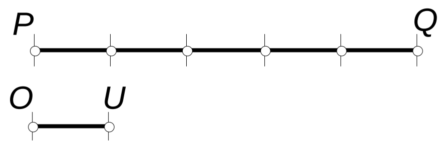
Números reales y sus propiedades.

(Notas redactadas por A. DIEGO y M. I. PLATZECK para el curso de Matemática General)

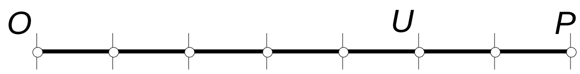
Los números naturales 1, 2, 3, ... , han sido creados por el hombre para contar los objetos de conjuntos finitos, el número natural n es una medida de la cantidad de objetos de un conjunto. Pero es necesario medir o comparar también longitudes, áreas, volúmenes, pesos, cantidades de calor, de electricidad, etc.. Para este tipo de cantidades sabemos decidir cuándo dos de ellas son equivalentes o iguales, mediante experiencias apropiadas. (Dos varillas que se pueden hacer coincidir son iguales en longitud, dos cuerpos que equilibran una balanza de platillos son iguales en peso, etc.). Se sabe además sumar dos cantidades de una misma especie y subdividir una cantidad dada en n partes iguales.

De ahora en adelante, consideraremos el problema de medir cantidades en el caso de longitudes. El problema de precisar la noción de medida o longitud de un segmento se presentó tempranamente a los geómetras griegos hace unos 25 siglos.

Dado un segmento OU que se considerará como unidad de medida y otro segmento PQ, puede ocurrir que PQ se pueda partir en n segmentos iguales a OU; en este caso n es la medida o longitud del segmento PQ (con respecto a la unidad OU).



Naturalmente, la circunstancia anterior es casual. En general, OU no “cabrá un número exacto de veces” en PQ.
Subdividamos ahora la unidad OU en m partes iguales. Se dice que cada una de estas partes (submúltiplos de OU) tiene longitud igual a $\frac{1}{m}$. Si se tiene un segmento PQ que puede dividirse en exactamente n partes iguales de longitud $\frac{1}{m}$, se dice que la longitud de PQ es $\frac{n}{m}$.
En el ejemplo de la siguiente figura, la longitud de PQ (con respecto a la unidad OU) es $\frac{7}{5}$.



En la figura siguiente, el segmento AC es el segmento suma de los segmentos AB y BC.

OBSERVACIONES:
1) Es claro que si se subdivide la unidad OU en m partes iguales y luego cada una de ellas en p partes iguales, la unidad OU quedó subdividida en $m \cdot p$ partes, de modo que la medida de cada una de ellas es $\frac{1}{m \cdot p}$. Necesitaremos entonces p segmentos consecutivos de esa medida para obtener uno de los segmentos resultantes de la primera subdivisión, es decir que:

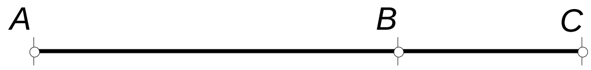
$$\frac{1}{m} = \frac{p}{m \cdot p} \quad .$$

2) Una consecuencia importante de la observación anterior es que

$$\frac{r}{m}=\frac{r\cdot p}{m\cdot p}$$

ya que ella nos dice que si la medida de un segmento es $\frac{r}{m}$ respecto de la unidad *OU,* es decir que el mismo puede dividirse en r partes iguales de longitud $\frac{1}{m}$, es claro que también podrá dividirse en $r\cdot p$ partes iguales de longitud $\frac{1}{m\cdot p}$.

3) Otra consecuencia inmediata es que si en la figura siguiente, la medida de AB es $\frac{p}{m}$ y la de BC es $\frac{q}{m}$ entonces la medida de AC es $\frac{p+q}{m}$.



Como resultado de las observaciones anteriores es fácil verificar que, si respecto de la unidad *OU*, la medida de *AB* es $\frac{m}{n}$ y la de *BC* es $\frac{r}{s}$, entonces la de *AC* es $\frac{m\cdot s+r\cdot n}{n\cdot s}$.

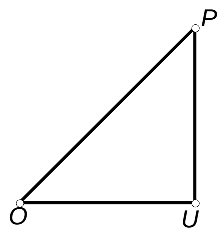
Esto es: $$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{m\cdot s}{n\cdot s}+\frac{r\cdot n}{n\cdot s}=\frac{m\cdot s+r\cdot n}{n\cdot s}.$$

Por otro lado, puede también verificarse que si la medida de un segmento *CD* con relación a la unidad *AB* es $\frac{r}{s}$ y la medida de *AB* en relación con la unidad *OU* es $\frac{m}{n}$, la medida de *CD* en relación a *OU* es $\frac{r\cdot m}{s\cdot n}$, (esto es $\frac{r}{s}\cdot\frac{m}{n}=\frac{r\cdot m}{s\cdot n}$). Por ejemplo, las $\frac{4}{5}$ partes de un segmento que mide $\frac{2}{3}$ tiene longitud $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

Históricamente, los números racionales han surgido de la necesidad de medir distintos tipos de cantidades y las operaciones entre ellos (suma y producto) aparecieron naturalmente en la forma que se indica en el párrafo anterior.

Dado un segmento *OU*, puede preguntarse si **cualquier** segmento *PQ* tiene una medida racional con respecto a la unidad *OU*, en la forma indicada antes, es decir, si hay algún submúltiplo de *OU* que “quepa exactamente” un número entero de veces en *PQ*. La respuesta es negativa y fue dada por los matemáticos Pitagóricos de la manera que veremos a continuación:

La hipotenusa *OP* de un triángulo rectángulo isósceles ΔOPU no tiene medida racional con respecto a la unidad *OU*.



En efecto, supongamos por el absurdo, que la medida de *OP* es el número racional $\frac{a}{b}$. Por el teorema de Pitágoras tendríamos que: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Esto es un absurdo porque: **El cuadrado de un número racional no puede ser 2**.
Veámoslo: Podemos suponer, simplificando los posible factores comunes del numerador y del denominador, que $\frac{a}{b}$ es irreducible.

Si fuese $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, resultaría que $a^2 = 2b^2$, es decir que a^2 es un número par.

El entero *a* no puede ser impar pues su cuadrado a^2 sería impar ya que:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

En consecuencia: *a* es par, o sea $a = 2q$, pero entonces $a^2 = 4q^2 = 2b^2$, lo que implica que $2q^2 = b^2$. De aquí resulta, como antes, que *b* es par, pues su cuadrado lo es. Concluimos entonces que *a* y *b* son pares, lo que contradice la hipótesis de que $\frac{a}{b}$ es irreducible.

OBSERVACIÓN[†]*:*
Se puede mencionar otra demostración de este hecho, que se basa en el "Teorema Fundamental de la Aritmética", es decir, en el teorema que afirma que cualquier número entero positivo puede descomponerse como un producto de números primos, ***en una única forma,*** *excepto por el orden de los factores.*

En efecto, si reemplazamos en la fórmula $a^2 = 2 \cdot b^2$*, las expresiones de a y b como productos de factores primos, tomando, por ejemplo*

$$a = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdots, \qquad b = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdots$$

obtendremos que

$$2^{2k_1} \cdot 3^{2k_2} \cdot 5^{2k_3} \cdots = 2^{2r_1+1} \cdot 3^{2r_2} \cdot 5^{2r_3} \cdots$$

lo que es una contradicción, pues el primer miembro tiene una cantidad ***par*** *de factores 2, mientras que el segundo miembro tiene una cantidad* ***impar****.*

Aunque estas dos demostraciones se basan en técnicas muy distintas (el hecho de que el cuadrado de un número par o impar mantiene el mismo tipo de paridad que el número original la primera, mientras que la segunda hace uso de las reglas de la divisibilidad) ambas se basan en la prueba por reducción al absurdo, es decir, en el uso del principio de no contradicción y son en consecuencia, demostraciones indirectas, que muchas veces terminamos aceptando por familiaridad, aunque con una sensación de "incomodidad" y "desconfianza", hasta manejar con convencimiento las reglas de la lógica.

[†] Nota: Esta Observación agregada en *itálica* ha sido agregada a las Notas originales de loa profesores Diego y Platzeck. E.N. Güichal.

Después de esto, la situación se planteaba en los términos siguientes: **los números racionales no son suficientes para asignar a cada segmento una medida** y la solución natural fue la de ampliar el sistema de los números racionales (positivos) agregándoles otros números, de manera que a todo segmento se pudiese asignar como medida uno de estos números y que cada uno de estos números correspondiese a la medida de un segmento. Estos números deben estar ordenados de modo que números (medidas) "mayores" correspondan a segmentos más grandes. Un número *x* queda caracterizado por sus aproximaciones racionales por defecto y por exceso.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Recordemos con un ejemplo el significado de la representación decimal de un número:

$$1983{,}271 = 1\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 3\cdot 1 + 2\cdot\frac{1}{10} + 7\cdot\frac{1}{10^2} + 1\cdot\frac{1}{10^3}\,.$$

Observemos en este punto que un número cuya representación decimal es finita, es un número racional.

El sistema decimal de escritura ha conducido naturalmente a la adopción del sistema métrico decimal; en términos generales, este sistema consiste en medir cantidades utilizando submúltiplos iguales a $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, etc., de la unidad de medida.

Es claro lo que significa decir que un segmento mide 1983,271. Pero al medir un segmento *PQ* puede ocurrir que su medida *x* no sea un múltiplo de $\frac{1}{10^n}$, por grande que elijamos a *n*. En este caso el número decimal finito (luego racional) $a_0, a_1a_2a_3\cdots a_n$ obtenido en el proceso de medición es sólo una medida aproximada por defecto del segmento *PQ* (con un error menor que $\frac{1}{10^n}$).

Deberíamos escribir entonces a *x* como una expresión decimal infinita: $x = a_0, a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ Recíprocamente, a una expresión decimal infinita de este tipo, podemos hacer corresponder un segmento de medida *x*.

La escritura decimal nos provee así de una manera cómoda de designar a un número real.

A los números racionales corresponden expresiones decimales periódicas, por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\cdots$$

$$\frac{141}{110} = 1{,}2818181\cdots$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}2500000\cdots$$

Decimos que estos números son periódicos porque una secuencia de cifras, llamada período, se repite indefinidamente a partir de un cierto dígito. Así, en la expresión de $\frac{141}{110}$ se repite 81. En el caso de $\frac{1}{4}$, se repite 0 indefinidamente. Para evitar ambigüedades, se prefiere la notación

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

$$\frac{141}{110} = 1,2\overline{81}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25\overline{0} = 0,25$$

En estos ejemplos, la expresión decimal se obtiene haciendo la división en la forma habitual. No es difícil convencerse de que realmente la medida a asignar a un segmento de, por ejemplo, longitud $\frac{1}{3}$, utilizando el sistema métrico decimal, es 0,3333….

Demostraremos ahora que:

a) **La representación decimal de un número racional es periódica**.

y recíprocamente:

b) **Si una expresión decimal de un número es periódica, el número es racional**.

a) Obtengamos en primer lugar la expresión decimal de $\frac{9}{14}$.

$$\begin{array}{l|l}
9 & 14 \\ \cline{2-2}
90 & \\
\;\;60 & 0,6428571 \\
\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;120 & \\
\;\;\;\;\;\;80 & \\
\;\;\;\;\;\;100 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 &
\end{array}$$

Al llegar a este punto, no hace falta proseguir la división, pues el 4 que apareció en el segundo lugar del cociente aparecerá ahora, ya que se obtuvo de dividir 60 por 14 y ésta es la opera-ción que se debe realizar a continuación. De la misma manera, seguirán luego 2, 8, 5, 7, 1.

Vemos así que lo que motiva la periodicidad es la repetición de un resto al dividir, 6 en el caso anterior. Se presenta la pregunta: ¿ocurre esta repetición en general, al dividir un número natural a por un número natural b? La respuesta es **sí**, pues los posibles restos son 0, 1, 2,..., $b-2$, $b-1$. (0, 1, 2,...,13 en el caso del ejemplo), luego, después de a lo sumo b pasos uno de los restos se repite.

b) Comencemos con un ejemplo.

Sea $\quad a = 132,1414\cdots = 132,\overline{14} = 132 + 0,\overline{14}$

$$10^2 a = 13214{,}14\cdots = 13214{,}\overline{14} = 13214 + 0{,}\overline{14}$$

Restando miembro a miembro ambas expresiones obtenemos:

$10^2 a - a = 13214{,}14 - 132 = 13082$, o sea:

$(10^2 - 1)a = 99a = 13082$.

Luego: $a = \dfrac{13082}{99}$.

En este ejemplo, el período comienza inmediatamente después de la coma y tiene dos cifras. Se ha multiplicado por $10^2 = 100$ con el objeto de correr dos lugares la coma decimal. Hemos obtenido así el número 13214,141414…, que tiene la misma parte decimal que $a = 132{,}141414\cdots$, de modo que al restarle a se obtiene un número entero.

Es fácil comprender que, si en un número a el período tiene p cifras siguiendo inmediatamente a la coma decimal, $10^p a - a$ será un número entero b y entonces, de $10^p a - a = b$, resulta:

$$a = \frac{b}{10^p - 1}.$$

(Nótese aquí que $0{,}9999\cdots = 0{,}\overline{9} = 1$)

Hemos probado que si el período sigue inmediatamente a la coma decimal, el número correspondiente es racional. Si el período no sigue inmediatamente a la coma decimal procederemos como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Sea $b = 12{,}87341341\cdots = 12{,}87\overline{341}$.

Entonces $10^2 b = 1287{,}341341\cdots = 1287{,}\overline{341}$.

Hemos multiplicado por 10^2 para reducir la situación al caso anterior, o sea, correr la coma de modo que el período comience inmediatamente después de la coma. Aplicando entonces el procedimiento visto, al número $1287{,}\overline{341}$ obtenemos:

$$10^2 b = 1287{,}\overline{341} = \frac{1286054}{999},$$

luego

$$b = \frac{1286054}{99900}.$$

En el caso general, si el período comienza r cifras después de la coma, multiplicando por 10^r nos colocamos en el caso anterior.

La proposición anterior tiene por objeto distinguir a los números racionales por su expresión decimal. Es conveniente recordar aquí que los números que no son racionales se llaman **irracionales**. Podemos indicar ahora fácilmente ejemplos de estos números:

0,10110011100011110000…
0,22122212222122222122222221…

(donde el desarrollo decimal continúa según se sugiere en las cifras escritas).

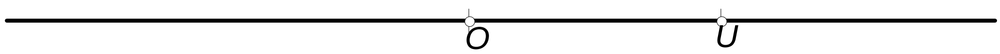
Por una vía diferente hemos dado anteriormente otro ejemplo de número irracional, en efecto, la longitud x de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen longitud 1 verifica $x^2 = 2$ y según probamos x no es racional. Dicho brevemente, $\sqrt{2}$ es irracional.

Hasta ahora hemos hablado de números positivos. Históricamente, los números negativos aparecieron recién a principios del siglo XVII (aparentemente sugeridos por el desarrollo de las actividades comerciales: una deuda podía ser considerada como una cantidad negativa). En esta época se convino en agregar a los números positivos los números negativos de una manera formal: con cada número positivo x se considera su negativo correspondiente: $-x$, de manera que $x + (-x) = 0$.

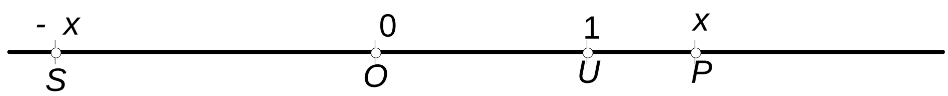
Todos estos números constituyen el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Este conjunto contiene al conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales (constituido por los racionales positivos, sus negativos y el cero). Se denomina $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros, constituido por los números naturales 1, 2, 3, 4, … , sus negativos y el cero. El conjunto de los naturales se notará con $\mathbb{N}$.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES.

Dada una recta y dos puntos diferentes *O* y *U* en ella, elijamos *OU* como unidad de longitud; llamaremos a la semirecta $\overrightarrow{OU}$ la semirecta positiva y a la semirecta opuesta, la semirecta negativa.



Dado un punto *P* en la semirecta positiva, la medida del segmento *OP* se denomina la abscisa de *P*. Si *S* es un punto de la semirecta negativa y *P*, de abscisa *x*, es su simétrico respecto de *O*, la abscisa de *S* es: $-x$.



Se tiene así una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta que asocia a cada punto su abscisa.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES.

El propósito de este párrafo es destacar ciertas propiedades básicas que gobiernan el cálculo con números reales. Una vez establecidas esas propiedades deduciremos de ellas las reglas habituales de cálculo.
La suma y el producto de los números naturales verifican las propiedades asociativa y conmutativa y la multiplicación es distributiva con respecto a la suma. Si agregamos a los naturales el 0 se tiene también $n + 0 = n$. Las operaciones de suma y producto entre racionales positivos:

$$\frac{m}{r} + \frac{n}{s} = \frac{ms + rn}{rs} \quad \text{y} \quad \frac{m}{r} \cdot \frac{n}{s} = \frac{mn}{rs},$$

conservan estas propiedades. Pero además, dado un número racional distinto de 0, $a = \frac{r}{s}$, el número $\frac{1}{a} = \frac{s}{r}$ es tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Se puede razonablemente admitir que todas estas propiedades de los números racionales se conservan para los números reales, dado que éstos se pueden aproximar tanto como se quiera por números racionales. La introducción de los números negativos permite escribir además la igualdad $a+(-a)=0$.

Conviene destacar que cualquier definición matemáticamente rigurosa de los números reales entraña dificultades que están fuera del alcance y los propósitos de este curso. Definiciones de este tipo se han formulado recién en la segunda mitad del siglo pasado. (*En un Apéndice al final de estas Notas, se agregan algunos comentarios relacionados con estas dificultades*)

PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO.

Si *a, b, c* son números reales, se verifican las siguientes propiedades:

S1- **ASOCIATIVIDAD DE LA SUMA**: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

S2- **CONMUTATIVIDAD DE LA SUMA**: $a+b=b+a$.

S3- **0 ES NEUTRO ADITIVO**, o sea: $a+0=a$, para todo $a\in \mathbb{R}$.

S4- **TODO NÚMERO REAL TIENE INVERSO ADITIVO**, esto es: dado $a\in\mathbb{R}$, existe un único número real, que notaremos con $-a$, tal que $a+(-a)=0$.

M1- **ASOCIATIVIDAD DEL PRODUCTO**: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

M2- **CONMUTATIVIDAD DEL PRODUCTO**: $a\cdot b=b\cdot a$.

M3- **1 ES NEUTRO MULTIPLICATIVO**, o sea: $1\cdot a=a$, para todo $a\in\mathbb{R}$.

M4- **TODO NÚMERO REAL DISTINTO DE 0 TIENE INVERSO MULTIPLICATIVO**, esto es: dado $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, existe un único número real, que notaremos con $\frac{1}{a}$, tal que $a\cdot\frac{1}{a}=1$.

D- **DISTRIBUTIVIDAD DEL PRODUCTO CON RESPECTO A LA SUMA**:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Notaremos:

$$a+(-b)=a-b$$

$$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

$$((a+b)+c)+d=a+b+c+d$$

$$((a\cdot b)\cdot c)\cdot d=a\cdot b\cdot c\cdot d$$

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\ \text{veces}}=a^n.$$

Números reales y sus propiedades. (cont.)

(Notas redactadas por A. DIEGO y M. I. PLATZECK para el curso de Matemática General)

ALGUNAS PROPIEDADES USUALES QUE SE DEDUCEN DE LAS ANTERIORES.

Además de las propiedades enunciadas precedentemente, es sabido que los números reales tienen otras propiedades. Algunas de éstas son tan simples que el lector se preguntará seguramente para qué hace falta una demostración. Por ejemplo, nosotros probaremos que $a \cdot 0 = 0$, cosa bien conocida.

Al decir que **probaremos** que $a \cdot 0 = 0$, se quiere significar que podemos deducir la validez de esta propiedad utilizando solamente las propiedades básicas explícitamente mencionadas antes. Naturalmente, una alternativa razonable es incluir $a \cdot 0 = 0$ entre las propiedades básicas y podríamos incluir también entre éstas, muchas otras propiedades de cuya validez está convencido el lector. Obtendríamos de este modo una lista bastante numerosa de propiedades que aún así no incluiría muchas propiedades que se pueden presentar en los cálculos.

La elección de este pequeño número de propiedades básicas es guiada en definitiva por la idea de economizar esfuerzos: con sólo memorizar estas propiedades uno puede determinar la validez de toda otra propiedad algebraica que se necesite en el cálculo.
Obsérvese que las propiedades asociativa y conmutativa de la adición son las que nos permiten suprimir paréntesis e intercambiar el orden de los sumandos; así, puede verificar el lector que:

$$\big((d + c) + (e + b)\big) + a = a + b + c + d + e .$$

Análoga propiedad vale para un producto de varios factores.

REGLAS PARA “DESPEJAR”.

1. $b + x = a$ equivale a $x = a - b$.
En efecto, sumando $-b$ a ambos miembros de la igualdad $b + x = a$, se tiene:

$$b + x + (-b) = a + (-b), \text{ o sea } 0 + x = a - b, \text{ esto es: } x = a - b .$$

2. Si $b \neq 0$, $b \cdot x = a$ es equivalente a $x = \dfrac{a}{b}$.

Basta multiplicar en este caso por $\dfrac{1}{b}$ y se tiene

$$\frac{1}{b} \cdot b \cdot x = \frac{1}{b} \cdot a , \quad \text{o sea:} \quad 1 \cdot x = x = \frac{a}{b} .$$

De aquí obtenemos la ley de simplificación:
Si $b \neq 0$ y $b \cdot x = b \cdot y$, entonces $x = y$.

3. $-(-a) = a$.
Resulta de despejar a en $a + (-a) = 0$.

4. $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a \quad (a \neq 0)$.

Resulta de despejar a en $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

5. $-(a+b) = -a-b$.

Resulta de despejar $-a-b$ en $(a+b)+(-a-b)=0$.

Análogamente se ve que

$$-(a+b+c+d) = -a-b-c-d\ .$$

6. Anulación de un producto: $a \cdot 0 = 0$ y si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Probemos primero que $a \cdot 0 = 0$: $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

Restando a ambos miembros $a \cdot 0$ se tiene que $a \cdot 0 = 0$.

Supongamos ahora que $a \cdot b = 0$. Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a} \cdot a \cdot b = \dfrac{1}{a} \cdot 0 = 0$. Luego $b = 0$.

En general, si el producto de varios factores es cero, por lo menos uno de ellos es cero. Esta regla es útil en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, las soluciones de la ecuación:

$$(x+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{x-3}\right) \cdot x = 0$$

son: –1, 2 y 0. En efecto, –1 es la única solución de $(x+1) = 0$, 2 es la única solución de $\left(1 + \dfrac{1}{x-3}\right) = 0$, 0 es la única solución de $x = 0$. Por la regla de la anulación del producto, éstas son las únicas soluciones de la ecuación dada.

7. Reglas de los signos:

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Probemos primero que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$:

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

Despejando $(-a) \cdot b$ se obtiene: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Finalmente: $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b))$.

(En el último caso utilizamos la regla 3).

8. Reglas relativas al cociente:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ equivale a: $a \cdot d = b \cdot c$.

$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}.$$

A título de ejemplo probaremos que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$. Multipliquemos ambos miembros por $b \cdot d$:

$$b \cdot d \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = b \cdot d \cdot \frac{a}{b} + b \cdot d \cdot \frac{c}{d} = a \cdot d + b \cdot c;$$

Por otra parte:

$$b \cdot d \cdot \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = a \cdot d + b \cdot c;$$

Luego:

$$b \cdot d \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = b \cdot d \cdot \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Simplificando $b \cdot d$ se obtiene la igualdad deseada. (Nótese que $b \cdot d \neq 0$)

9. Utilizando la propiedad distributiva, se prueba que:

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot a = \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{1 \cdot a + 1 \cdot a + \cdots + 1 \cdot a}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ veces}}$

10. Reglas de la potenciación.

$a^1 = a$; $\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ si $n, m \in \mathbb{N}$; $\quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ si $n, m \in \mathbb{N}$.

Recordemos a título de ejemplo:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n+m \text{ veces}} = a^{n+m}$$

Agregaremos ahora a nuestra lista de propiedades básicas las que se refieren al orden:

O1- Dado un número real *a*, una y sólo una de las siguientes alternativas es válida:
1) $a = 0$, 2) a es positivo, 3) $-a$ es positivo.

O2- La suma y el producto de números positivos es un número positivo.

Conviene advertir que $-a$ puede ser positivo; por ejemplo, cuando $a=-1$, $-a=-(-1)=1$ es positivo.

Naturalmente, $a<b$ (ó $b>a$) significa que $b-a$ es positivo. En particular, $0<b$ quiere decir que $b-0=b$ es positivo.

Observemos que si $a<b$, entonces $-b<-a$, pues lo primero significa que $b-a>0$ y $-b<-a$ significa que $-a-(-b)=b-a>0$.
La notación $b\leq a$ ($a\geq b$) significa que, o bien es $b<a$, ó $b=a$.

Por ejemplo: $3\leq 4$ pues $3<4$ y $3\leq 3$ pues $3=3$.

Transitividad del orden.
Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.
En efecto: $a<b$ quiere decir que $b-a>0$,
$b<c$ quiere decir que $c-b>0$.
Sumando y teniendo en cuenta **O2**, resulta que $b-a+c-b>0$, o sea: $a<c$.

Leyes de monotonía.
De la suma: Si $a<b$ entonces $a+c<b+c$.
Del producto: Si $a<b$ y $c>0$, entonces $a\cdot c<b\cdot c$.

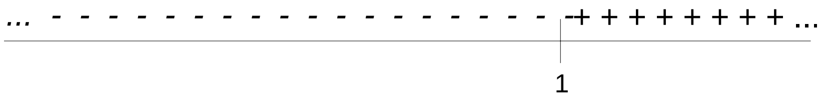
Probemos la segunda:
Como $a<b$, $b-a>0$, pero también c es positivo, luego por **O2** resulta que $(b-a)\cdot c>0$, es decir que $a\cdot c<b\cdot c$.

En cambio, si $a<b$ y $c<0$, la desigualdad se invierte, es decir: $a\cdot c>b\cdot c$. Dejamos la verificación a cargo del lector.

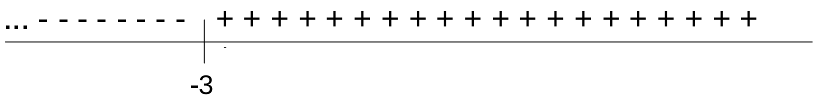
Signo del producto.
De lo anterior resulta que:
Si $a>0$ y $b>0$, entonces $a\cdot b>0$.
Si $a<0$ y $b>0$, entonces $a\cdot b<0$.
Si $a<0$ y $b<0$, entonces $a\cdot b>0$.

Resulta de esto que el producto de varios factores no nulos es positivo si hay un número par de factores negativos y es negativo en caso contrario. En particular, el cuadrado de cualquier número no nulo es positivo. Note que de aquí resulta que $1^2=1>0$ y también que si $a>0$, $\frac{1}{a}>0$ y entonces $\frac{a}{b}>0$ si a y b son ambos positivos o bien si a y b son ambos negativos.

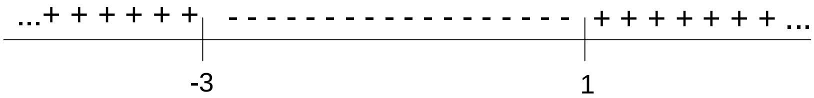
EJEMPLOS:
1. Nos interesa saber el signo de $(x-1)\cdot(x+3)$ (para cada valor de x).
Será más sencillo estudiar primero el signo de cada factor por separado:



$(x-1):$



$(x+3):$



$(x-1)\cdot(x+3):$

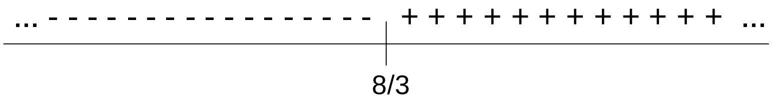
Decir que $x-1>0$ es decir que $x-1+1>0+1$, o sea $x>1$, lo que hemos representado en la primera recta. Así, $x+3>0$ equivale a $x>-3$, representado en la segunda recta.

Utilizando las reglas sobre el signo del producto, resulta que $(x-1)\cdot(x+3)>0$ si $x>1$ ó $x<-3$ y que $(x-1)\cdot(x+3)<0$ si $-3<x<1$, lo que hemos representado en la tercera recta.

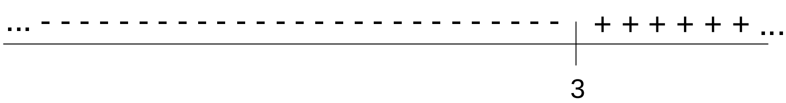
2. Nos interesa ahora ver para qué valores de *x* vale que $4+\dfrac{1}{x-3}>1$.

Sumando -1 a ambos miembros nos queda:

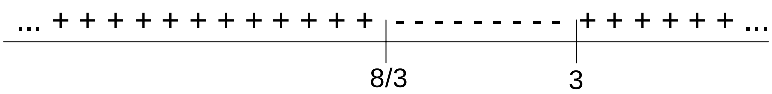
$$3+\frac{1}{x-3}>0, \quad \text{o sea} \quad \frac{3\cdot(x-3)+1}{x-3}=\frac{3x-8}{x-3}>0$$



$(3x-8):$



$(x-3):$



$\dfrac{3x-8}{x-3}:$

Note que $3x-8>0$ equivale a $3x>8$, o sea $x>\dfrac{8}{3}$.

Probaremos ahora que para un número *a* positivo se tiene que:

$$\text{si } 1<a\text{, entonces } 1<a<a^2<a^3<\cdots<a^n<\cdots$$
$$\text{si } 1>a\text{, entonces } 1>a>a^2>a^3>\cdots>a^n>\cdots$$

En efecto, si $1 < a$, multiplicando por a, que es positivo, resulta $a < a^2$, multiplicando nuevamente por a, $a^2 < a^3$, etc. Si $1 > a$, se procede en forma análoga.
Se tiene también que:

$$0 < a < b \text{ implica que } a^n < b^n \text{, para todo } n \in \mathbb{N} \ n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, de $a < b$ resulta, multiplicando por $\frac{1}{b}$, que $0 < \frac{a}{b} < 1$. Luego, por lo anterior:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 1 \text{, o bien } \frac{a^n}{b^n} < 1 \text{, es decir que: } a^n < b^n.$$

Finalmente, observemos la siguiente regla de uso frecuente:
Si $0 < a < b$, entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, cuya deducción es inmediata multiplicando por $\frac{1}{a \cdot b}$.

Intervalos.

Notaremos:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$

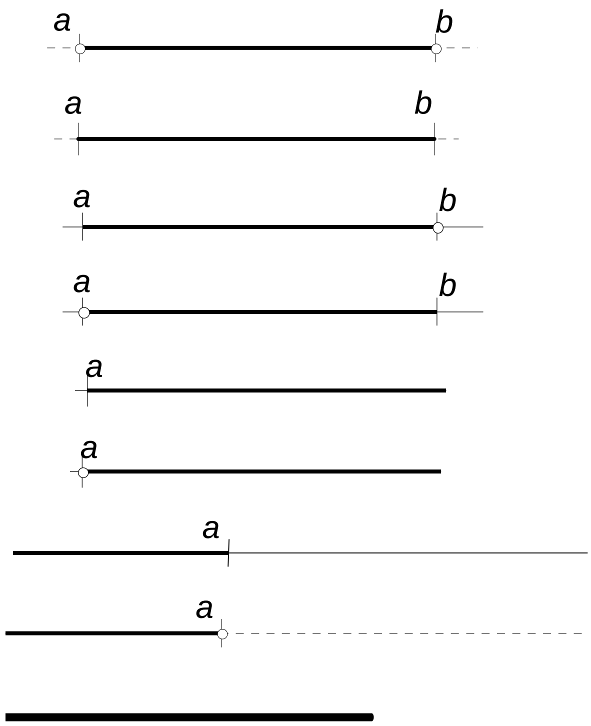
$[a, +\infty$ $= \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



Estos conjuntos se denominan intervalos. A la derecha hemos indicado su representación gráfica.

Números reales y sus propiedades. (cont.)

(Notas redactadas por A. DIEGO y M. I. PLATZECK para el curso de Matemática General)

Valor absoluto.

Definición: Llamamos **valor absoluto de *a*** al número $|a|$ definido como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Así, de acuerdo con la definición: $|3| = 3$, $|-3| = 3$.

Propiedades.

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

2. $|a+b| \leq |a| + |b|$.

3. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Probemos 2 y 3.

Demostración de 2.:

$a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, luego: $a + b \leq |a| + |b|$.

Análogamente: $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, luego: $-(a+b) \leq |a| + |b|$.

Pero, por definición, uno de los dos valores: $a+b$, $-(a+b)$ coincide con $|a+b|$, de donde resulta 2.

Demostración de 3.:

$$|a| = |b + (a-b)| \leq |b| + |a-b|,$$

Luego: $$|a| - |b| \leq |a-b| \qquad \text{(i)}$$

Intercambiando *b* con *a* se tiene:

$$|b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|,$$

o sea: $$-(|a| - |b|) \leq |a-b| \qquad \text{(ii)}$$

Como antes, uno de los valores $|a| - |b|$, $-(|a|-|b|)$ es $||a|-|b||$, de donde resulta 3., usando (i) o (ii) según sea el caso.

Interpretación geométrica.

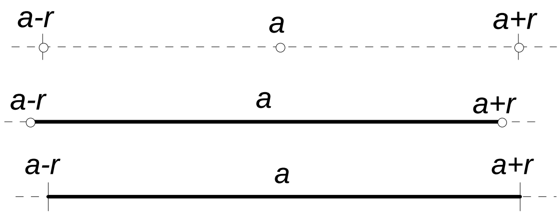
Si *a* y *b* son las abscisas de dos puntos de una recta o como se dice para abreviar, si *a* y *b* son dos puntos de una recta, $|a-b|$ es la distancia entre esos puntos o la longitud del

segmento de extremos a y b (en relación a la unidad de medida elegida en la representación). En efecto, si $a < b$, entonces $b - a = |a - b|$ es la distancia entre a y b. Si $b < a$, entonces $a - b = |a - b|$ es la distancia entre a y b.
Notemos que si $r > 0$:

$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| = r\} = \{a-r,\ a\ \ r\}$

$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} = (a-r,\ a+r)$

$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq r\} = [a-r,\ a+r]$



Estas desigualdades se obtienen teniendo en cuenta la interpretación geométrica. Ellas podrían ser demostradas a partir de las propiedades básicas y sus consecuencias.

Potenciación racional y real.

Sea $a > 0$. $\sqrt{a}$ es el número <u>positivo</u> cuyo cuadrado es a. Quiere decir que $\sqrt{a}$ es una solución de la ecuación $x^2 = a$, la otra es el número real $-\sqrt{a}$.
Es erróneo escribir $\sqrt{a^2} = a$ cuando a es negativo. En general, se tiene que $\sqrt{a^2} = |a|$.
Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se define $\sqrt[n]{a}$ como el número <u>positivo</u> b tal que $b^n = a$. Admitimos la existencia de tal número b.

No puede existir otro número b' en tales condiciones, es decir:
(*) Si b y b' son números positivos y $b^n = b'^n$, entonces $b = b'$.

En efecto, si fuese $b \neq b'$, entonces se tendría que: o bien $b < b'$ o $b' < b$. En el primer caso tendremos que $b^n < b'^n$; en el segundo $b'^n < b^n$, contradiciendo la hipótesis; luego, necesariamente debe ser $b = b'$.

De acuerdo a la definición, si $a > 0$: $\sqrt[n]{a^n} = a$ y $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.
Observe que $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Definición: Si $a > 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$ definimos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Se debe notar que $a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} = a^{\frac{m}{n}}$, esto es: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.
En efecto, llamemos $b = \sqrt[kn]{a^{km}}$ y $b' = \sqrt[n]{a^m}$, entonces:
$b^{kn} = \left(\sqrt[kn]{a^{km}}\right)^{kn} = a^{kn}$; $b'^{kn} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{kn}$.

(Hemos utilizado propiedades de la exponenciación entera vistas anteriormente).
De $b^{kn} = b'^{kn}$, por la propiedad (*) resulta que $b = b'$.

El lector sabe que un número racional positivo puede escribirse de infinitas formas como cociente de dos números naturales y que si $\frac{m}{n}$ es la expresión irreducible de un número racional positivo, toda otra expresión es de la forma $\frac{k\cdot m}{k\cdot n}$, con $k\in\mathbb{N}$.

Por lo que hemos visto recién: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k\cdot m}{k\cdot n}}$. La definición de $a^{\frac{m}{n}}$ depende solamente del número racional $\frac{m}{n}$ y no de su expresión como cociente de números naturales.

Obsérvese que si el número racional es el número natural n, $a^{\frac{n}{1}} = \sqrt[1]{a^n} = a^n$.

Probemos ahora que si $\alpha, \beta\in\mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y a, b son números reales positivos, entonces:

(1) $a^{\alpha}\cdot b^{\alpha} = (a\cdot b)^{\alpha}$

(2) $a^{\alpha}\cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$

(3) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}$

Probaremos la segunda, las otras se prueban con una técnica análoga. Podemos suponer, reduciendo las fracciones a común denominador, que $\alpha = \frac{m}{n}$, $\beta = \frac{r}{n}$, de modo que $\alpha+\beta = \frac{m+r}{n}$. Se trata de probar que:

$$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{m+r}}$$

Llamemos $b = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^r}$, $b' = \sqrt[n]{a^{m+r}}$. Elevando b y b' a la potencia n-ésima, se tiene:

$$b^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^r}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^n = a^m\cdot a^r = a^{m+r}$$

$$b'^n = \left(\sqrt[n]{a^{m+r}}\right)^n = a^{m+r}$$

Nuevamente, de $b^n = b'^n = a^{m+r}$, resulta que $b = b'$.

Tenemos así definida la potenciación para exponentes racionales positivos. Como todo número real positivo x se puede aproximar tanto como se quiera por un número racional $\alpha > 0$, se define a^x (con $a > 0$) por medio de sus aproximaciones a^{α}. Éste es un punto delicado de la teoría del número real, que no abordaremos aquí. Admitiremos que las propiedades (1), (2) y (3) valen si α y β son números reales positivos. A pesar de que no estudiaremos el problema de dar una definición precisa de exponenciación con exponente irracional indiquemos que para calcular, por ejemplo, $2^{\sqrt{2}}$ podemos proceder utilizando la expresión decimal de $\sqrt{2} = 1{,}4142\cdots$. Los números 2^1, $2^{1{,}4}$, $2^{1{,}41}$, $2^{1{,}414}$, $2^{1{,}4142}$, potencias racionales de 2, son aproximaciones cada vez mejores de $2^{\sqrt{2}}$.

La exponenciación a^x se puede extender a números reales x arbitrarios, de modo que las propiedades (1), (2) y (3) sigan siendo válidas. Para ello se pone:

i) $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

ii) $a^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$.

NOTA: La elección de estas definiciones no es arbitraria. Ellas se imponen si queremos que la propiedad (2) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ sea válida para exponentes α y β arbitrarios:

Para $\beta = 0$, (2) se escribe: $a^{\alpha} \cdot a^{0} = a^{\alpha+0} = a^{\alpha}$. Luego, $a^{0} = 1$, necesariamente.
Análogamente, para $\beta = -\alpha$, (2) se escribe $a^{\alpha} \cdot a^{-\alpha} = a^{\alpha+(-\alpha)} = a^{0} = 1$ y entonces, obligadamente, se tiene que $a^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^{\alpha}}$.

Es materia de verificación, caso por caso, que las propiedades (1), (2) y (3) siguen siendo válidas si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,. A título de ejemplo, demostraremos (2) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$.

<u>Primer caso</u>: $\alpha > 0,\ \beta > 0$. Es conocido.
<u>Segundo caso</u>: α arbitrario, $\beta = 0$: $a^{\alpha} \cdot a^{0} = a^{\alpha} \cdot 1 = a^{\alpha+0}$.
<u>Tercer caso</u>: $\alpha > 0,\ \beta < 0$: Sea $\beta = -\lambda$ $(\lambda > 0)$.
Supongamos primero que $\alpha \geq \lambda$;

Entonces: $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha} \cdot a^{-\lambda} = a^{\alpha} \cdot \dfrac{1}{a^{\lambda}} = \dfrac{a^{\alpha}}{a^{\lambda}} = a^{\alpha-\lambda} = a^{\alpha+\beta}$.

(Note que pusimos $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\lambda}} = a^{\alpha-\lambda}$. Esto proviene de $a^{\alpha} = a^{\alpha-\lambda} \cdot a^{\lambda}$, que vale porque $\alpha - \lambda \geq 0,\ \lambda > 0$)
Si $\alpha < \lambda$, entonces:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha} \cdot a^{-\lambda} = a^{\alpha} \cdot \frac{1}{a^{\lambda}} = \frac{a^{\alpha}}{a^{\lambda}} = \frac{1}{a^{\lambda-\alpha}} = a^{-(\lambda-\alpha)} = a^{\alpha-\lambda} = a^{\alpha+\beta}.$$

<u>Cuarto caso</u>: $\alpha > 0,\ \beta < 0$. Pongamos $\alpha = -\lambda,\ \beta = -\delta$, $(\lambda > 0,\ \delta > 0)$.
Entonces:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = \frac{1}{a^{\lambda}} \cdot \frac{1}{a^{\delta}} = \frac{1}{a^{\lambda+\delta}} = a^{-(\lambda+\delta)} = a^{\alpha+\beta}.$$

OBSERVACIONES:
1) Se conviene en escribir $\sqrt[n]{0} = 0$, si $n \geq 1$, ya que $0^{n} = 0$.
2) A veces se habla también de las raíces de orden impar de números negativos. Por ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$. En general, si n es impar y $a < 0$, ponemos: $\sqrt[n]{a} = b$ siempre que $b^{n} = a$. Notemos que $b < 0$. Una definición análoga es imposible en la teoría de números reales para raíces de orden par de números negativos. (Por qué?)

ESTUDIO DE LA EXPRESIÓN: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (a \neq 0)$.

Como $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right)$, comenzaremos estudiando la expresión: $x^2 + p \cdot x + q$.

$x^2 + p \cdot x + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$.

De esto resulta inmediatamente que:

1) El menor valor de $x^2 + p \cdot x + q$ se obtiene cuando $x = -\frac{p}{2}$.

En efecto, para este valor: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$ y para $x \neq -\frac{p}{2}$, $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > 0$.

2) Si $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $x^2 + p \cdot x + q > 0$ para todo x y en particular se puede asegurar que $x^2 + p \cdot x + q = 0$ no tiene raíces reales.

3) Si $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$, entonces $x^2 + p \cdot x + q = (x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ donde:

(*) $$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

En particular α y β son las únicas raíces de la ecuación $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

(*) se deduce de:

$$x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right).$$

EJERCICIO: Obtenga $\{x\colon\ x^2 + p \cdot x + q > 0\}$ y represéntelo gráficamente.

En el caso general, $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ tiene por raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac \geq 0$.

No tiene raíces reales si $b^2 - 4ac < 0$.

El número $b^2 - 4ac$ se llama el *discriminante* de la ecuación. Para obtener estas fórmulas basta reemplazar en las expresiones de α y β, p por $\frac{b}{a}$ y q por $\frac{c}{a}$.