Problemas de programación entera con simetrías

Pablo A. Rey

Departmento de Industria
Facultad de Ingeniería
Universidad Tecnológica Metropolitana

SODYG2018 – Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca
Diciembre 2018

Indice

Indice

¿Qué es un problema con simetrías?

- Estudiamos problemas de tipo

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_i x_i \\ \text{s.a.} & Ax \geq e \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

  tales que hay “equivalencia” algunas soluciones.
- Estas equivalencias vienen de “permutaciones” de las variables que “preservan la factibilidad” (e infactibilidad).
- El poliedro factible puede tener otras simetrías *geométricas*.

Indice

Primer ejemplo (Jeroslow, 1974)

- n un número entero par:
- Considerar

$$\left\{\begin{array}{ll} \max & x_{n+1} \\ & 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n + 2x_{n+1} = n+1 \\ & x \in \{0,1\}^{n+1} \end{array}\right.$$

- un algoritmo branch-and-bound simple requiere un número exponencial de nodos para mostrar que es infactible

Primer ejemplo (cont.)

- las variables $x_1, \ldots, x_n$ son **indistinguibles**
- las podemos **ordenar** por sus valores:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$\rightarrow$ con estas restricciones adicionales el preprocesamiento detecta

la infactibilidad en el nodo raíz!

Ejemplo práctico (Selim & Al-Haboubi, 1999; Sherali & Cole Smith, 2001)

- Problema: minimizar la máxima "dosis" de ruido a que son expuestos un grupo de trabajaores operando un conjunto de máquinas.
  - n trabajadores ejecutando tareas en m máquinas;
  - Máquina i: d_i tareas de t_i horas, α_i ruido;
  - Trabajador j: hasta H horas trabajo, máx. u_i tareas en máquina i.

Ejemplo práctico (cont.) (Sherali & Cole Smith, 2001)

x_{ij} = número de tareas trabajador j/máquina i.

$$
\begin{array}{lll}
\min & z & \\
\text{s.a.} & z \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ij} & j = 1, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i & i = 1, \ldots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i x_{ij} \geq H & j = 1, \ldots, n \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_i & i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n; \ \text{entera.}
\end{array}
$$

Ejemplo práctico (cont.)

- los trabajadores son indistinguibles;
- cada **"columna"** $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^\top$ representa una **lista de tareas factible** para cualquier trabajador;
- permutando cualquier par de "columnas" obtenemos asignaciones "equivalentes".

El problema de los triples de Steiner (Fulkerson, Nemhauser & Trotter, 1979; Avis, 1980)

Definición (Sistema de triples de Steiner)

- par (X, B)
- $X := \{1, \ldots, n\}$ conjunto finito;
- $B := \{b_1, \ldots, b_m\}$ subconjuntos de X (bloques)
  (i). $|b_i| = 3, \forall\ i = 1, \ldots, m,$
  (ii). $\forall\ j_1, j_2 \in X$ distintos existe **exactamente un** bloque $b \in B$ tal que $j_1, j_2 \in b$.

El problema de los triples de Steiner (cont.)

- El problema:

  "Encontrar un subconjunto C de X, de cardinalidad mínima tal que corte todos los bloques."

- Modelo de programación entera

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ & Ax \geq e \\ & x \in \{0,1\}^n \end{cases} \qquad \text{con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in b_i; \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El *Football Pool Problem*

- *Football pools*: juegos de apuestas del estilo del PRODE. Típicamente, se apuesta una cartilla en la que se marca un resultado (entre tres posibles) para cada uno de los k partidos.
- El problema
  - ¿Cuál es el mínimo número de cartillas que es necesario apostar para asegurar el *segundo premio* en un concurso con k partidos?
  - Encontrar, para un alfabeto de k letras, un código de cubrimiento ternario de radio de cubrimiento 1 y cardinalidad mínima.

El *Football Pool Problem* (cont.)

Modelo de programación entera

$$\left\{\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{0,1,2\}} x_{i_1,\ldots,i_k} \\ \text{sa.} & Ax \geq b \\ & x \in \{0,1\}^{3^k} \end{array}\right.$$

$$\text{con } a_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si cartilla } j \text{ gana premio para el resultado } i \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{array}\right.$$

Indice

¿Cómo aparecen las simetrías?

- Composición de permutaciones factibles $\rightarrow$ permutación factible
- Inversa de una permutación factible $\rightarrow$ permutación factible
- Las permutaciones factibles forman un *grupo* (finito).
- Las simetrías de un problema vienen dadas por un grupo de permutaciones (conocido o a calcular).

¿Qué es un grupo?

Definición

Un *grupo* es un conjunto G de elementos junto con una operación binaria $*$ definida en G tal que:

1. existe un elemento $I \in G$ tal que $g * I = g$, para todo $g \in G$; y
2. para cada $g \in G$ hay un elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = I$.

- I es la *identidad* de G y
- g^{-1} es el *inverso* de g.

Ejemplos

1. Las permutaciones de un conjunto finito X bajo la composición de funciones. Es llamado el *grupo simétrico en* X, $\mathrm{Sym}(X)$.
2. Matrices de permutaciones

Definición

Una matriz cuadrada $n \times n$ 0-1 es una *matriz de permutación* si tiene exactamente un 1 por cada fila y por cada columna.

- Las matrices de permutación con el producto de matrices forman un grupo.
- Isomorfo a $\mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$.

Ejemplos (cont.)

3. Grupos de automorfismos de *estructuras de incidencia* – *hipergrafos*

Definición

Una *estructura de incidencia* es un par (X, B) formado por un conjunto finito X y una familia B de subconjuntos de X.

Definición

Dada una estructura de incidencia (X, B), una permutación π de X, es un *automorfismo* si $\pi(b) := \{\pi(x) : x \in b\} \in B$ para todo bloque $b \in B$.

- Los automorfismos de (X, B) con la composición de funciones, forman un grupo.

Ejemplo: Problema de los triples de Steiner (cont.)

"Encontrar un subconjunto C de X, de cardinalidad mínima tal que corte todos los bloques."

Modelo de PI

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ & Ax \geq e \\ & x \in \{0,1\}^n \end{cases} \qquad \text{con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in b_i; \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El problema de los triples de Steiner (cont.)

Instancias (Fulkerson et al. 1979)

- $n = 3^k$
- $\mathrm{STS}_n \leftrightarrow$ espacio afín $AG_k(\mathbb{F}_3)$

Propiedades:

- Hay muchas soluciones factibles equivalentes;
- ¿Hay un grupo permutando coordenadas?
  SI: el grupo de automorfismos del STS_n

El problema de los triples de Steiner (cont.)

Grupo conocido$\rightarrow$ el grupo afín $AGL_k(\mathbb{F}_3)$

$$T_{(M,p^0)}(p) := Mp + p^0$$

– M matriz no singular en $\mathbb{F}_3^{k\times k}$
– $p^0 \in \mathbb{F}_3^k$

Puede ser un grupo enorme:

– $n = 9, \quad |AGL_2(\mathbb{F}_3)| = 432$
– $n = 27, \quad |AGL_3(\mathbb{F}_3)| = 303264$
– $n = 3^k, \quad |AGL_k(\mathbb{F}_3)| = 3^{k(k+1)/2}\prod_{i=1}^{k}(3^i - 1)$

Ejemplo: El *Football pool problem*

Recordemos el modelo de programación entera:

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i_1,\dots,i_k \in \{0,1,2\}} x_{i_1,\dots,i_k} \\ \text{sa.} & Ax \geq b \\ & x \in \{0,1\}^{3^k} \end{cases}$$

Las simetrías son permutaciones de la forma

$$x_{i_1,i_2,\dots,i_k} \mapsto x_{\pi(\mu_1(i_1),\mu_2(i_2),\dots,\mu_k(i_k))}$$

donde

$\mu_i \in \mathrm{Sym}_3$ es una "permutación de resultados del partido i" y

$\pi \in \mathrm{Sym}_k$ es una "permutación de los partidos".

El grupo es entonces $\mathrm{Sym}_3 \wr \mathrm{Sym}_k$.

Acciones y órbitas

Definición

Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Para cada $x \in X$ y cada $g \in G$ está definido un elemento de X denotado por $g(x)$. Decimos que esto define una *acción* de G en X (o que G *actúa* en X) si

1. $I(x) = x$ para todo $x \in X$, donde I es la identidad de G; y
2. $g_2(g_1(x)) = (g_2 * g_1)(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $g_1, g_2 \in G$.

Definición

Sea X un conjunto no vacío y G, un grupo actuando en X. Si S es un subconjunto de X, la *órbita* (por G) de S, $G(S)$ es el conjunto

$$G(S) = \{g(x) : x \in S, g \in G\} .$$

Indice

Ideas generales

- Durante algoritmo
  - Isomorphism prunning (Margot 2002, 2003)
  - Orbital branching (Ostrowski, Linderoth, Rossi, Smirglio 2007)
- En la formulación
  - Problemas de ruteo de vehículos
  - Coloreo de grafos (Méndez-Díaz, Zabala 2001, 2006)
  - Sherali & Cole Smith (2001)
  - Regiones (o dominios) fundamentales (R 2001, R 2004, Friedman 2007)
  - Orbitopes (Kaibel, Pfetsch 2006)
  - Symretopes (Hojny, Pfetsch 2016)
- "Combinación"
  - Orbitopal fixing (Kaibel, Peinhardt, Pfetsch 2006)
- Problemas relacionados
  - Eliminación de simetrías para modelos de *Constraint Programming*
  - *Isomorph-free enumeration* de estructuras combinatorias
  - Problemas algorítmicos relacionados a *isomorfismo de grafos*

Formalizando algunas ideas

Para el "primer ejemplo":

- Sean $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$; π una permutación de $\{1, \ldots, n\}$:
  $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\begin{aligned} y_i &:= x_{\pi(i)} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n \\ y_{n+1} &:= x_{n+1} \end{aligned}$$

  es una **permutación** (factible) de x
- x e y son **soluciones equivalentes**
- tomando todas las permutaciones (factibles) obtenemos **clases de equivalencia** de $(n+1)$-vectores

Formalizando... (cont.)

- el orden $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ define un conjunto

$$F := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$$

- el conjunto factible en (PS) es P_I
  para **eliminar la redundancia** $\rightarrow$ **conjunto factible** $P_I \cap F$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & x_{n+1} \\ & 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n + 2x_{n+1} = n+1 \\ & x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \\ & x \in \{0,1\}^{n+1} \end{array} \right. \qquad (\mathrm{PS}')$$

Otro ejemplo: variables con dos índices

$$
\begin{cases}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk} x_{ij} \geq b_k\,, \quad k = 1, \ldots, l \\
& x \in \{0,1\}^{n \times m}
\end{cases}
$$

- Pensar x como una matriz
- Dos casos:
  - Permutaciones permitidas sólo en un índice (p. ej. permutaciones de filas)
  - Permutaciones permitidas para ambos índices

Permutaciones de filas

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk}x_{ij} \geq b_k \ , \quad k = 1, \ldots, l \\ & x \in \{0,1\}^{n \times m} \end{cases}$$

- Ordenar las filas lexicográficamente, (Sherali & Cole Smith, 2000)
  F' definido por

$$\sum_{j=1}^{m} 2^{m-j} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{m} 2^{m-j} x_{i+1,j} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

- F definido por

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{m} x_{i+1,j} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

Permutaciones tanto en filas como columnas

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk} x_{ij} \geq b_k \,, \quad k = 1, \ldots, l \\ & x \in \{0,1\}^{n \times m} \end{cases}$$

- F definido por

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq \sum_{i=1}^{n} x_{i,j+1} \qquad j = 1, \ldots, m-1$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{m} x_{i+1,j} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

Caso general: un grupo permutando coordenadas

- sucesión de permutaciones factibles $\rightarrow$ permutación factible
- inversa de una permutación factible $\rightarrow$ permutación factible

$$\Downarrow$$

un **grupo** finito permutando coordenadas

Regiones fundamentales

- G grupo finito permutando coordenadas en $\mathbb{R}^n$
  $R \subseteq \mathbb{R}^n$ es una *región fundamental* si
  1. R abierto
  2. $\left.\begin{array}{c} g \in G \\ g \neq I \end{array}\right\} \Rightarrow g(R) \cap R = \emptyset$
  3. $\displaystyle\bigcup_{g \in G} \operatorname{cl} g(R) = \mathbb{R}^n$
- Motivación: $F := \operatorname{cl} R$

Dado G, ¿cómo construímos R?

Respuesta (teórica) Dado x^0 tal que $g(x^0) \neq x^0$ $\forall g \in G \setminus \{I\} \Rightarrow$ definir

$$R := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x^0 - g(x^0), y\rangle > 0, \forall g \neq I\}$$

$$\Downarrow$$

$$F := \{y : \langle g(x^0), y\rangle \leq \langle x^0, y\rangle, \forall g \neq I\}$$

Regiones fundamentales y grupos de reflexiones

Teorema (Steerneman 1990)

Sea G un subgrupo finito de $O(V)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Existe un cono convexo y cerrado T en V tal que:
   - $V = \cup_{g \in G} g(T)$.
   - $\sup_{g \in G} \langle x, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in T$.
2. Existe una región fundamental conexa F con la propiedad que para todo $u \in \partial F$ existe un $\tilde{g} \in G$, $\tilde{g} \neq I$ tal que $\tilde{g} u = u$.
3. Existe una región fundamental conexa F que es única, salvo por transformaciones en G dentro de la clase de las regiones fundamentales conexas.
4. G es un grupo de reflexiones con región fundamental definida a partir de su sistema de raíces.
5. Existe una región fundamental F tal que $T = \mathrm{cl}\, F$ es un cono convexo y cerrado y para todo $x, y \in T$

$$x \prec y \Leftrightarrow \langle x, u \rangle \leq \langle y, u \rangle \quad \forall u \in T.$$

Primer ejemplo "revisitado"

- $x \in \mathbb{R}^n$
- **todas las permutaciones son factibles**
- $x^0 = (1, 2, \ldots, n)^\top$
- F definido por

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(i) x_i \leq \sum_{i=1}^{n} i x_i$$

para π permutación de $\{1, \ldots, n\}$ $(n! - 1$ desigualdades$)$

- De hecho, F es definido por

$$x_i \leq x_{i+1}$$

para $i = 1, \ldots, n-1$ $(n - 1$ desigualdades$)$

Primera prueba

Queremos probar que cualquier vector de la forma

$$v_\pi(\pi(1) - 1, \pi(2) - 2, \ldots, \pi(n) - n)^\top$$

es una combinación lineal con coeficientes no negativos de los vectores

$$(1, -1, 0, \ldots, 0)^\top, \ldots, (0, \ldots, 0, 1, -1)^\top$$

Es decir, que el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \alpha = v_\pi$$

tiene una solución $\alpha \geq 0$.

Primera prueba (cont.)

Agreguémosle una incógnita más α_n al sistema sumada en la última ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \alpha = v_\pi$$

la matriz de este sistema es la matriz de Möbius del orden completo de n elementos cuya inversa es la matriz zeta

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Primera prueba (cont.)

Entonces,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} v_\pi$$

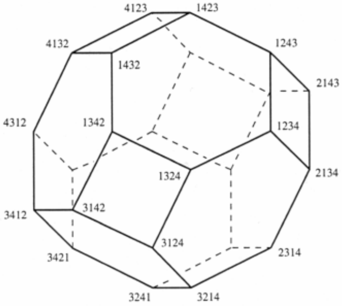
y por lo tanto

$$\alpha_j = \sum_{i \leq j} (\pi_i - i) \geq 0$$

y en particular, $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i - i) = 0$.

Segunda prueba

Consideremos las aristas y diagonales del permutohedra que se obtiene como politopo de la órbita de $(1, 2, \ldots, n)$. Caso $n = 4$:



El resultado sale de ver que las diagonales desde el vértice $(1, 2, 3, 4)$ son combinaciones cónicas de las aristas incidentes en ese vértice.

Región fundamental para variables con dos índices

- $x \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, variables con dos índices
- $G = G_1 \times G_2$
- Supongamos conocidas R_1 y R_2

¿Cómo construímos R?

Región fundamental para variables con dos índices (cont.)

- $R_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ definida por

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_i^r u_i < 0 \qquad r = 1, \ldots, m_1$$

- $R_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ definida por

$$\sum_{j=1}^{n_2} b_j^s v_j < 0 \qquad s = 1, \ldots, m_2$$

- Defina $R \subset \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ by

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_i^r \sum_{j=1}^{n_2} x_{ij} < 0 \qquad r = 1, \ldots, m_1$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} b_j^s \sum_{i=1}^{n_1} x_{ij} < 0 \qquad s = 1, \ldots, m_2$$

Región fundamental para el football pool problem

Las desigualdades

$$\sum_{i_j=1} x_{i_1,\dots,i_k} < \sum_{i_j=2} x_{i_1,\dots,i_k} < \sum_{i_j=3} x_{i_1,\dots,i_k}\,, \quad j = 1, \dots, k.$$

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} (i_{j+1} - i_j)\, x_{i_1,\dots,i_k} > 0\,, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

definen una región fundamental para G

¿Simetrías $\Leftrightarrow$ problema difícil?

- Precisando bien la pregunta: ¿para qué tipo de algoritmo son difíciles los problemas con simetrías y por qué?
- Son difíciles para los algoritmos tipo Branch-and-Bound!!
- Porque este tipo de algoritmo son "ciegos" a "equivalencias"
- En particular, considerar el siguiente ejemplo

Problemas que requieren mucha enumeración

Consideremos algoritmos *recursivos* (Chvátal 1980) para resolver $\min\{\sum x_i : Ax \geq e, x_i \in \{0,1\}\}$.

- Se consideran *vectores parciales* $x_J = (x_j : j \in J)$ con $J \subset \{1, \ldots, n\}$.
- En cada iteración, tenemos una lista de tales vectores y alguna solución factible x^*.
- Uno de los vectores parciales se puede extender a una solución óptima, o bien x^* es óptimo.
- Para cada vector parcial, x_J definimos $U(x_J)$ como las filas no cubiertas por x_J
- Una iteración del algoritmo consiste en uno de los siguientes pasos:
  - 1. *Branching*
    2. *Augmenting*
  - *Bounding*
  - *Dominating*
  - *Mejorar sol. actual*

Problemas que requieren mucha enumeración

- Estos algoritmos son del tipo “enumeración implícita”
- Son un poco “más potentes” que un algoritmo B&B basado en programación lineal básico
- Chvátal (1980) los usa para probar que existen problemas de la mochila que son computacionalmente difíciles
- Avis (1980) prueba que el problema de los triples de Steiner con $n \geq 27$ requiere la generación de, al menos, $2^{\sqrt{2n/3}}$ vectores parciales.

Muchas gracias!!