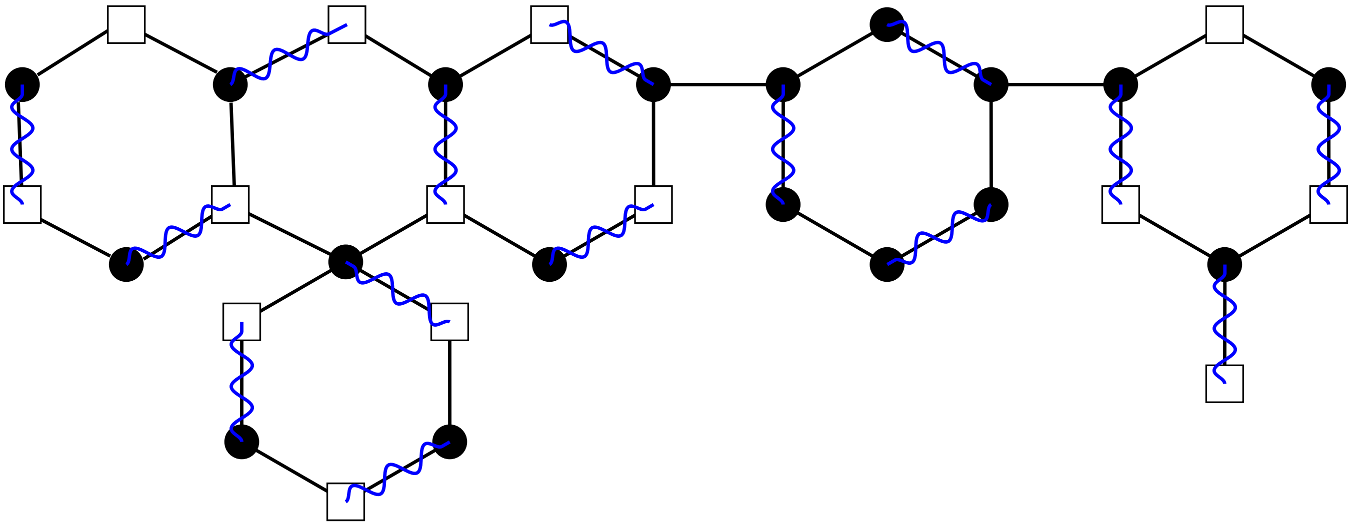
# *Matching, soporte, core y parte N*



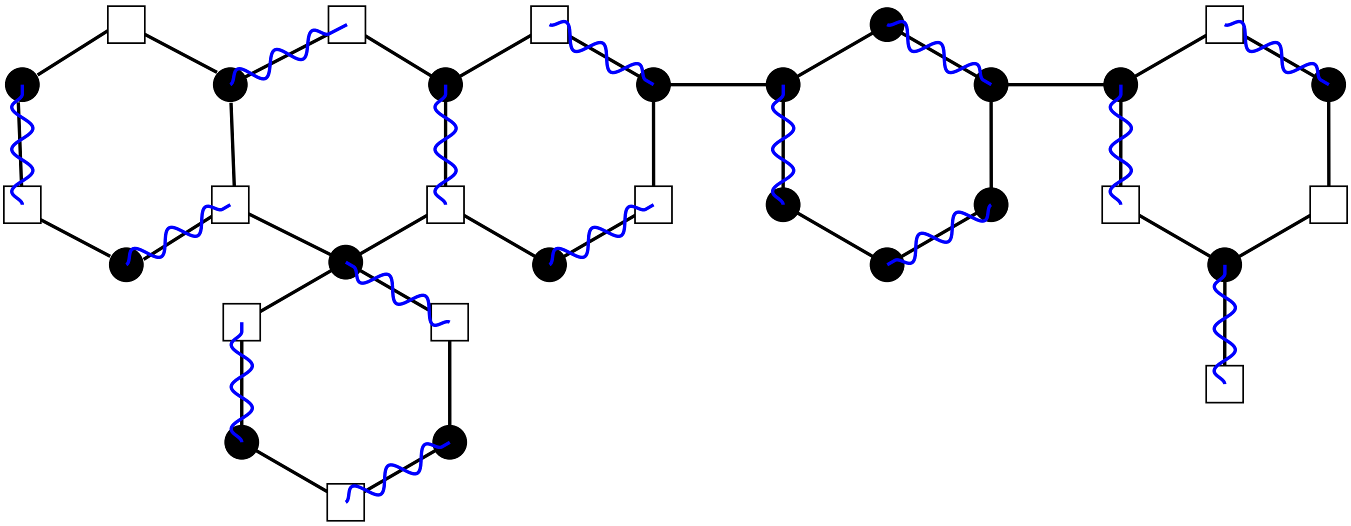
# Matching, soporte, core y parte $N$



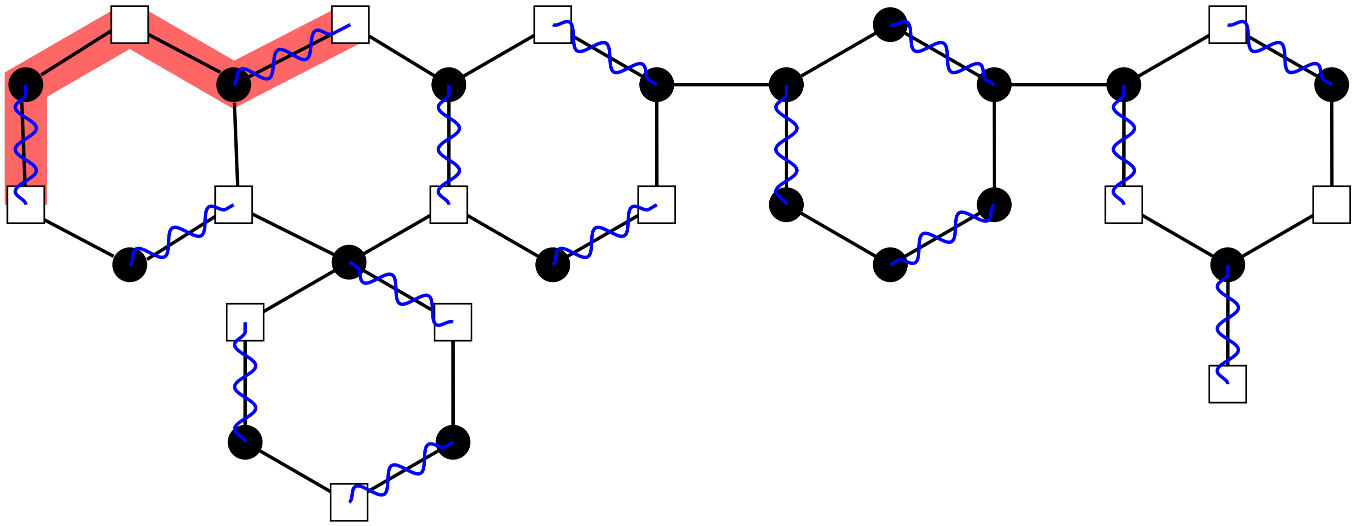
# *Matching, soporte, core y parte N*



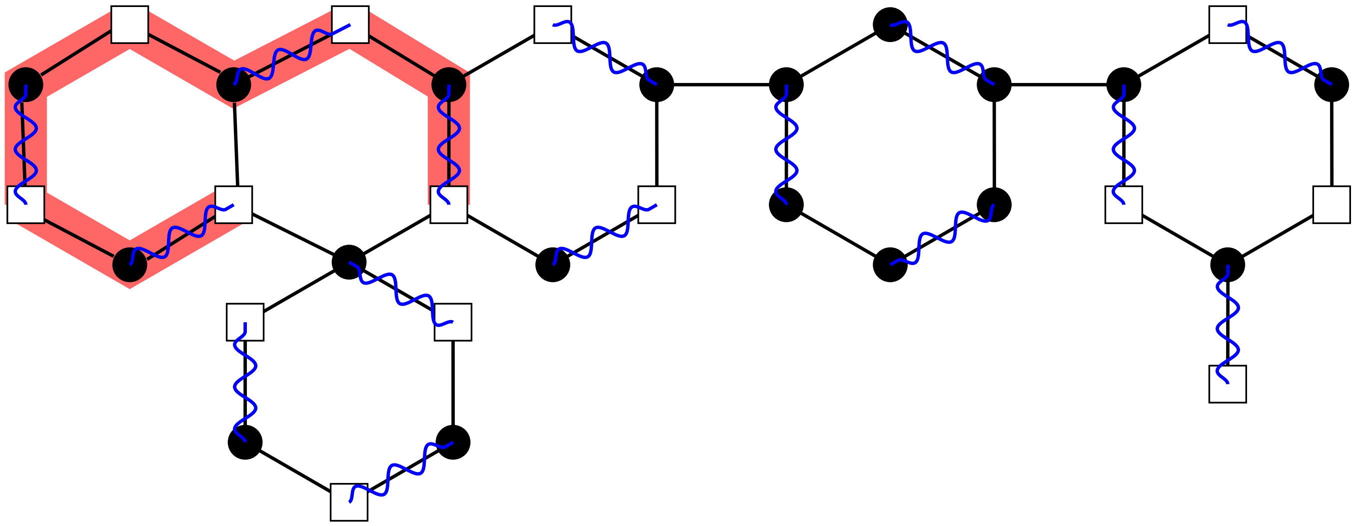
# *Matching, soporte, core y parte* N



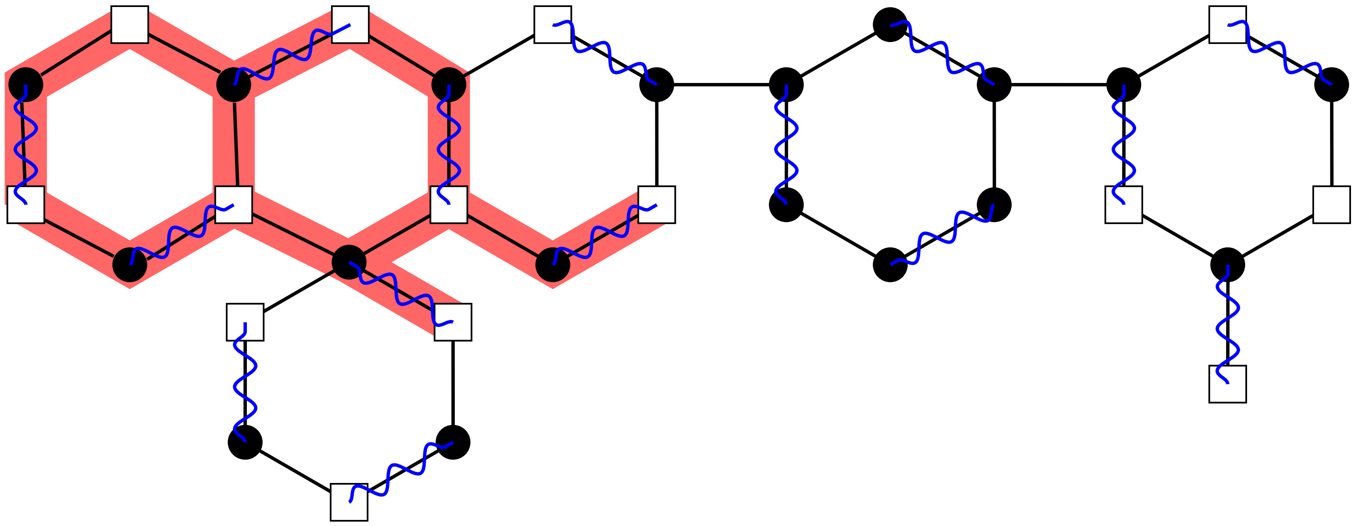
# *Matching, soporte, core y parte* N



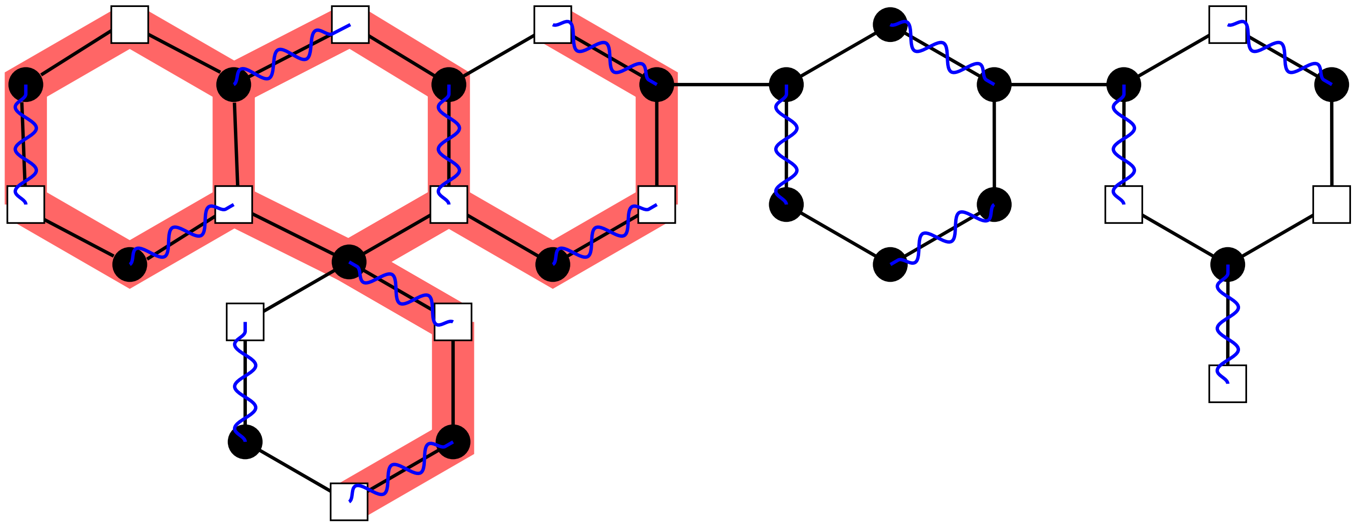
# *Matching, soporte, core y parte* N



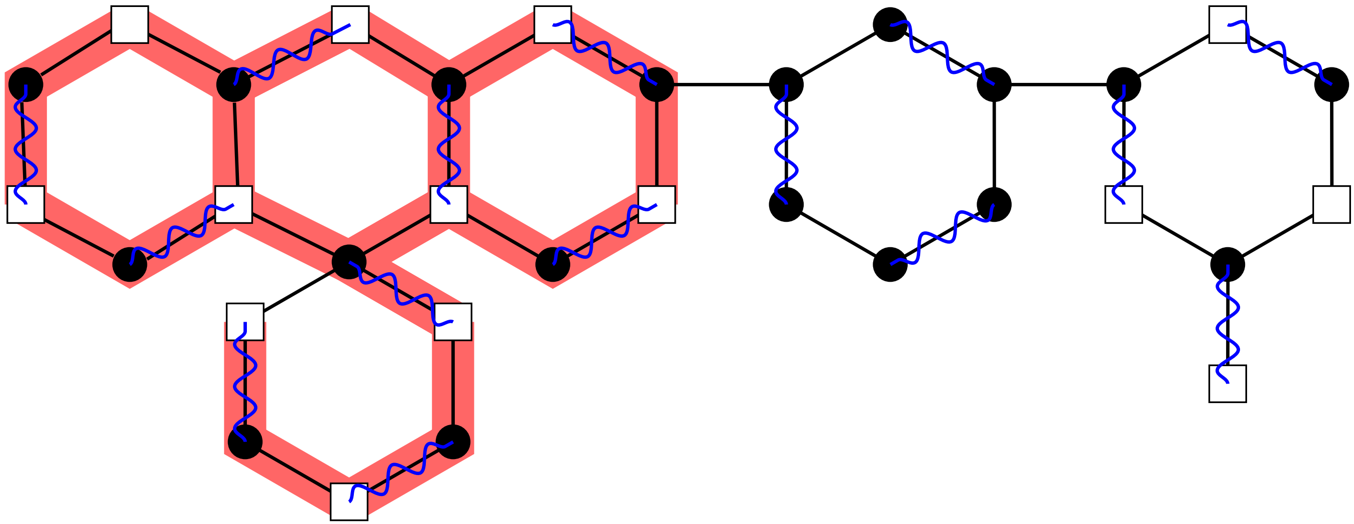
# *Matching, soporte, core y parte N*



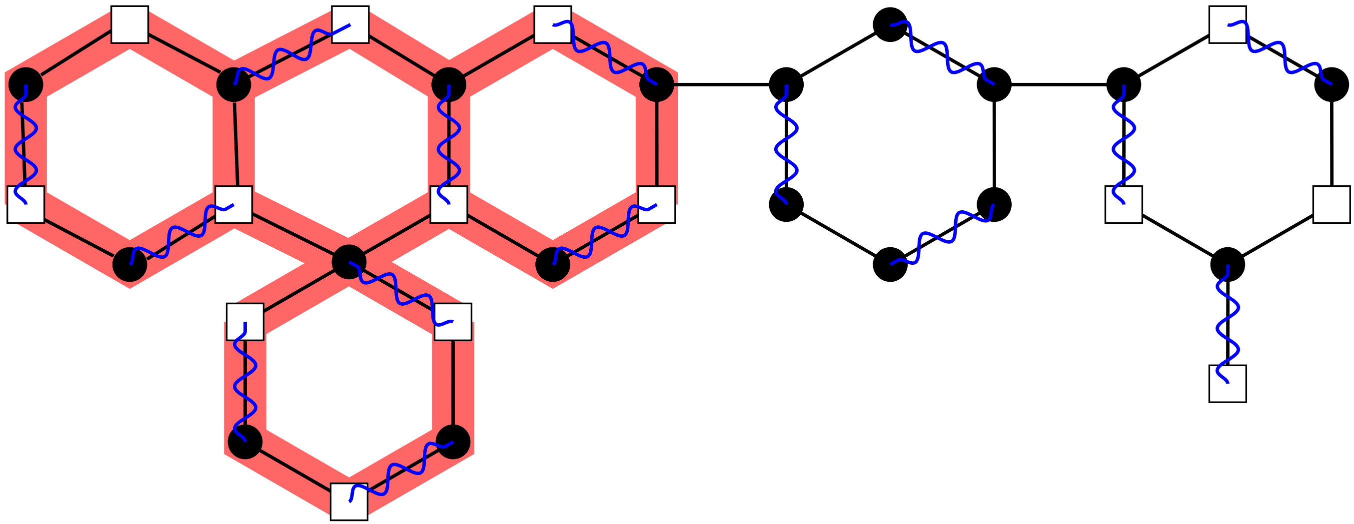
# *Matching, soporte, core y parte N*



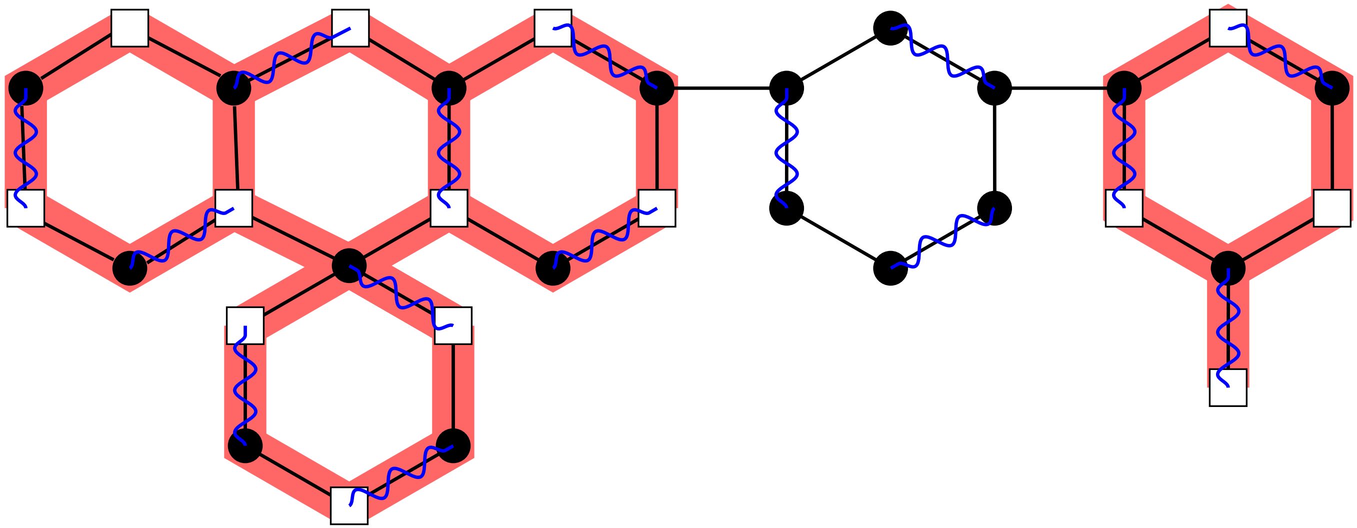
# *Matching, soporte, core y parte* N



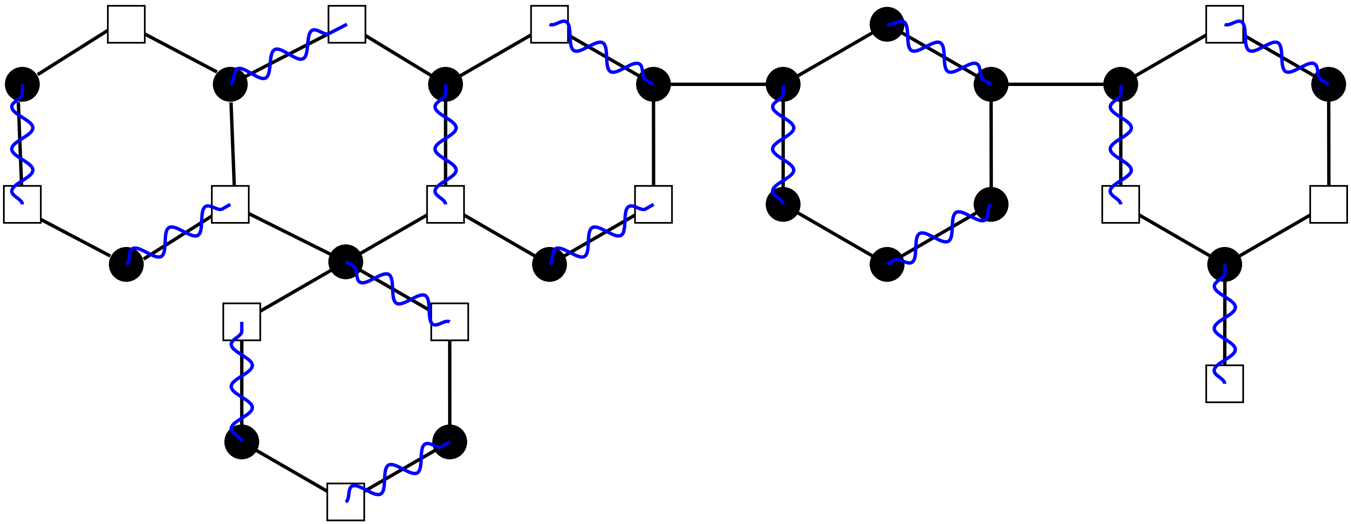
# *Matching, soporte, core y parte N*



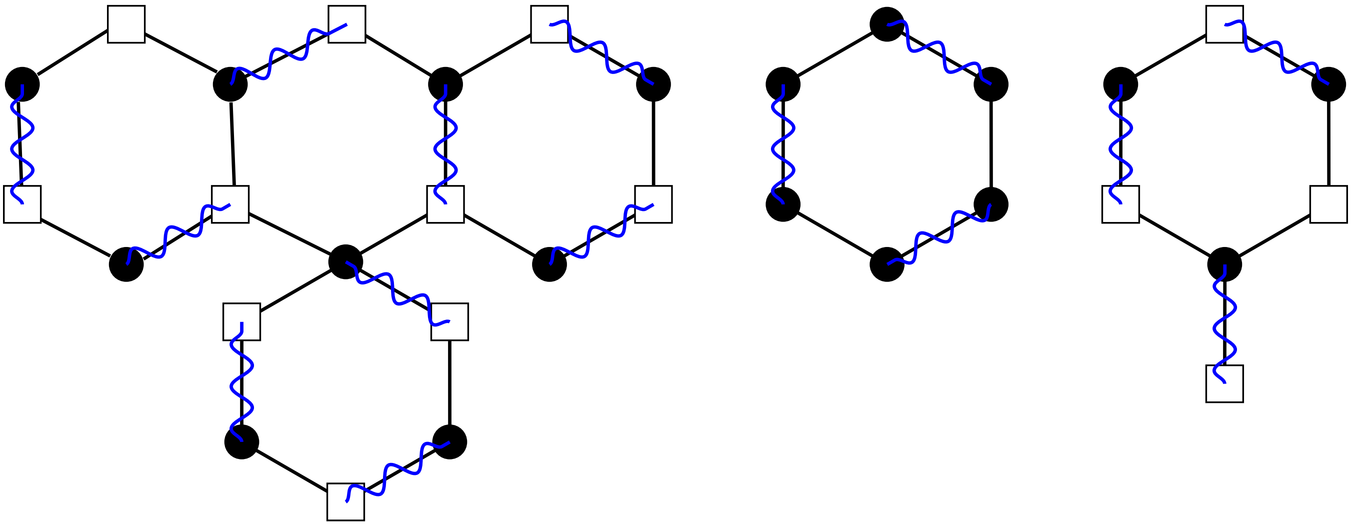
# *Matching, soporte, core y parte N*



# Matching y descomposición



# *Matching y descomposición*



# *Resultados con matching*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$.

# *Resultados con matching*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \text{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

# Resultados con matching

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

$\nu(G) = \nu(C_S(G)) + \nu(C_N(G))$.

## Resultados con matching

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\nu(G) = \nu(C_S(G)) + \nu(C_N(G))$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

# *Resultados con matching*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\nu(G) = \nu(C_S(G)) + \nu(C_N(G))$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(G) = \frac{1}{2}|\,\mathrm{Npart}(G)| + |\,\mathrm{Core}(G)|$.

# Resultados con matching

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\nu(G) = \nu(C_S(G)) + \nu(C_N(G))$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(G) = \frac{1}{2}|\mathrm{Npart}(G)| + |\mathrm{Core}(G)|$.
2. La dimensión de $\mathrm{Rank}(G)$ es igual al número de matching de $G$.

# Resultados con matching

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\nu(G) = \nu(C_S(G)) + \nu(C_N(G))$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(G) = \frac{1}{2}|\mathrm{Npart}(G)| + |\mathrm{Core}(G)|$.
2. La dimensión de $\mathrm{Rank}(G)$ es igual al número de matching de $G$.
3. La dimensión del espacio nulo de $G$ es igual a la cantidad de vértices no saturados por un matching máximo del $G$.

# *Una demostración*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$.

# *Una demostración*

***Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)***

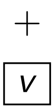
Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.

$\boxed{v}$

# Una demostración

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

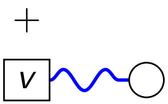
Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.



# Una demostración

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

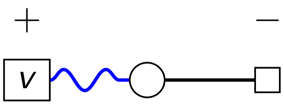
Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.



# *Una demostración*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

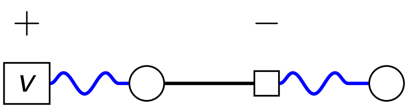
Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.



# *Una demostración*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

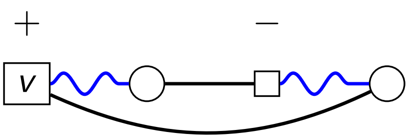
Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.



# *Una demostración*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

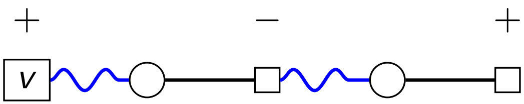
Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \text{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.



# Una demostración

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si hay hay un matching máximo que no satura a $v$.



# *Caracterización de soporte, core y parte* N *usando matchings máximos*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

# *Caracterización de soporte, core y parte* $\mathsf{N}$ *usando matchings máximos*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\mathrm{Supp}(G)$ es el conjunto de vértices que no son saturados por algún matching máximo.

# *Caracterización de soporte, core y parte N usando matchings máximos*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. Supp($G$) es el conjunto de vértices que no son saturados por algún matching máximo.
2. Core($G$) está siempre matcheado a los vértices de Supp($G$) en cualquier matching máximo de $G$.

# *Caracterización de soporte, core y parte N usando matchings máximos*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. Supp($G$) es el conjunto de vértices que no son saturados por algún matching máximo.
2. Core($G$) está siempre matcheado a los vértices de Supp($G$) en cualquier matching máximo de $G$.
3. Npart($G$) está siempre matcheado a otros vértices de Npart($G$) en cualquier matching máximo de $G$.

# Conjuntos independientes

*Definición (Conjunto independiente)*

Dado un grafo $G$, un conjunto *independiente* de vértices de $G$ es un conjunto de vértices de $G$ que no comparten aristas.

# Conjuntos independientes

**Definición (Conjunto independiente)**

Dado un grafo $G$, un conjunto *independiente* de vértices de $G$ es un conjunto de vértices de $G$ que no comparten aristas.

**Ejemplo**

Este también lo podrías hacer en el pizarrón.

# Conjuntos independientes

### *Definición (Conjunto independiente)*

Dado un grafo $G$, un conjunto *independiente* de vértices de $G$ es un conjunto de vértices de $G$ que no comparten aristas.

### *Ejemplo*

Este también lo podrías hacer en el pizarrón.

### *Definición (Número de independencia y conjunto independiente máximo)*

El *número de independencia* de $G$, $\alpha(G)$, es la mayor cardinalidad de un conjunto independiente de $G$.

# Conjuntos independientes

### *Definición (Conjunto independiente)*

Dado un grafo $G$, un conjunto *independiente* de vértices de $G$ es un conjunto de vértices de $G$ que no comparten aristas.

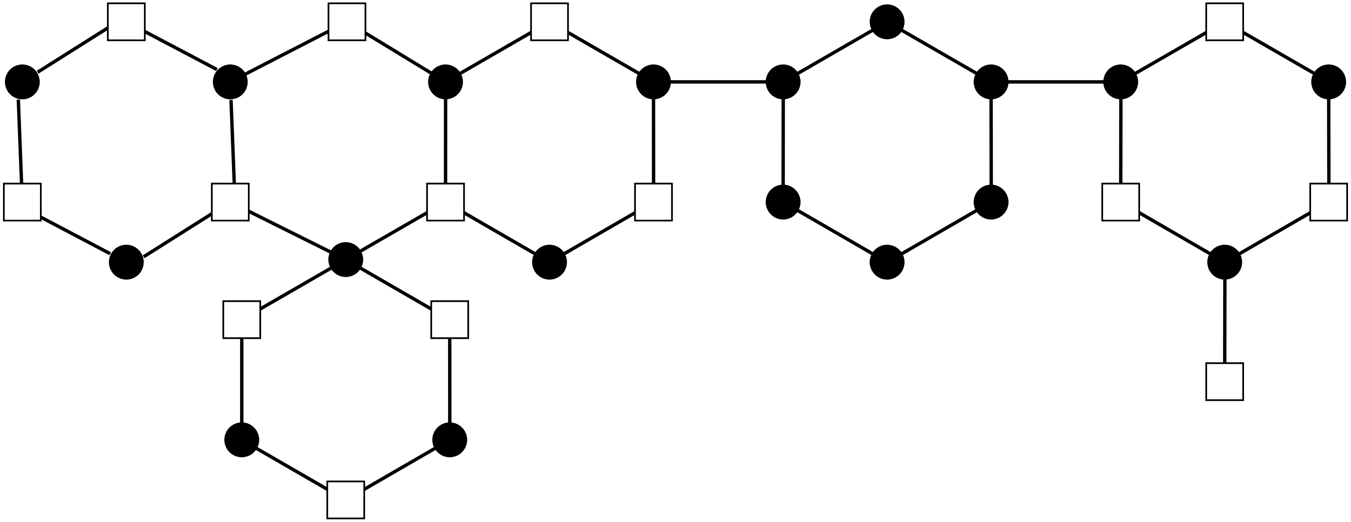
### *Ejemplo*

Este también lo podrías hacer en el pizarrón.

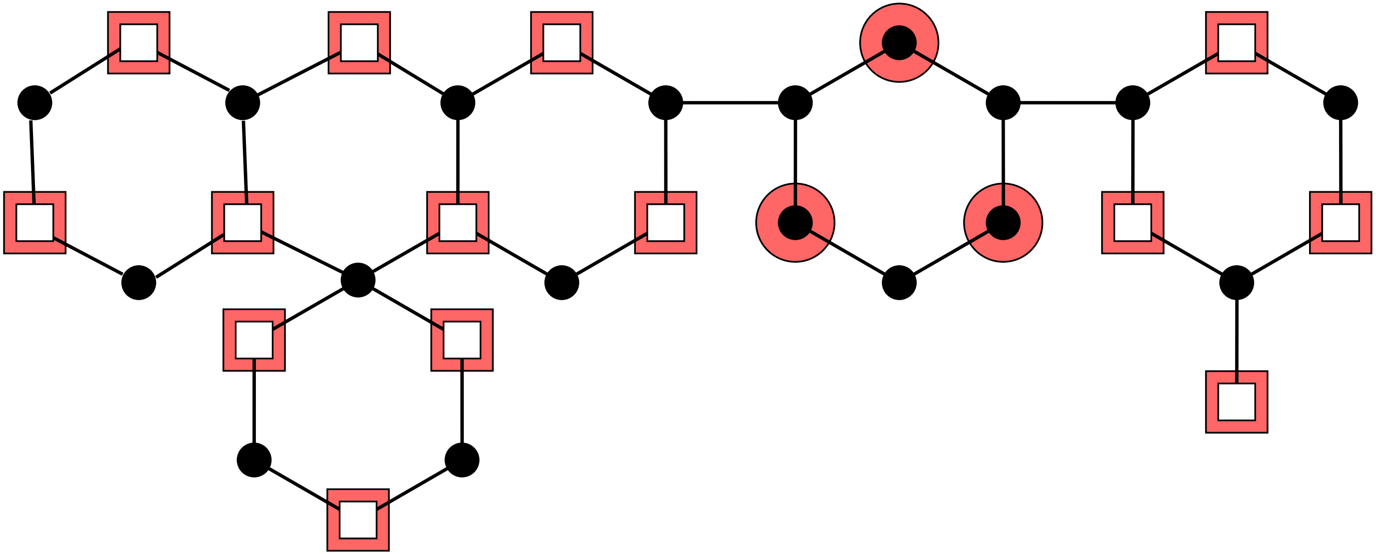
### *Definición (Número de independencia y conjunto independiente máximo)*

El *número de independencia* de $G$, $\alpha(G)$, es la mayor cardinalidad de un conjunto independiente de $G$. Un *conjunto independiente máximo* de $G$ es un conjunto independiente de $G$ de cardinalidad $\alpha(G)$.

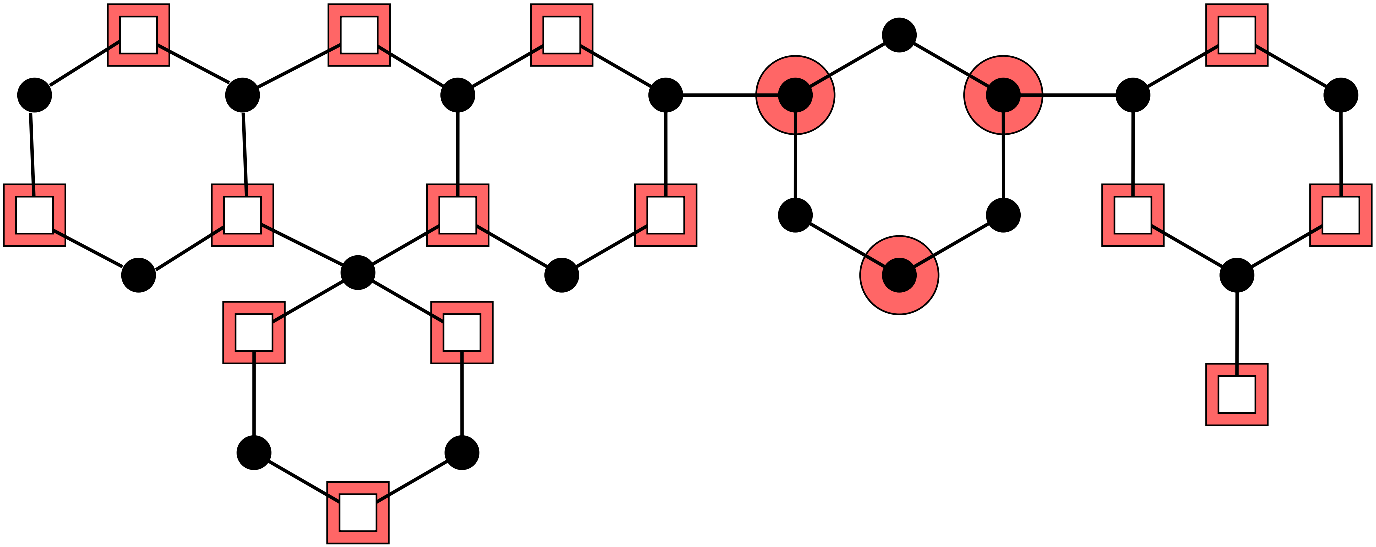
# *Conjuntos Independientes, soporte, core y parte* N



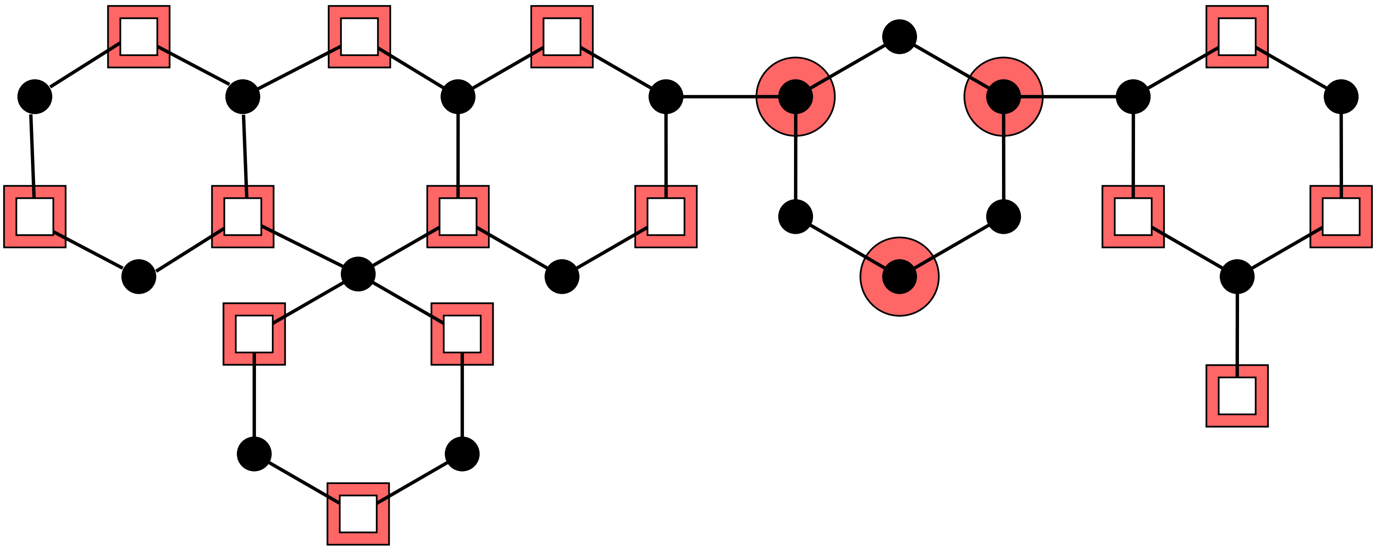
# *Conjuntos Independientes, soporte, core y parte* N



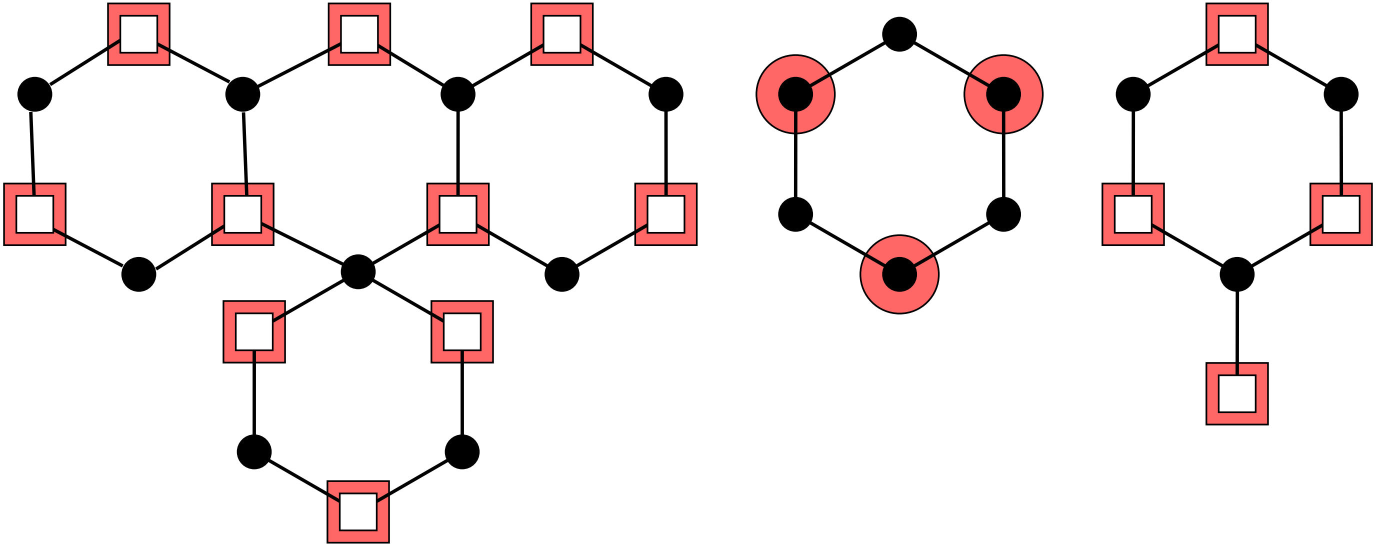
# *Conjuntos Independientes, soporte, core y parte N*



# Conjuntos Independientes y descomposición



# Conjuntos Independientes y descomposición



# *Resultados con conjuntos independientes*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si $v$ está en todos los conjuntos independientes máximos de $G$.

# Resultados con conjuntos independientes

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si $v$ está en todos los conjuntos independientes máximos de $G$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\alpha(G) = \alpha(C_S(G)) + \alpha(C_N(G))$.

# Resultados con conjuntos independientes

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \text{Supp}(G)$, si y solo si $v$ está en todos los conjuntos independientes máximos de $G$.

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

$\alpha(G) = \alpha(C_S(G)) + \alpha(C_N(G))$.

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

# Resultados con conjuntos independientes

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si $v$ está en todos los conjuntos independientes máximos de $G$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\alpha(G) = \alpha(C_S(G)) + \alpha(C_N(G))$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\alpha(G) = \frac{1}{2}|\,\mathrm{Npart}(G)| + |\,\mathrm{Supp}(G)|$.

# Resultados con conjuntos independientes

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4 y sea $v \in V(G)$. Entonces $v \in \mathrm{Supp}(G)$, si y solo si $v$ está en todos los conjuntos independientes máximos de $G$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

$\alpha(G) = \alpha(C_S(G)) + \alpha(C_N(G))$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\alpha(G) = \frac{1}{2}|\mathrm{Npart}(G)| + |\mathrm{Supp}(G)|$.
2. La dimensión del espacio nulo de $G$ es igual a $\alpha(G) - \nu(G)$.

# *Caracterización de soporte, core y parte* N *usando conjuntos independientes*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

## *Caracterización de soporte, core y parte* N *usando conjuntos independientes*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. Supp($G$) son los vértices que están en todo conjunto independiente máximo de $G$.

# *Caracterización de soporte, core y parte* N *usando conjuntos independientes*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\mathrm{Supp}(G)$ son los vértices que están en todo conjunto independiente máximo de $G$.
2. $\mathrm{Core}(G)$ son los vértices que no están en ningún conjunto independiente máximo de $G$.

# *Caracterización de soporte, core y parte N usando conjuntos independientes*

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. Supp($G$) son los vértices que están en todo conjunto independiente máximo de $G$.
2. Core($G$) son los vértices que no están en ningún conjunto independiente máximo de $G$.
3. Npart($G$) son los vértices que están en algunos, pero no todos los conjuntos independientes máximos de $G$.

**Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)**

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

# *Grafos N y grafos S*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(C_N(G)) = |V(C_N(G))|/2$ (tiene un matching perfecto).

# *Grafos N y grafos S*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(C_N(G)) = |V(C_N(G))|/2$ (tiene un matching perfecto).
2. $G = C_N(G)$ si y solo si $\nu(G) = |V(G)|/2$.

# *Grafos N y grafos S*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(C_N(G)) = |V(C_N(G))|/2$ (tiene un matching perfecto).
2. $G = C_N(G)$ si y solo si $\nu(G) = |V(G)|/2$.
3. $C_S(G)$ tiene un único conjunto independiente máximo.

# *Grafos* N *y grafos* S

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(C_N(G)) = |V(C_N(G))|/2$ (tiene un matching perfecto).
2. $G = C_N(G)$ si y solo si $\nu(G) = |V(G)|/2$.
3. $C_S(G)$ tiene un único conjunto independiente máximo.
4. $G = C_S(G)$ si y solo si $G$ tiene un único conjunto independiente máximo.

# *Grafos N y grafos S*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(C_N(G)) = |V(C_N(G))|/2$ (tiene un matching perfecto).
2. $G = C_N(G)$ si y solo si $\nu(G) = |V(G)|/2$.
3. $C_S(G)$ tiene un único conjunto independiente máximo.
4. $G = C_S(G)$ si y solo si $G$ tiene un único conjunto independiente máximo.

# *Grafos N y grafos S*

*Teorema (Jaume, Molina, P., 2018)*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces

1. $\nu(C_N(G)) = |V(C_N(G))|/2$ (tiene un matching perfecto).
2. $G = C_N(G)$ si y solo si $\nu(G) = |V(G)|/2$.
3. $C_S(G)$ tiene un único conjunto independiente máximo.
4. $G = C_S(G)$ si y solo si $G$ tiene un único conjunto independiente máximo.

*Corolario*

Sea $G$ un grafo bipartito sin ciclos de longitud múltiplo de 4. Entonces, $G = C_N(G)$ si y solo si la matriz de adyacencia de $G$ es no singular.

# *Bases ralas*

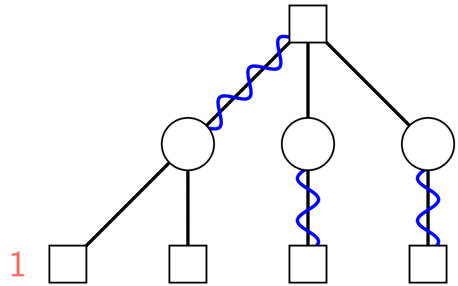
**Definición**

Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.

# Bases ralas

**Definición**

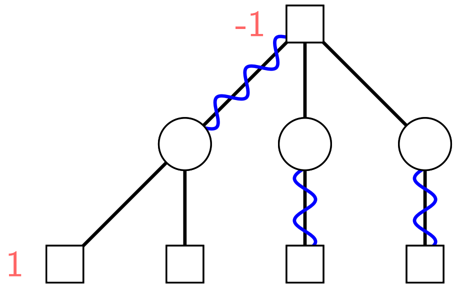
Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# *Bases ralas*

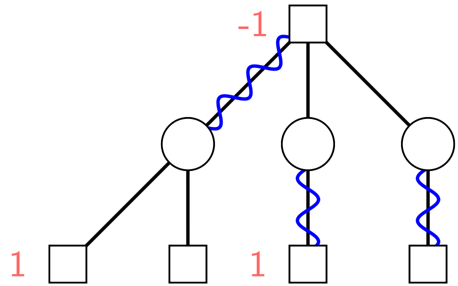
## *Definición*

Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



**Definición**

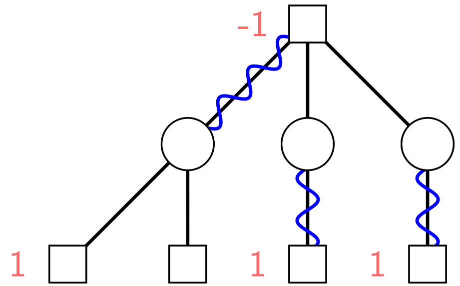
Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# Bases ralas

### Definición

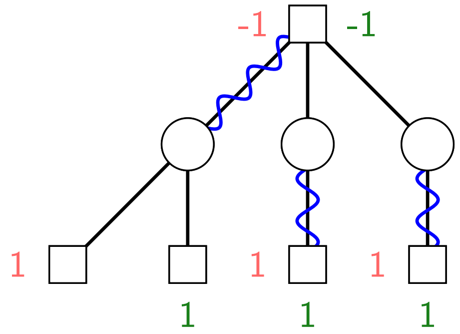
Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# Bases ralas

**Definición**

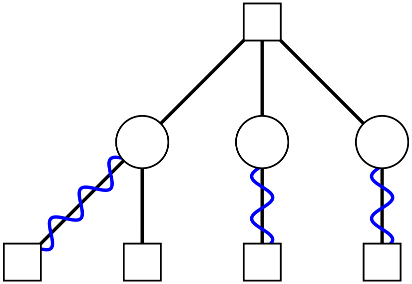
Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# Bases ralas

**Definición**

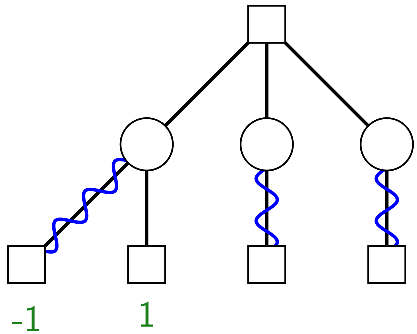
Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# Bases ralas

**Definición**

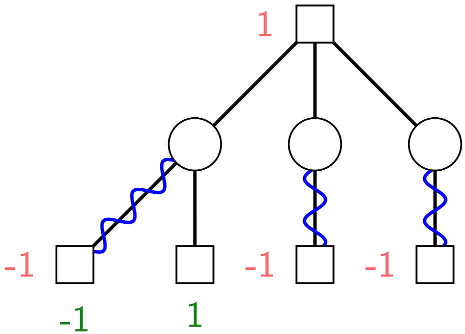
Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# Bases ralas

### Definición

Una base para un espacio es *lo más rala posible*, si tiene la menor cantidad de entradas distintas de 0 de entre todas las bases de dicho espacio.



# *Resultado*

**Teorema (Jaume, Molina, P., Safe, 2018)**

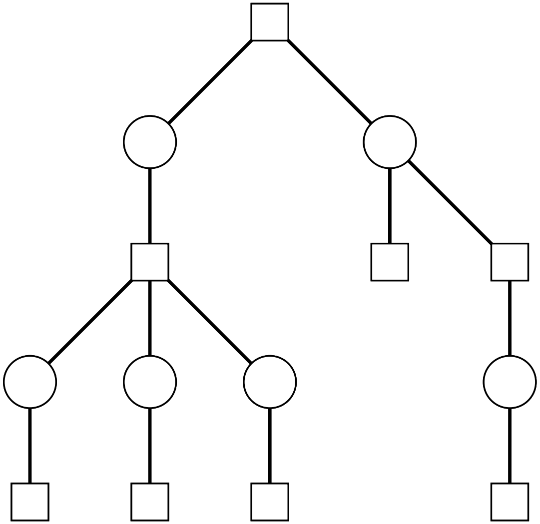
Dado un árbol $T$, se puede encontrar una base lo más rala posible para $\mathrm{Null}(T)$ en tiempo lineal sobre la cantidad de vértices de $T$.

# *Resultado*

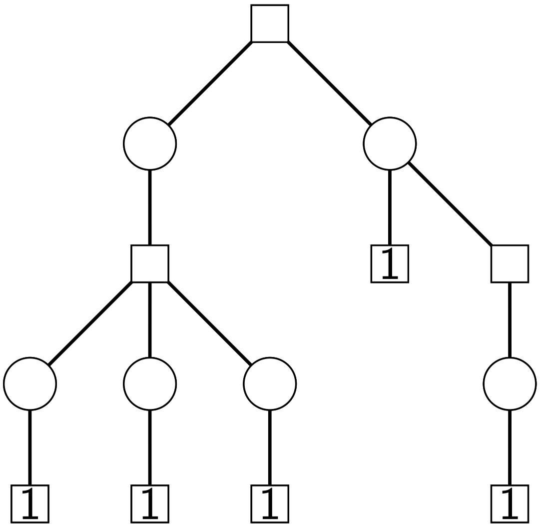
*Teorema (Jaume, Molina, P., Safe, 2018)*

Dado un árbol $T$, se puede encontrar una base lo más rala posible para $\mathrm{Null}(T)$ en tiempo lineal sobre la cantidad de vértices de $T$. Las entradas de dicha base son tomadas de $\{-1, 0, 1\}$.

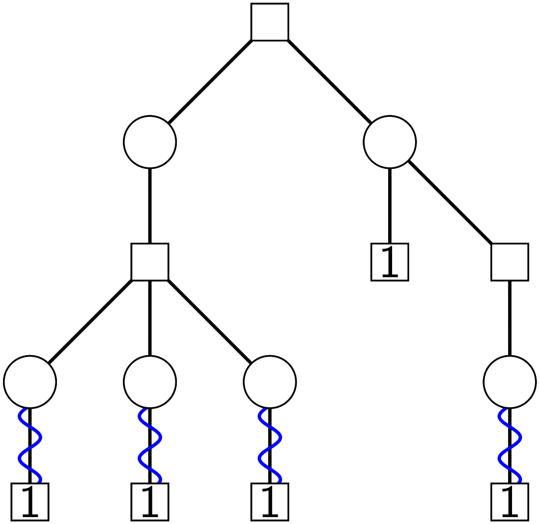
# Algoritmo



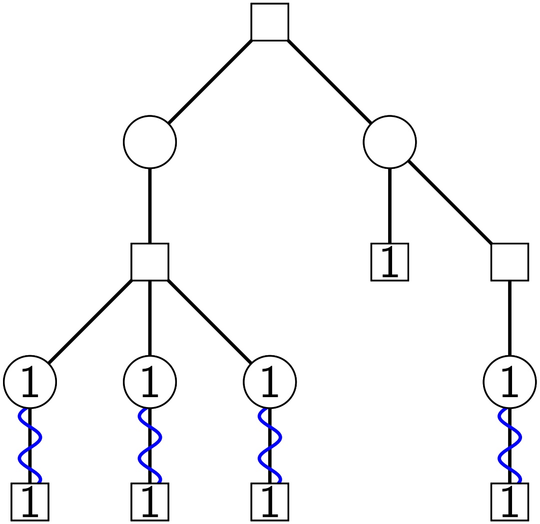
# *Algoritmo*



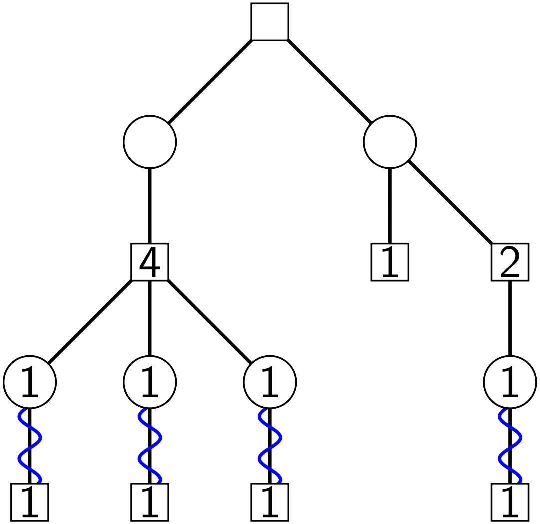
# *Algoritmo*



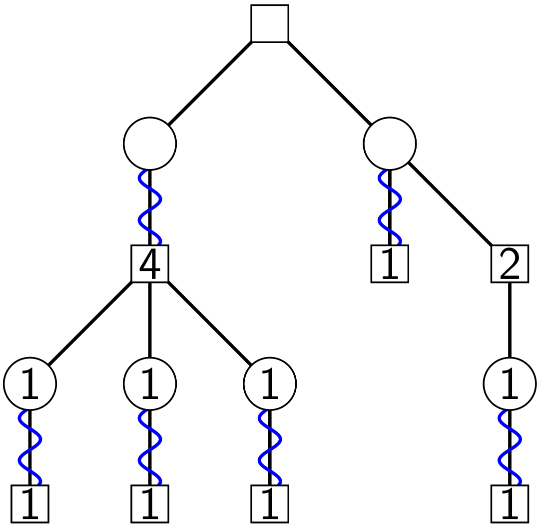
# *Algoritmo*



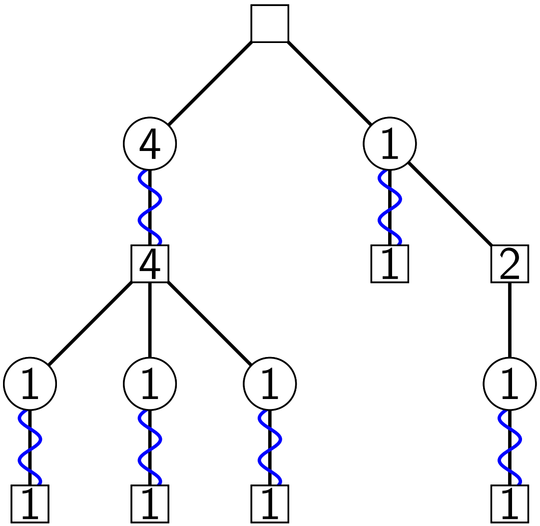
# *Algoritmo*



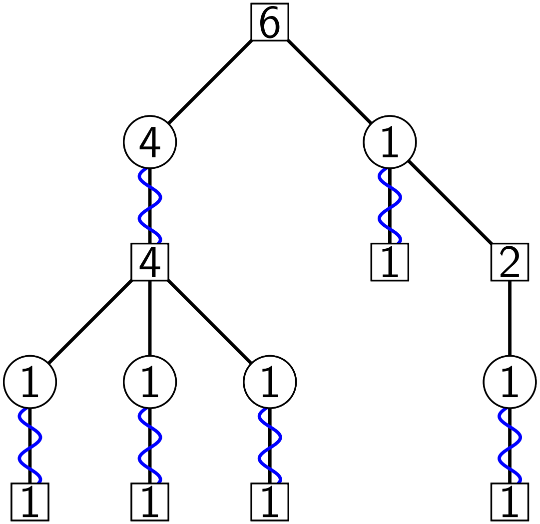
# Algoritmo



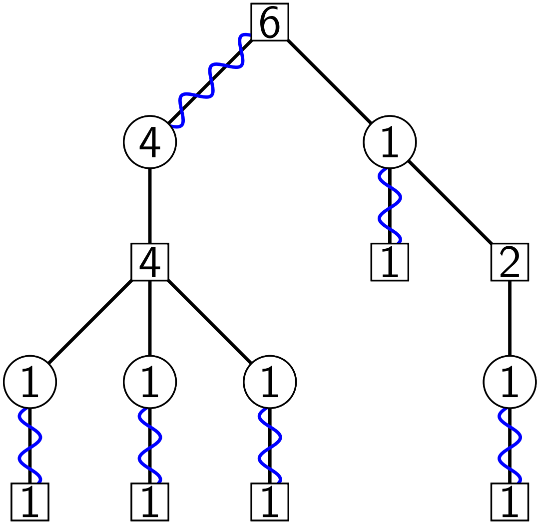
# Algoritmo



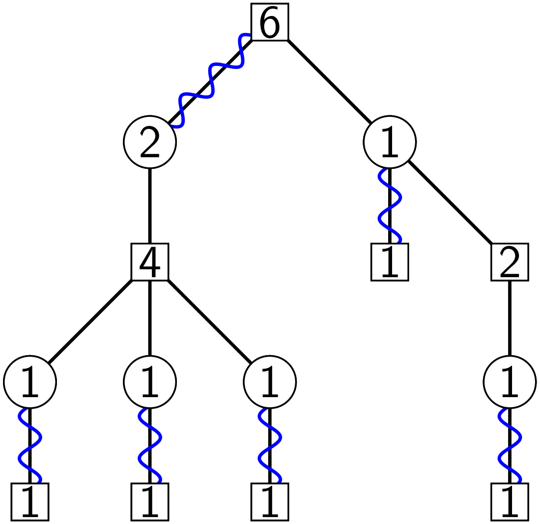
# Algoritmo



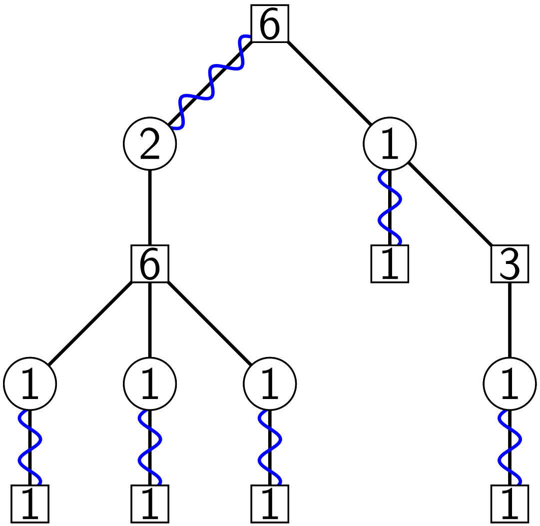
# Algoritmo



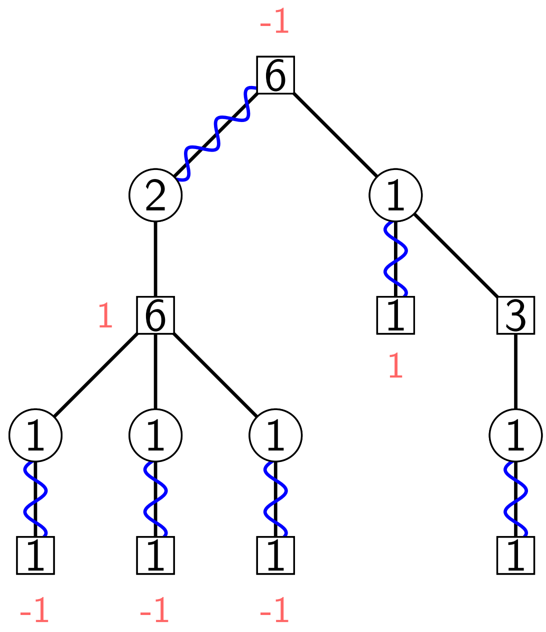
# *Algoritmo*



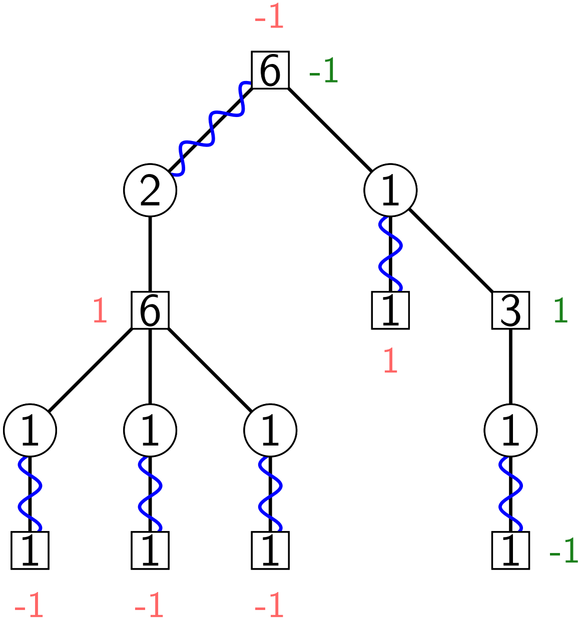
# *Algoritmo*



# Algoritmo



# Algoritmo



# *Otros trabajos*

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos uniciclos (Allem, Jaume, Machado, Molina, Trevisan, 2018).

# *Otros trabajos*

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos uniciclos (Allem, Jaume, Machado, Molina, Trevisan, 2018).
- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos threshold (Allem, Machado, Molina, 2018).

# *Otros trabajos*

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos uniciclos (Allem, Jaume, Machado, Molina, Trevisan, 2018).
- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos threshold (Allem, Machado, Molina, 2018).
- Bases para el espacio nulo de grafos bipartitos sin ciclos de longitud múltiplo de 4 en tiempo razonable (Jaume, Molina, Safe, P., en progreso).

# *Otros trabajos*

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos uniciclos (Allem, Jaume, Machado, Molina, Trevisan, 2018).
- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos threshold (Allem, Machado, Molina, 2018).
- Bases para el espacio nulo de grafos bipartitos sin ciclos de longitud múltiplo de 4 en tiempo razonable (Jaume, Molina, Safe, P., en progreso).

# *Problemas abiertos*

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos bipartitos sin restricciones.

# Problemas abiertos

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos bipartitos sin restricciones.
- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos no bipartitos.

# Problemas abiertos

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos bipartitos sin restricciones.
- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos no bipartitos.
- Matriz en la que "independiente perfecto" implique no singularidad.

# *Problemas abiertos*

- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos bipartitos sin restricciones.
- Estudio de soporte, core y parte $N$ de grafos no bipartitos.
- Matriz en la que "independiente perfecto" implique no singularidad.
- Estudio de soporte relacionado a otros autovalores.

# Muchas gracias!!

bahiablanca.jpg