

# FUNCIONES

Notas redactadas por A. Diego y M. I. Platzeck para el curso de “Matemática General”

## 1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS.

El concepto de función que vamos a estudiar está en la base de la matemática, de otras ciencias y aún de la vida corriente.

**Definición:** Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  en  $B$  es una correspondencia que a cada elemento de  $A$ , asocia un único elemento bien determinado de  $B$ . El elemento  $y$  de  $B$  que corresponde al elemento  $x \in A$ , se llama el valor de  $f$  en  $x$  y se escribe  $y = f(x)$ . A veces se escribe  $f:A \rightarrow B$ . El conjunto  $A$  se denomina el *dominio* de  $f$  y  $B$  su *rango* (también llamado *codominio*).

Por ejemplo:

- 1) La longitud de una circunferencia es función de su radio  $r$ . En efecto,  $L = 2\pi r$ . Esta expresión define una correspondencia que a cada número real  $r$  positivo asocia el número  $2\pi r$ .
- 2) El área de un cuadrado es función de la longitud de su lado  $a$ :  $A = a^2$ . Aquí también, esta fórmula define una función, la que a cada número real positivo  $a$  asocia el número  $a^2$ .
- 3) Un ómnibus se mueve a una velocidad constante de 70 km/h. Después de  $t$  horas el ómnibus ha recorrido una distancia de  $x = 70.t$  Km. Se tiene así una función que a cada número real  $t$  asocia el número  $x = 70.t$ .

En los ejemplos anteriores cada función es expresada mediante una fórmula, pero no es siempre ésta la situación. Por ejemplo:

- 4) La correspondencia que a cada polígono del plano asocia su área define bien una función  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A$  es el conjunto de todos los polígonos del plano y  $B = \mathbb{R}$ .
- 5) Si el ómnibus del ejemplo 2 no marcha a una velocidad constante, sino que ésta es alterada a capricho del conductor, no podremos expresar por una fórmula la relación entre el tiempo y el espacio recorrido. Sin embargo, después de  $t$  horas el ómnibus se encontrará a una distancia de  $x$  Km., bien determinada y por lo tanto ha quedado bien definida una función  $x = f(t)$ .
- 6) La temperatura  $T$  medida en grados centígrados de un punto  $P$  de la Tierra (en un instante dado) depende de  $P$ . Se tiene así una función  $f$  que a cada punto  $P$  de la Tierra asocia su temperatura  $T = f(P)$ .

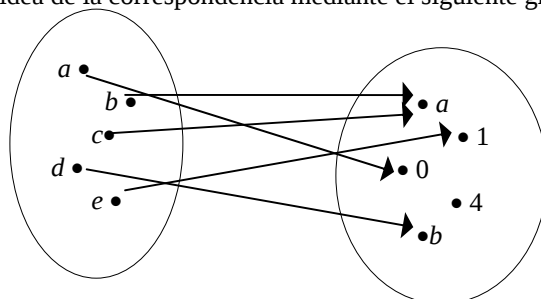
Estos dos últimos ejemplos muestran que la idea de función no es privativa de la matemática y que una función no está necesariamente dada por una fórmula.

Si el conjunto  $A$  es finito, una función  $f:A \rightarrow B$  puede definirse, en principio, enunciando explícitamente cuál es el elemento de  $B$  que corresponde a cada uno de los elementos de  $A$ .

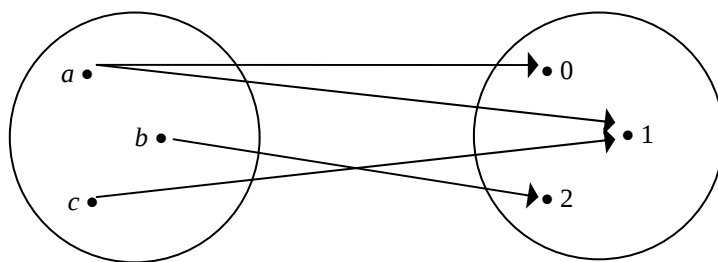
- 7) Si  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{a, 1, 0, b, 4\}$ , queda definida una función  $f$  por la tabla

| $x$    | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | 0   | $a$ | $a$ | $b$ | 1   |

Podemos tener una idea de la correspondencia mediante el siguiente gráfico:

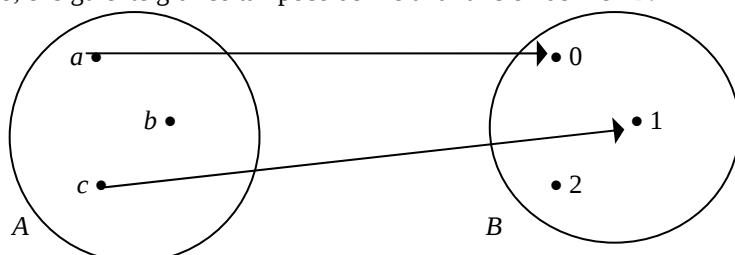


En cambio, el gráfico siguiente no corresponde a ninguna función:



Esto es porque al elemento  $a \in A$  no está asociado un elemento bien determinado de  $B$ , como exige la definición.

Asimismo, el siguiente gráfico tampoco define una función de  $A$  en  $B$ :



En este caso no se trata de una función de  $A$  en  $B$  ya que al elemento  $b$  no se asocia ningún elemento de  $B$ .

En la vida corriente hay múltiples ejemplos de utilización de la noción de función: los precios de las mercancías de un almacén, la edad de las personas, su grupo sanguíneo, etc.

## 2. FUNCIONES DEFINIDAS POR UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

Una clase de funciones, que estudiaremos especialmente, son las definidas mediante expresiones algebraicas.

Consideremos, por ejemplo, las siguientes expresiones algebraicas de la variable  $x$ :

a)  $x^2 - 2x$

b)  $\frac{1}{x} + 7$

c)  $\sqrt{x-1}$

d)  $\sqrt[3]{\frac{(x-1) \cdot (x+2)}{x+1}}$

Estas expresiones nos permiten definir funciones. Para ello asociamos a cada número real  $a$  el número que resulta de sustituir  $x$  por  $a$  en la expresión algebraica correspondiente. Por ejemplo,

consideremos la expresión b). Al número 4 hacemos corresponder  $\frac{1}{4} + 7 = \frac{29}{4}$ , al número 1 el número

$\frac{1}{1} + 7 = 8$ , al número  $-1$  el número  $\frac{1}{-1} + 7 = 6$ , etc. Pero ¿qué número debemos asociar al número 0?

Si sustituyéramos  $x$  por 0 en b), obtendríamos  $\frac{1}{0} + 7$ , que no tiene sentido. Así, al número 0 no se

puede asociar por esta regla, ningún número real. La función definida por la expresión  $\frac{1}{x} + 7$  asocia

a cada número real  $a \neq 0$  el número  $\frac{1}{a} + 7$ .

Esta función se denota simplemente por  $y = \frac{1}{x} + 7$ .

En general, para una función definida mediante una expresión algebraica en  $x$ , se llama *campo* o *dominio de definición* (o *de existencia*) al conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}$  de los números  $a$  para los cuales la sustitución de  $x$  por este número  $a$  tiene sentido y por lo tanto define un número real.

**EJEMPLOS.** Los dominios de definición de las funciones definidas por las expresiones algebraicas a), b), c) y d) son los siguientes:

b)  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

d)  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

x. En cuanto a c),  $\sqrt{x-1}$  tiene sentido si  $x-1 \geq 0$  y no lo tiene si  $x-1 < 0$ . En el caso d) lo único que hay que considerar es que el denominador de la expresión subradical sea diferente de cero, o sea  $x+1 \neq 0$ .

Es costumbre no indicar ni el dominio ni el rango de funciones definidas por expresiones algebraicas. Se sobreentiende, salvo mención explícita de lo contrario, que el dominio es el dominio de definición y el rango es  $\mathbb{R}$ . Así,  $y = \frac{1}{x}$  indica la función  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que asocia a cada número real  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  el número real  $y = \frac{1}{x}$ .

Consideremos otros ejemplos:

e)  $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{(x-1) \cdot \sqrt{x^2+1}}$

Para que esta expresión tenga sentido deben tenerlo ambos sumandos. El primero,  $\sqrt{2+x}$ , tiene sentido para los números  $x$  tales que  $2+x \geq 0$ , es decir, si  $x \in [-2, +\infty)$ . En el segundo aparecen un cociente y una raíz, lo que exige que el denominador  $(x-1) \cdot \sqrt{x^2+1}$  sea distinto de 0 y que el radicando sea mayor que 0. Como siempre se tiene que  $x^2+1 > 0$ , ambas condiciones son válidas si  $x \neq 1$ . En resumen, el dominio de definición de la función indicada es  $[-2, +\infty) - \{1\}$ .

Debe observarse que una expresión algebraica puede no definir una función, por ejemplo:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{-x}$$

sólo tendrá sentido si simultáneamente es  $x - 1 \geq 0$  y  $-x \geq 0$ , esto es: si  $x \geq 1$  y  $x \leq 0$ , lo que es imposible.

Las funciones que son definidas mediante un polinomio en  $x$  se llaman **funciones polinomiales** o **polinomios**. Su dominio de definición es  $\mathbb{R}$ . Las funciones que se pueden escribir como cociente de dos polinomios, por ejemplo

$$\frac{2x^2+1}{x-1}, \quad \frac{1}{x}, \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

se llaman **funciones racionales**. Aquí el dominio de definición puede no ser todo  $\mathbb{R}$ , ya que deben excluirse las raíces del denominador.

Cuando una función  $f$  está indicada en la forma  $y=f(x)$ , el símbolo  $x$  se denomina la **variable independiente**, el símbolo  $y$  la **variable dependiente**.

### 3. OTROS EJEMPLOS.

En muchas aplicaciones de la matemática a problemas concretos en las que una cantidad  $y$  depende de una cantidad  $x$  se puede describir dicha ley de dependencia mediante una expresión algebraica, como es el caso en los ejemplos 1, 2 y 3 del párrafo 1. Vamos a indicar algunos ejemplos más de este tipo.

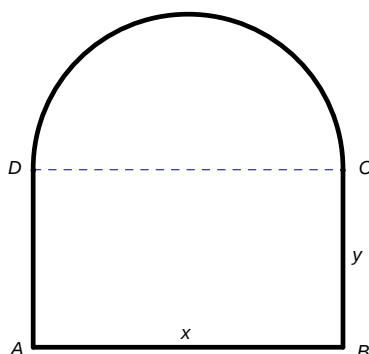
1. El área  $A$  de un cuadrado es función de su diagonal  $d$ . Si  $a$  es el lado, entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + a^2 = d^2, \quad \text{o sea:} \quad 2a^2 = d^2.$$

Pero  $a^2 = A$ , luego  $2A = d^2$ , es decir que  $A = d^2/2$ .

A pesar de que la función  $A = d^2/2$  tiene como dominio de definición  $\mathbb{R}$ , la función que interesa en el problema planteado tiene por dominio  $\{x : x > 0\}$ . (Pues la diagonal de un cuadrado es un número positivo.)

2. Consideremos la siguiente figura, donde el lado superior del rectángulo ha sido sustituido por una semicircunferencia de diámetro  $DC$ :



Supongamos que el perímetro de la figura es 10. Nos interesa expresar su área  $A$  en función de la base  $x$  de la figura. Llamamos  $y$  a la longitud de  $BC$ . Entonces:

$$A = x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \cdot y + \pi^2 \cdot x^2 / 8$$

Por otro lado, el perímetro de la figura es:

$$10 = 2 \cdot y + x + \pi \cdot x / 2.$$

Luego  $y = 5 - x \cdot (\frac{1}{2} + \pi / 4)$ . Reemplazando  $y$  en la expresión de  $A$ , obtenemos

$$A = \frac{x}{2} \cdot \left(10 - x \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad (*)$$

Nuevamente, el dominio de la función no es el dominio de definición de la expresión

$\frac{x}{2} \cdot \left(10 - x \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ , que es  $\mathbb{R}$ . Hay que observar que los valores de  $x$  deben ser, por una parte,

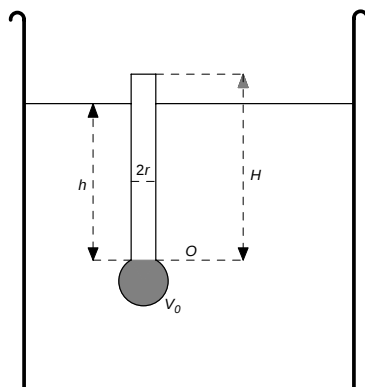
positivos y por otra, no tan grandes como para que sea imposible construir la figura. Veamos cuál es el mayor valor de  $x$ . Como vale que

$$10 = 2 \cdot y + x + \pi \cdot x / 2$$

y es  $y \geq 0$ , resulta que  $x + \pi \cdot x / 2 \leq 10$ , esto es:  $x \cdot (1 + \pi / 2) \leq 10$ , luego  $x \leq 10 / (1 + \pi / 2)$ .

Vemos así que el dominio de la función (\*) se restringe al intervalo  $(0, 10 / (1 + \pi / 2)]$ .

3. Un densímetro consiste en un tubo de vidrio de radio  $r$  y altura  $H$ , en uno de cuyos extremos se coloca un lastre de volumen  $V_0$ .  $r$ ,  $H$ ,  $V_0$  y el peso total  $P_0$  del densímetro son datos conocidos. Para medir la densidad  $\delta$  de un líquido, se hace flotar el densímetro y se observa la altura  $h$  desde la extremidad inferior  $O$  del tubo a la superficie del líquido. Suponiendo que las unidades de medida son el centímetro y el gramo, expresar  $d$  (en  $gr/cm^3$ ) en función de  $h$ .



El principio de Arquímedes dice que sobre un cuerpo sumergido en un líquido actúa un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del líquido desalojado. Como el densímetro está en equilibrio, su peso y el empuje son iguales. Luego, puesto que el volumen de la parte sumergida del densímetro es  $V_0 + \pi.r^2.h$  y por lo tanto el peso del líquido desplazado es  $(V_0 + \pi.r^2.h).\delta$ , se tiene que

$$P_0 = (V_0 + \pi.r^2.h).\delta.$$

De aquí se deduce que:

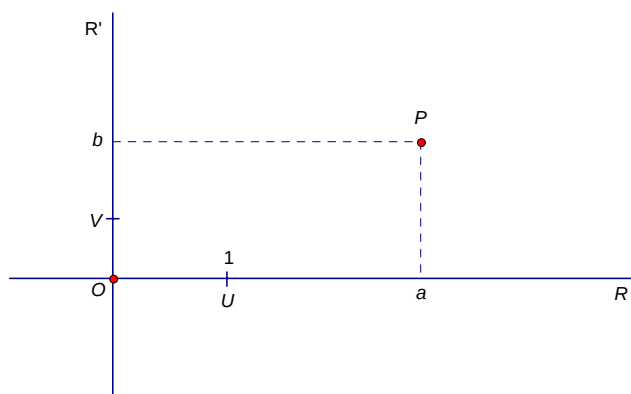
$$\delta = P_0 / (V_0 + \pi.r^2.h).$$

Se observa que el dominio de esta función es  $[0, H]$ .

Muchas veces, cuando se estudia un problema concreto, el dominio de la función está restringido, por las características particulares del problema, a un conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}$ . En cada caso hay que determinar cuidadosamente cuál es este dominio  $D$ , como se ha hecho en los tres ejemplos anteriores.

#### 4. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

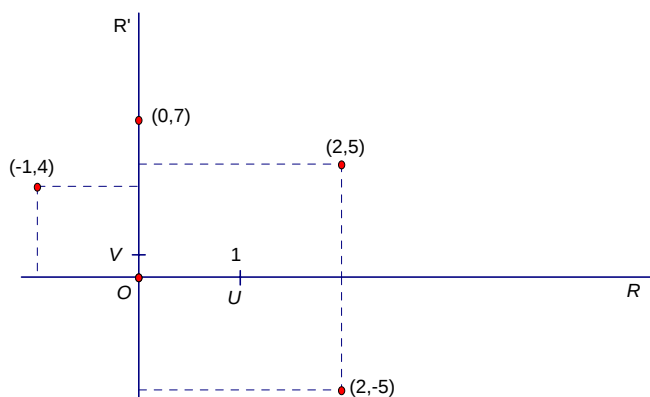
Consideremos dos rectas perpendiculares  $R$  y  $R'$  que se cortan en un punto  $O$ . Elegimos en cada una de ellas una unidad de medida, o sea, elegimos un punto  $U$  en una,  $V$  en la otra y a  $OU$  y  $OV$  como unidades de medida respectivas.



Si  $P$  es un punto del plano, trazando por  $P$  una paralela a  $R'$  obtenemos un punto de la recta  $R$ , de abscisa  $a$ . Llamaremos *abscisa* de  $P$  al número  $a$ .

Trazando por  $P$  una paralela a  $R$ , obtenemos un punto de  $R'$ , de abscisa real  $b$ ; a este número  $b$  lo llamaremos la *ordenada* de  $P$ . Diremos que  $a$  y  $b$  son las *coordenadas* del punto  $P$ . Es claro que para conocer un punto basta conocer sus coordenadas. Para decir que  $P$  tiene coordenadas  $a, b$  escribiremos  $P \equiv (a, b)$ .

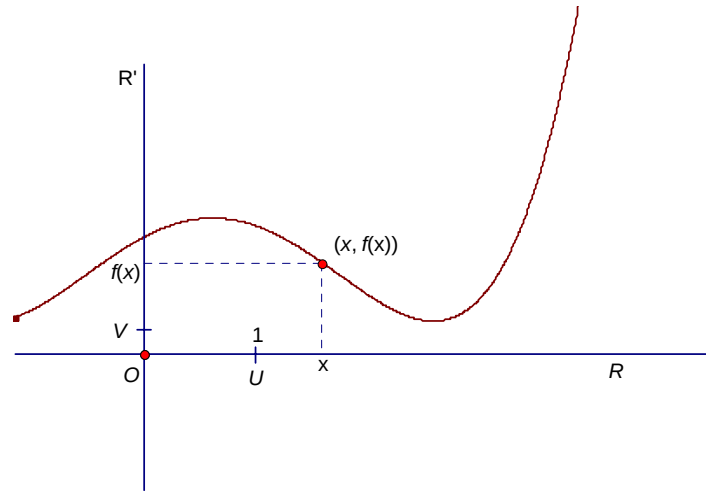
En la figura se indican los puntos de coordenadas  $(2,5)$ ;  $(-1,4)$ ;  $(0,7)$  y  $(2,-5)$ :



En este párrafo vamos a tratar solamente con funciones de dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$  y rango  $\mathbb{R}$

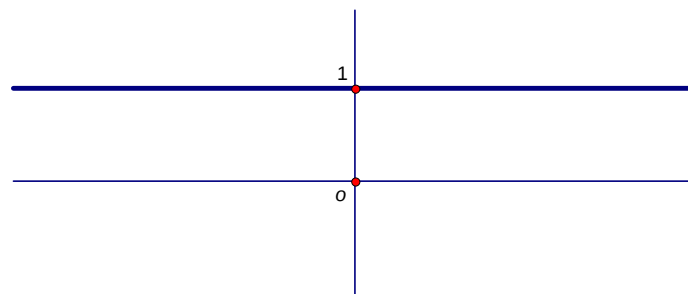
**Definición:** Dada  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *gráfico* de  $f$  al conjunto de puntos del plano, de coordenadas  $(x, f(x))$ , donde  $x \in D$ ; es decir  $\{(x, f(x)): x \in D\}$ .

El gráfico de  $f$  permite visualizar la correspondencia  $x \rightarrow f(x)$ , como se ve en la figura:



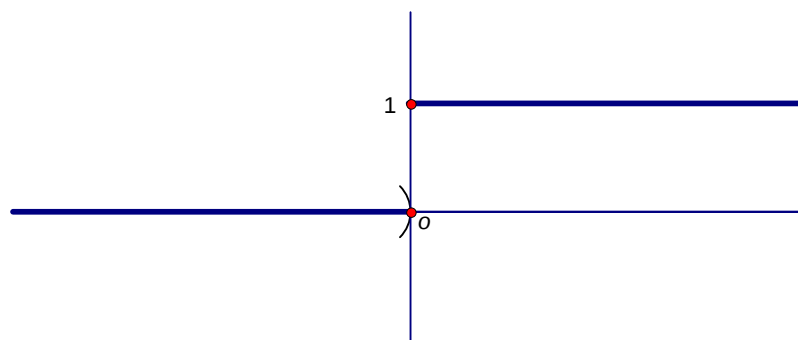
Veamos algunos ejemplos sencillos.

1.  $f(x) = 1$  para todo  $x$ :



2. Función de Heaviside (o función impulso)

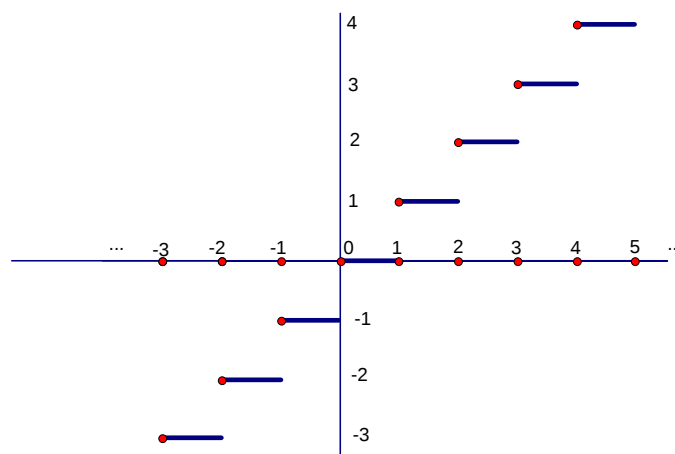
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



3. La *parte entera* de  $x$  es el mayor entero  $n$  tal que  $n \leq x$  y se escribe  $[x]$ .

Así:  $[1,40] = 1$ ,  $[0,37] = 0$ ,  $[-4,1] = -5$ .

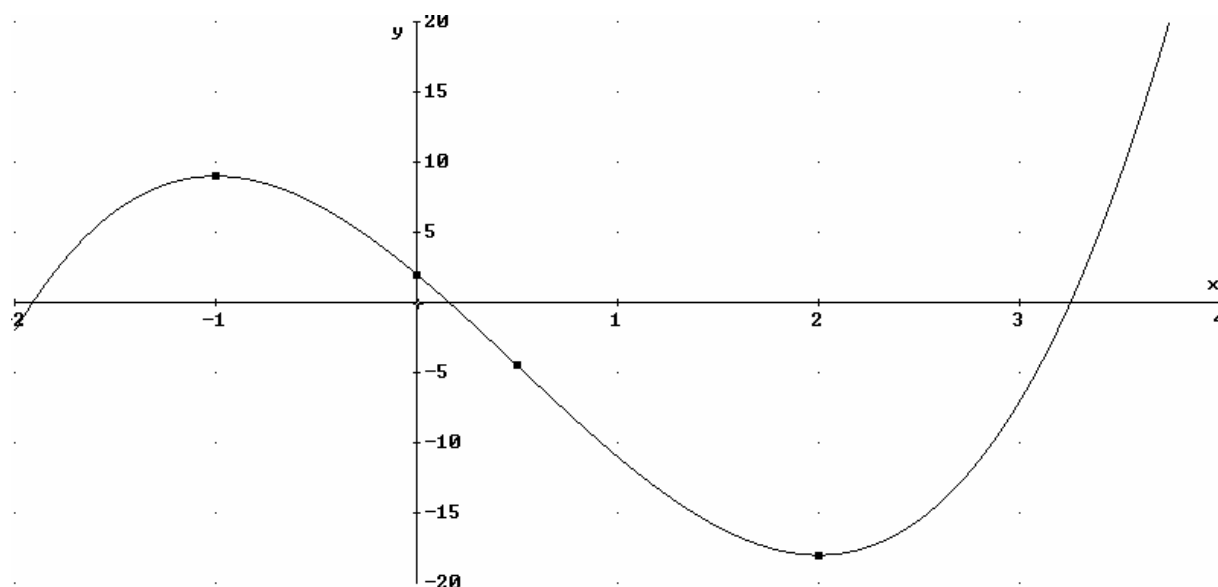
La representación gráfica de  $f(x) = [x]$  es:



Hemos indicado estos ejemplos por su simplicidad. Si la función a representar hubiese sido, por ejemplo,  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ , para obtener el gráfico de la función podríamos dar distintos valores a  $x$  y obtener los valores correspondientes de  $y$ . Para ello es cómodo hacer una tabla como la siguiente:

| $x$ | -1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2   | ... |
|-----|----|---|---------------|-----|-----|
| $y$ | 9  | 2 | $-9/2$        | -18 | ... |

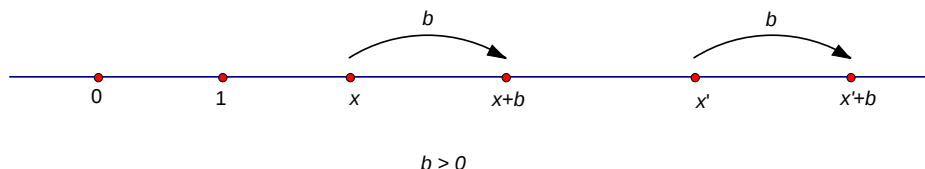
y representar los puntos obtenidos:



Es claro que con los cuatro valores que hemos dado a  $x$  no es posible darse cuenta que el gráfico es el que se ha indicado en la figura. Para ello será necesario indicar muchos más valores (o, como hemos hecho aquí, utilizar un programa de computación que nos permita obtener estos gráficos rápidamente). De este modo, podríamos tener una idea bastante precisa del gráfico de la función, digamos, sobre el intervalo  $(-4, 4]$ , pero no nos ayudará a responder a ciertos interrogantes muy simples, como por ejemplo: ¿corta el gráfico al eje de las  $x$  en otros puntos distintos de los que se observan en la figura? ¿continúa el gráfico en forma ascendente cuando  $x$  aumenta?. El estudio de funciones y sus gráficos tiende a responder a preguntas de este tipo, por lo menos en el caso de funciones relativamente sencillas, pero que aparecen con mucha frecuencia.

## 5. LA FUNCIÓN LINEAL.

Se llaman funciones lineales las de la forma  $y = a.x + b$ , donde  $a$  y  $b$  son números fijos. En particular cuando  $a = 0$  se obtienen las funciones constantes  $y = b$ . Si  $a = 1$  y  $b = 0$ , obtenemos la función  $y = x$ , que simplemente asigna a cada elemento  $x$  el mismo  $x$ . Si  $a = 1$ , obtenemos la función  $y = x + b$ , que puede interpretarse geométricamente como una traslación o desplazamiento de los puntos de la recta en la cantidad  $b$ :



En la figura se ha supuesto que  $b > 0$ . Si fuese  $b < 0$ , la traslación sería en sentido contrario.

Veamos algunos ejemplos donde aparece esta función:

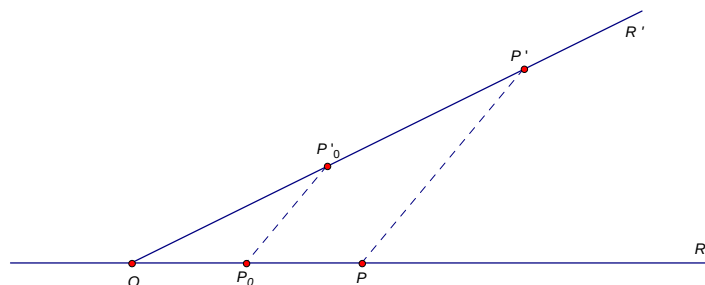
1. Para una sustancia homogénea, el peso  $P$  correspondiente a un volumen  $V$  es proporcional a  $V$ . Es decir, tenemos  $P = \delta.V$ , donde  $\delta$  es un número fijo, que corresponde al peso de una unidad de volumen. ( $\delta$  se denomina *densidad* o *peso específico*).
2. Para fabricar una llave se utiliza una cantidad  $a$  de hierro. Para fabricar  $x$  llaves del mismo tipo, la cantidad de hierro utilizada será  $y = a.x$ .
3. Un obrero puede pintar, en 3 minutos, un metro cuadrado de pared; manteniendo el ritmo y las condiciones de trabajo, para pintar  $x$  metros cuadrados tardará  $t = 3.x$  minutos.
4. Un bien homogéneo cuesta  $c$  pesos por unidad (Kg.,  $m^3$ ,  $Tm$ ) ¿Cuánto costarán  $x$  unidades del mismo? La respuesta es: costarán  $y = c.x$  pesos.
5. Para un móvil en movimiento rectilíneo uniforme, el espacio recorrido  $x$  es proporcional al tiempo empleado en recorrerlo:  $x = v.t$ , donde el factor de proporcionalidad  $v$  es la velocidad del móvil.
6. La proporcionalidad aparece también relacionada con cambios de unidades de medida. Si  $x$  e  $y$  son las medidas de una misma cantidad con respecto a dos unidades de medida, entonces  $y = k.x$ , donde  $k$  es un número fijo. Así, por ejemplo, si las unidades de medida son la tonelada y el kilogramo,  $x$  es la medida en toneladas e  $y$  la medida en kilogramos (del peso de un mismo objeto), se tiene que

$$y = 1000.x.$$

Elijamos ahora dos segmentos  $OU$  y  $OV$  como unidades de medida. Si la medida de un segmento  $AB$  en relación a  $OV$  es  $x$  y la medida de  $OV$  con relación a la unidad  $OU$  es  $k$ , entonces la medida  $y$  de  $AB$  con respecto a  $OU$  es  $y = k.x$ . (Ver el capítulo de propiedades de números reales).

7. La noción de semejanza de figuras geométricas está ligada con la proporcionalidad:

Sean  $R$  y  $R'$  dos rectas que se cortan en  $O$ ,  $P_0 \in R$  y  $P'_0 \in R'$ . Por un punto  $P$  cualquiera de  $R$  trazamos una paralela a  $P_0P'_0$ , que corta a la recta  $R'$  en  $P'$ .



Tenemos así definida una función que a la medida  $x$  del segmento  $\overline{OP}$  asocia la medida  $y$  del segmento  $\overline{PP'}$ . Los triángulos  $\triangle OP_0P'_0$  y  $\triangle OPP'$  son semejantes, o sea que sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{\text{long}(\overline{P'P})}{\text{long}(\overline{P'_0P_0})} = \frac{\text{long}(\overline{OP})}{\text{long}(\overline{OP_0})}, \quad \text{esto es:} \quad \text{long}(\overline{P'P}) = \frac{\text{long}(\overline{P'_0P_0})}{\text{long}(\overline{OP_0})} \cdot \text{long}(\overline{OP})$$

Si  $k = \frac{\text{long}(\overline{P'_0P_0})}{\text{long}(\overline{OP_0})}$ , la igualdad anterior se escribe  $y = k \cdot x$ .

En lo anterior se ha supuesto una unidad de medida fija, pero si, digamos,  $\overline{OP}$  es medido en una unidad diferente a la que usamos para medir  $\overline{PP'}$ , entonces, en lugar de  $x$  se obtendrá un número  $x' = a \cdot x$ , como vimos en el ejemplo 6. Tendremos así que:  $y = \frac{k}{a} \cdot x'$ , o sea que la proporcionalidad de las medidas de los segmentos  $\overline{OP}$  y  $\overline{PP'}$  se mantiene, aún cuando las unidades de medida sean diferentes.

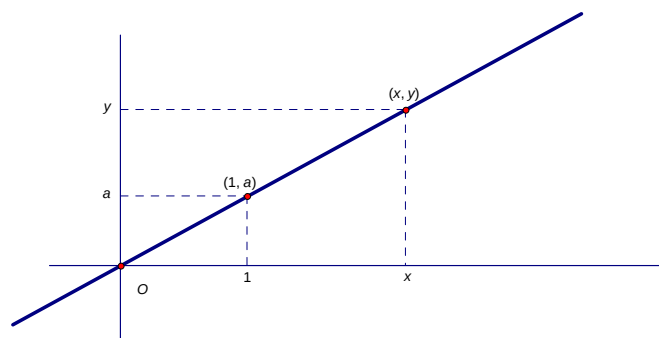
### GRÁFICO DE LA FUNCIÓN $y = a \cdot x$

Teniendo presente el ejemplo anterior es fácil ahora ver que el gráfico de la función  $y = a \cdot x$  es una recta que pasa por el origen  $O$  de coordenadas.

Estudiaremos el gráfico en el caso en que  $a > 0$ . El otro caso se obtiene fácilmente a partir de éste.

El origen  $(0,0)$  y el punto  $(1, a)$  son puntos del gráfico. Unamos estos puntos con una recta.

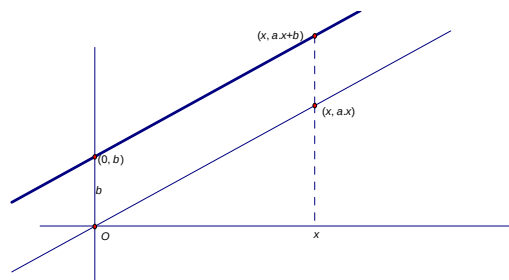
Si  $P \equiv (x, y)$  es un punto de la recta, sabemos que  $y/x = a/1$ , como ya vimos en el ejemplo 7, luego  $y = a \cdot x$ , lo que prueba que  $P \equiv (x, a \cdot x)$  y por lo tanto  $P$  está en el gráfico de la función  $y = a \cdot x$ .



Hemos hecho el razonamiento para el caso en que  $x$  y por lo tanto  $y$ , son positivos. Si  $x$  es negativo, se tendrá:  $(-y)/(-x) = a/1$  y se tiene nuevamente que  $y = a \cdot x$ .

### GRÁFICO DE LA FUNCIÓN LINEAL $y = a \cdot x + b$

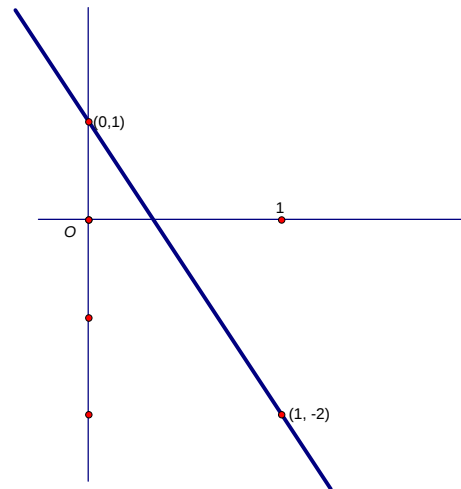
El gráfico es una recta paralela a la recta que es el gráfico de  $y = a \cdot x$ , obtenida de ésta por un desplazamiento en  $b$  (en la dirección del eje  $y$ )



En efecto,  $y = a \cdot x + b$  se obtiene sumando la cantidad constante  $b$  a  $a \cdot x$ , lo que geométricamente significa desplazar o trasladar el punto  $(x, a \cdot x)$  en la cantidad  $b$ , como se indica en la figura.

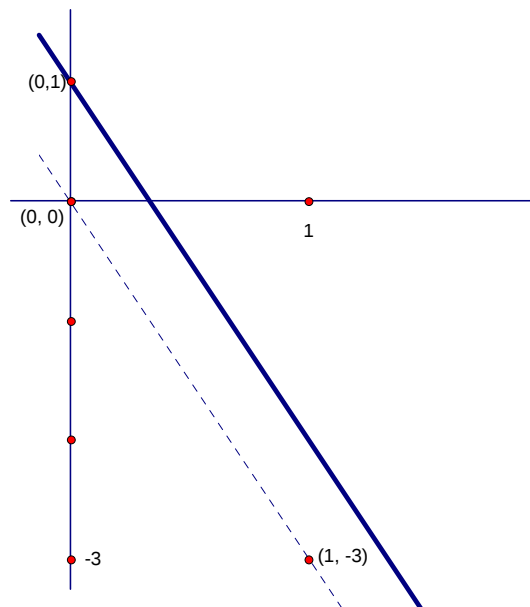
Dibujemos el gráfico de la función  $y = -3x + 1$ . Como el gráfico es una recta, por ser una función lineal, basta calcular la función para dos valores de  $x$ .

| $x$ | $y = -3x + 1$ |
|-----|---------------|
| 0   | 1             |
| 1   | -2            |



Otra manera de proceder, que muestra el significado geométrico del coeficiente de  $x$  ( $-3$  en este caso) es la siguiente:

Representamos primero  $y = -3x$ , que es la recta que pasa por el origen y por el punto  $(1, -3)$  y luego trazamos una paralela por el punto de coordenadas  $(0, 1)$ .



### PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES LINEALES.

Sean  $y = a \cdot x + b$ ,  $y' = a \cdot x' + b$ . Restando obtenemos:  $y - y' = a \cdot (x - x')$ .

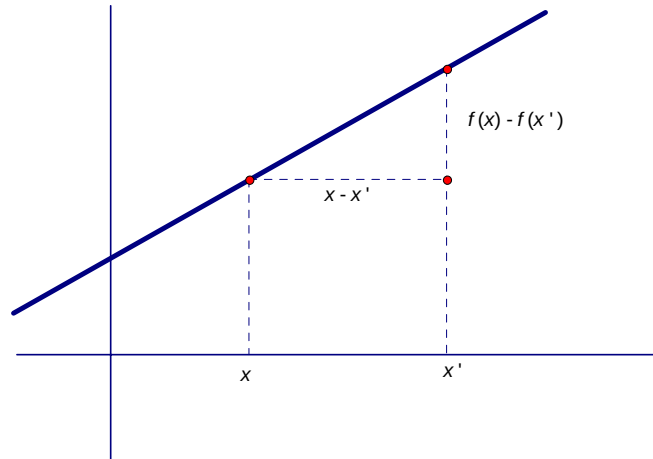
Es decir que, si  $f$  designa a la función definida por  $y = a \cdot x + b$ , entonces

$$f(x) - f(x') = a \cdot (x - x')$$

lo que expresa que **las diferencias  $x - x'$  y  $f(x) - f(x')$  son proporcionales**, es decir que el cociente  $(f(x) - f(x')) / (x - x')$  es constante, o sea:

$$(1) \quad \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = a$$

y entonces no depende de los números  $x$  y  $x'$  elegidos (siempre que  $x \neq x'$ ).



Recíprocamente, **si para una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es  $f(x) - f(x') = a \cdot (x - x')$ , la función es lineal.**

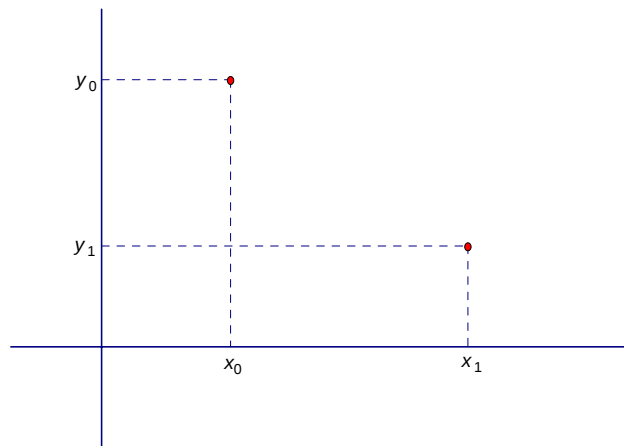
En efecto, tomando  $x' = 0$  se tiene que:  $f(x) - f(0) = a \cdot (x - 0)$ , o sea:

$$f(x) = a \cdot x + f(0) = a \cdot x + b,$$

donde se ha puesto  $b = f(0)$ .

Relacionado con esto se plantea el siguiente problema: dados  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , con  $x_0 \neq x_1$ , determinar una función lineal  $f$  tal que  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x_1) = y_1$ .

El gráfico de la función buscada será precisamente la recta que pasa por los puntos de coordenadas  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ .



Si  $y = f(x) = a \cdot x + b$  es la función buscada, debe verificarse que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

dado que las diferencias de dos valores de  $x$  y los correspondientes valores de  $y = f(x)$  son proporcionales, como ya vimos en (1).

Basta despejar  $y$  en la ecuación anterior para obtener la función lineal buscada:

$$(2) \quad y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

que cumple las condiciones requeridas. En efecto, para  $x = x_0$  se obtiene  $y = y_0$  y para  $x = x_1$  se obtiene

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + y_1 - y_0 = y_1$$

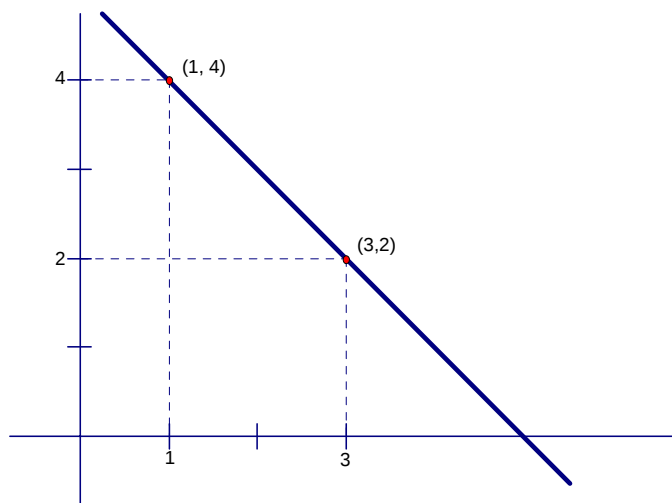
Veamos un ejemplo. Determinemos la función lineal  $f$  tal que  $f(1) = 4$  y  $f(3) = 2$ .

Aplicando (2):

$$y = 4 + \left( \frac{2-4}{3-1} \right) \cdot (x-1)$$

$$y = 4 + \left( \frac{-2}{2} \right) \cdot (x-1)$$

$$y = -x + 5$$



Si en lugar de dar los valores de la función en dos puntos  $x_0, x_1$ , se dan:  $y_0 = f(x_0)$  y el coeficiente  $a$  de  $x$ , la función es

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

que puede obtenerse directamente de

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

o sustituyendo  $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$  por  $a$  en (2).

**EJEMPLO:** Supongamos que un punto móvil  $P$  se desplaza sobre el eje  $x$  con velocidad constante  $v > 0$  y que en el instante  $t_0$  tiene abscisa  $x_0$ . Entonces la ley de movimiento, es decir, la función que expresa la abscisa  $x$  del punto en el instante  $t$  está dada por

$$x = v \cdot (t - t_0) + x_0;$$

puesto que como vimos en el ejemplo 5, el espacio recorrido  $x - x_0$  y el tiempo  $t - t_0$  tardado en recorrerlo son proporcionales:  $x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$ .

**EJERCICIO.** Determinar la abscisa  $x$  del móvil con los siguientes datos:

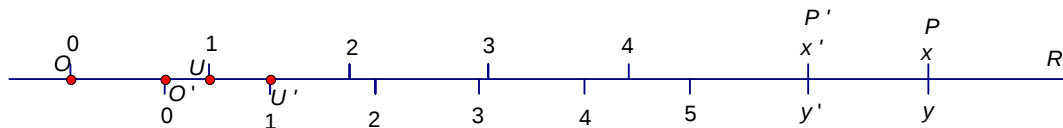
$$1) \quad v = 30, \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 5.$$

$$2) \quad x_0 = 5, \quad t_0 = 1, \quad x_1 = 7, \quad t_1 = 2.$$

Determinar también  $v$  en el segundo ejemplo.

## RELACIÓN ENTRE DOS ESCALAS.

Supongamos que tenemos sobre una misma recta  $R$  dos sistemas de abscisas o escalas, esto es: hemos fijado en  $R$  un origen  $O$  y un punto  $U$  y considerado a  $OU$  como unidad de medida y asimismo hemos fijado otro origen  $O'$  y otro punto  $U'$ . Si  $x$  e  $y$  son las abscisas de un mismo punto  $P \in R$  en el primer y segundo sistema, respectivamente, veamos que  $y = a \cdot x + b$ .



Si las abscisas de otro punto  $P'$  son  $x', y'$ , las medidas del segmento  $\overline{P'P}$  son  $x - x'$  e  $y - y'$  con respecto a las unidades  $OU$  y  $O'U'$  respectivamente. Luego, por lo que vimos en el ejemplo 6, se tiene:

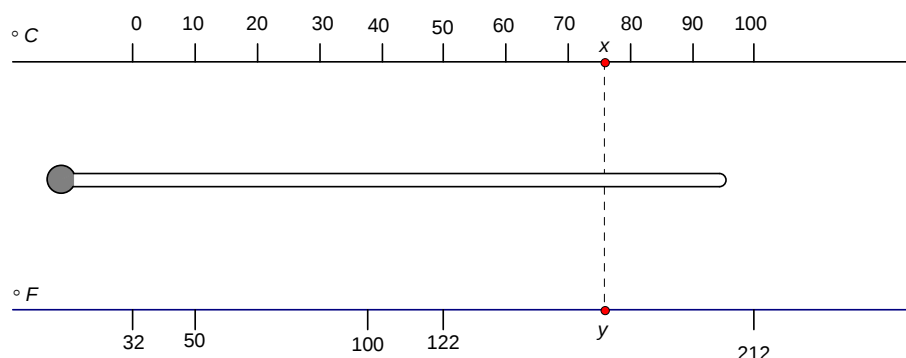
$$y - y' = k \cdot (x - x')$$

Esto quiere decir que la función que hace corresponder a la abscisa  $x$  de un punto  $P$  en el primer sistema su abscisa  $y$  en el segundo, es lineal.

La deducción anterior se ha hecho bajo la hipótesis que  $OU$  y  $O'U'$  están dirigidos en un mismo sentido, como en la figura. Es fácil ver que si están dirigidos en sentido contrario la relación obtenida sigue siendo válida, pero  $k$  será un número negativo.

**EJEMPLO:** Comparemos las escalas Centígrada y Fahrenheit de un termómetro. Como se sabe, puesto el termómetro en hielo indicará 0 sobre la escala Centígrada y 32 sobre la escala Fahrenheit. En agua hirviendo (a presión normal) indicará 100 en la escala Centígrada y 212 en la escala Fahrenheit.

El problema de determinar la temperatura  $y$  en grados Fahrenheit, conocida la temperatura  $x$  en grados Centígrados se reduce al problema anterior (recordando que la separación entre marcas consecutivas de cada escala es la misma).



Entonces  $y = a.x + b$ . Dado que la función  $x \rightarrow y$  es lineal y que conocemos sus valores para  $x_0=0$  y  $x_1=100$ , que son  $y_0=32$ ,  $y_1=212$ , tendremos que, según hemos visto antes:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

o sea:

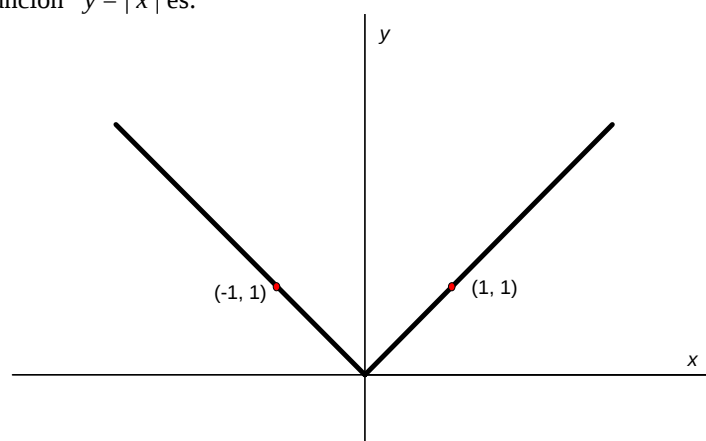
$$y = 32 + \frac{212 - 32}{100 - 0} \cdot (x - 0)$$

$$y = 32 + 1,8 \cdot x$$

Obtenemos así la fórmula de conversión de grados Centígrados ( $x$ ) a grados Fahrenheit ( $y$ ).

## 6. LA FUNCIÓN “VALOR ABSOLUTO”.

El gráfico de la función  $y = |x|$  es:



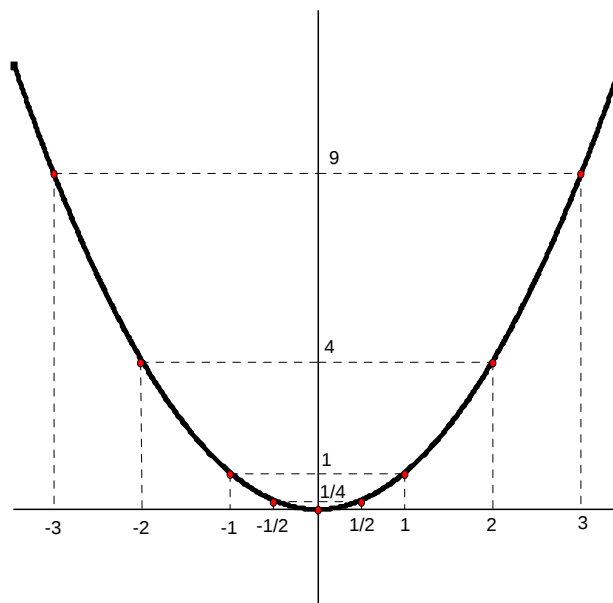
Por definición de  $|x|$ :

a) si  $x \geq 0$ ,  $|x| = x$ , luego el gráfico de  $|x|$  coincide con el gráfico de la función  $y = x$  sobre  $[0, +\infty)$  y es entonces la semirrecta de origen  $(0,0)$  que contiene al punto  $(1,1)$ .

b) si  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  y entonces, sobre  $(-\infty, 0]$  el gráfico de  $|x|$  coincide con el de la función (lineal)  $y = -x$ , que es la semirrecta de origen  $(0,0)$  que pasa por  $(-1, 1)$ .

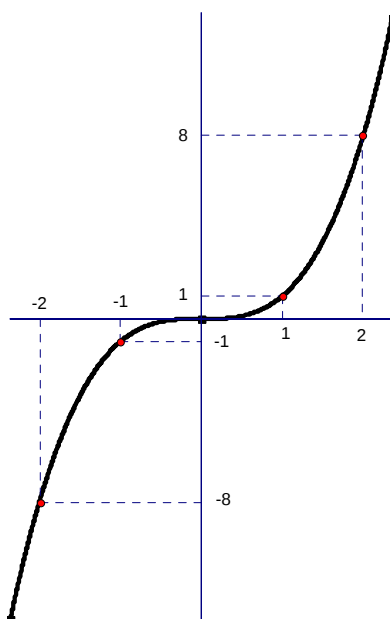
## 7. LAS FUNCIONES $y = x^n$ , $n \in \mathbb{N}$ .

1) La función  $y = x^2$  tiene un gráfico como el de la figura:



Por ahora diremos solamente que como los valores  $x^2$  de esta función son mayores o iguales que 0, el gráfico está sobre el eje  $x$  y toca a ese eje sólo en el punto  $(0,0)$ .

2) La función  $y = x^3$  tiene un gráfico así:

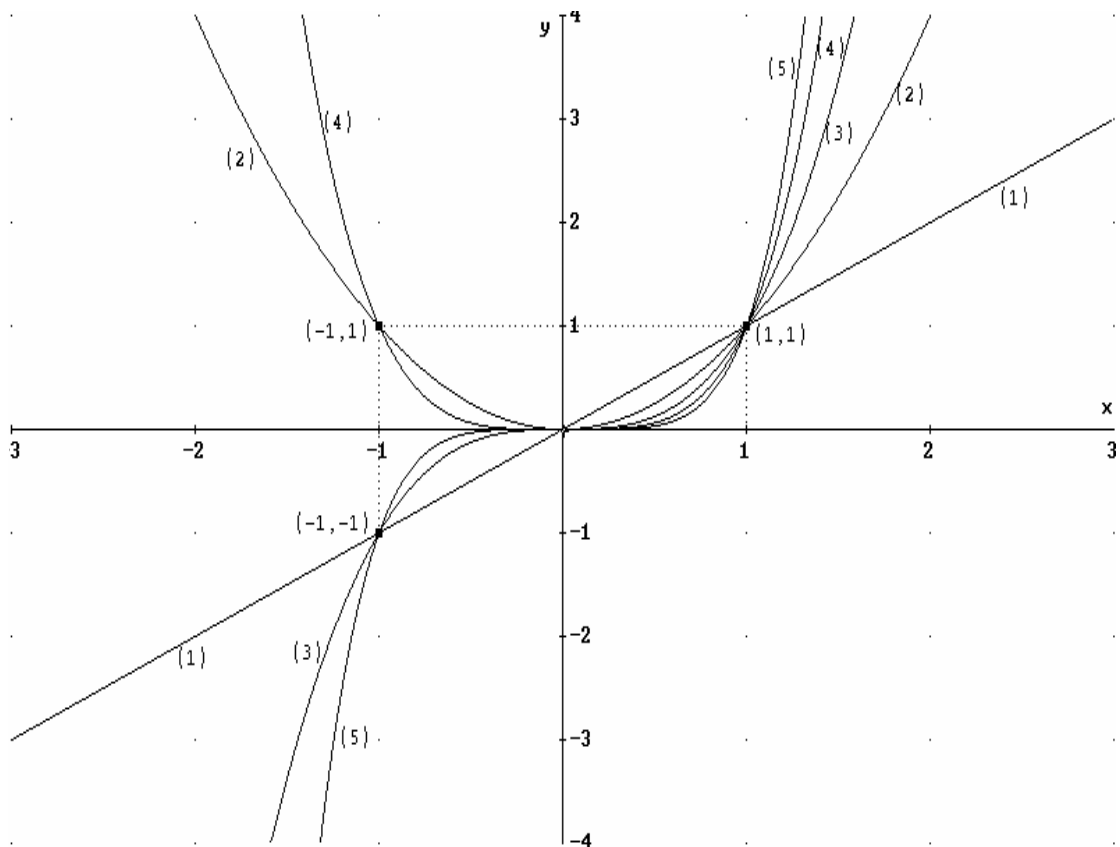


El gráfico está sobre el eje  $x$  para los valores de  $x$  en  $(0, +\infty)$ , corta al eje en  $(0,0)$  y está debajo del eje  $x$  para los valores de  $x$  en  $(-\infty, 0)$ , debido a que  $x^3$  es mayor, igual o menor que cero según que  $x$  sea mayor, igual o menor que cero.

Es fácil comprender que el gráfico de  $y = x^n$  con  $n$  par ( $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ ) se parece al gráfico de  $y = x^2$  y que para  $n$  impar el gráfico de  $y = x^n$  se asemeja al de  $y = x^3$ .

Representemos gráficamente las funciones  $y = x^n$  para algunos valores de  $n \in \mathbb{N}$ , con el objeto de comparar los gráficos respectivos.

Los números ( $n$ ) entre paréntesis indican que se trata de la función  $y = x^n$ .

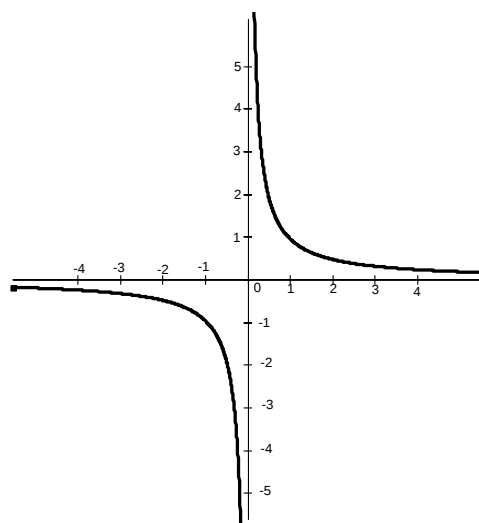


Observamos que:

- 1) Todos los gráficos contienen a los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$ .
- 2) Si  $n$  es par,  $(-1,1)$  pertenece al gráfico de  $x^n$ .  
Si  $n$  es impar,  $(-1,-1)$  pertenece al gráfico de  $x^n$ .
- 3) En el intervalo  $(0,1)$  el gráfico de  $y = x^n$  está por arriba del de  $y = x^{n+1}$ , ya que si  $0 < x < 1$ , entonces  $x^{n+1} < x^n$ . (Ver "Números reales y propiedades")
- 4) En el intervalo  $(1, +\infty)$ , el gráfico de  $y = x^n$  está por debajo de  $y = x^{n+1}$ , ya que si  $x > 1$ , se tiene que  $x^{n+1} > x^n$ .

### LA FUNCIÓN $y = 1/x$ .

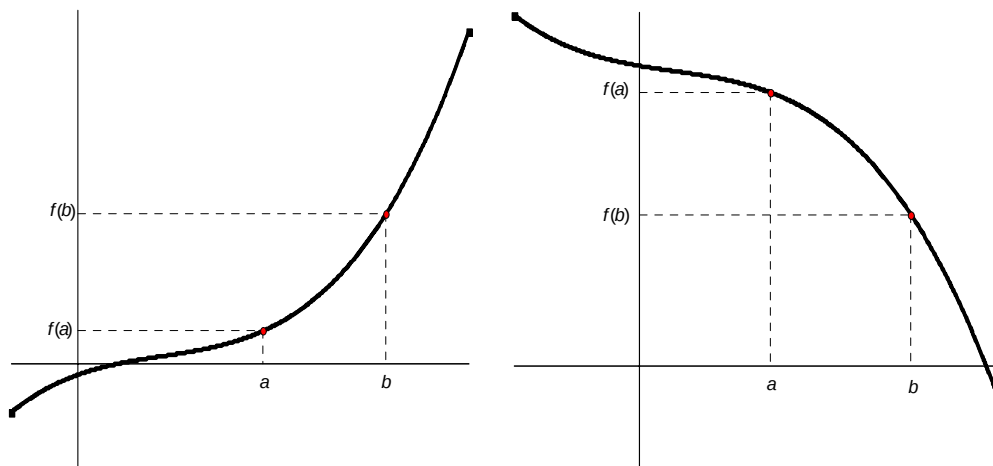
Su gráfico es:



Dejamos al lector el trazado de los gráficos de  $y = 1/x^2$ ,  $y = 1/x^3$  y hacer un diagrama comparativo de los mismos como se ha hecho en el caso anterior.

## CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

**Definición:** Una función  $f$  se dice **creciente** en un subconjunto  $A$  de su dominio si cualesquiera que sean  $a, b \in A$ :  $a < b$  implica  $f(a) < f(b)$ ;  $f$  se dice **decreciente** en  $A$  si  $a < b$  implica  $f(a) > f(b)$ . Se dice que  $f$  es **creciente** si es creciente en todo su dominio. Análoga definición para **función decreciente**.



## EJEMPLOS.

1) La función lineal  $y = a \cdot x + b$  es creciente si  $a > 0$  y es decreciente si  $a < 0$ . Analicemos la primera afirmación:

Si  $x_0 < x_1$ , entonces, como  $a > 0$ ,  $a \cdot x_0 < a \cdot x_1$ , luego  $a \cdot x_0 + b < a \cdot x_1 + b$ .

2) La función  $|x|$  es creciente en  $[0, +\infty)$ , decreciente en  $(-\infty, 0]$ . Esto resulta de lo anterior pues en  $[0, +\infty)$ ,  $|x| = x$  y en  $(-\infty, 0]$ ,  $|x| = -x$ .

3) La función  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es creciente en  $[0, +\infty)$ ; en efecto,  $0 < x_0 < x_1$  implica  $x_0^n < x_1^n$ . (Ver "Números reales, propiedades")

Si  $n$  es par, la función  $y = x^n$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$ . En efecto:

$$x_0 < x_1 \leq 0 \Rightarrow -x_0 > -x_1 \geq 0$$

luego

$$x_0^n = (-x_0)^n > (-x_1)^n = x_1^n \quad (\text{ya que } n \text{ es par}).$$

Si  $n$  es impar, la función  $y = x^n$  es creciente en  $(-\infty, 0]$ . En efecto:

$$x_0 < x_1 \leq 0 \Rightarrow -x_0 > -x_1 \geq 0$$

luego

$$-x_0^n = (-x_0)^n > (-x_1)^n = -x_1^n \quad (\text{ya que } n \text{ es impar}),$$

por lo tanto  $x_0^n < x_1^n$ .

Se concluye entonces que si  $n$  es impar, la función  $y = x^n$  es creciente.

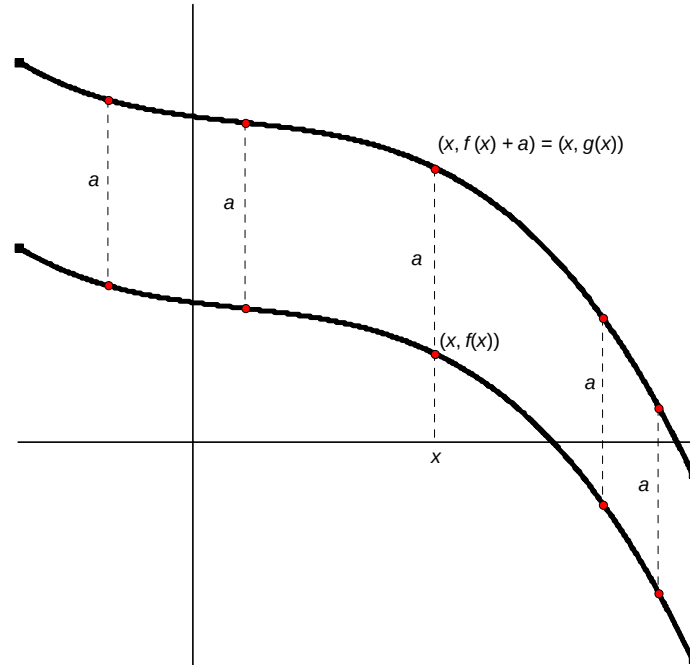
4)  $y = 1/x$ . Veamos primero que  $y = 1/x$  es decreciente en  $(0, +\infty)$ : de  $0 < a < b$  resulta que  $1/b < 1/a$ . (Ver "Números reales, propiedades").

Estudiemos ahora  $y = 1/x$  en  $(-\infty, 0)$ : Si  $a < b < 0$ , entonces  $-a > -b > 0$ . Luego  $1/(-b) > 1/(-a)$  y de aquí resulta que  $1/b > 1/a$ .

Vemos así que  $y = 1/x$  es decreciente también en  $(-\infty, 0)$ . No obstante, se debe notar que  $y = 1/x$  no es decreciente en todo su dominio  $\mathbb{R} - \{0\}$  pues, por ejemplo:  $-2 < 2$  y  $1/(-2) < 1/2$ .

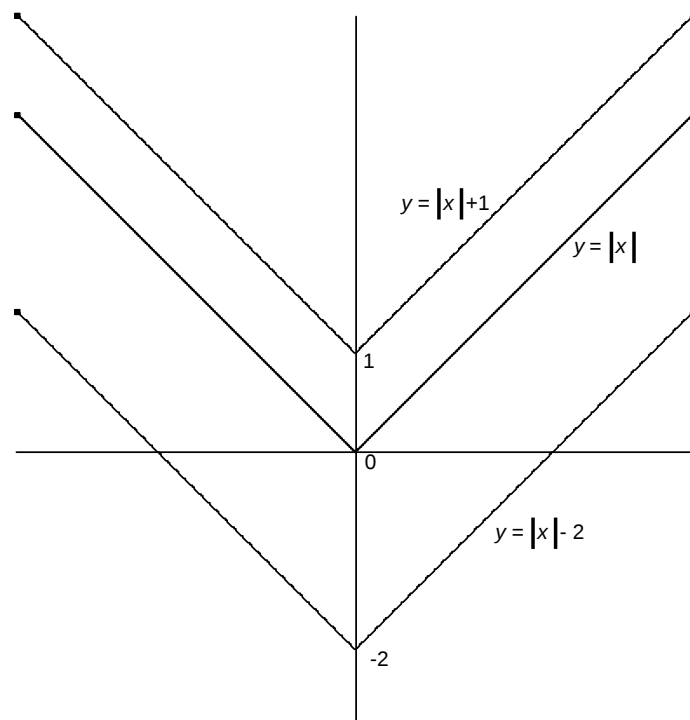
## 10. NOCIONES ÚTILES PARA EL TRAZADO DE GRÁFICOS.

Dada una función  $y = f(x)$ , consideremos la función  $g(x) = f(x) + a$ , donde  $a$  es una constante. Comparemos los gráficos de  $f$  y  $g$ :

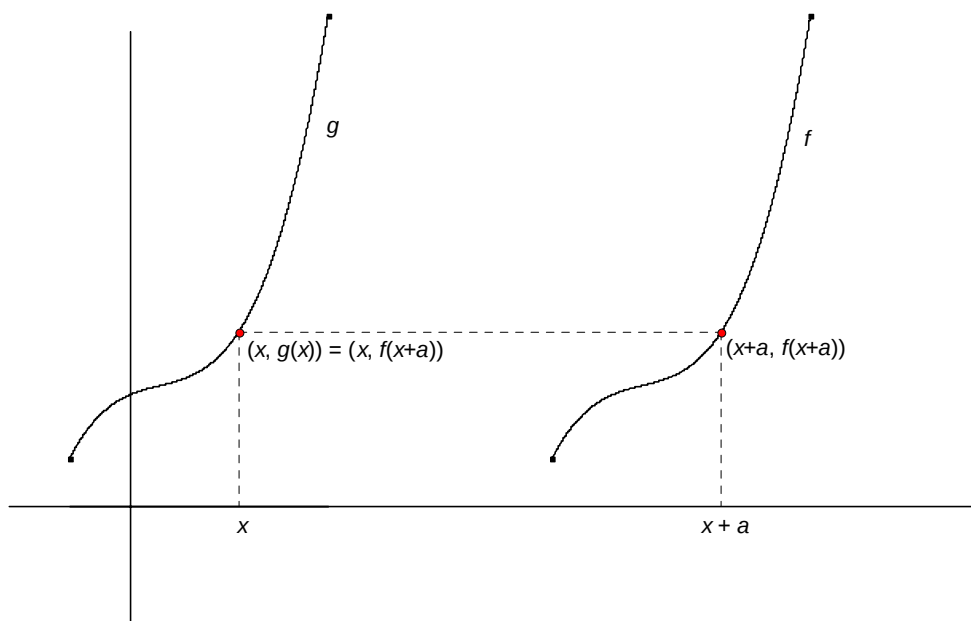


En el caso de la figura  $a$  es un número mayor que cero. El gráfico de  $g$  se obtiene desplazando el de  $f$  en la cantidad  $a$  en el sentido positivo del eje  $y$ .

En la siguiente figura, junto con el gráfico de  $y = |x|$ , se han trazado los de  $y = |x| + 1$ ,  $y = |x| - 2$ .

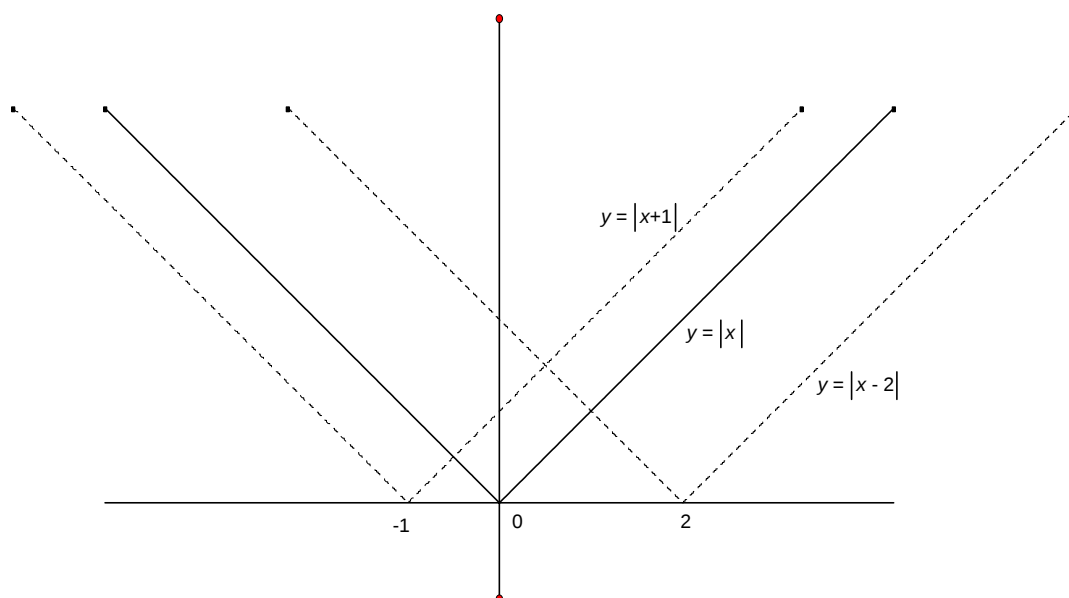


b) Dada la función  $y = f(x)$ , consideremos la función  $g(x) = f(x + a)$ . Comparemos los gráficos de  $f$  y  $g$ .



Se observa que desplazando el punto  $(x, g(x))$  en la cantidad  $a$  en la dirección del eje  $x$  se obtiene el punto  $(x+a, f(x+a))$  ( $f(x+a) = g(x)$ ), del gráfico de  $f$ . Así el gráfico de  $f$  es obtenido desplazando en la dirección del eje de las  $x$  en la cantidad  $a$  el gráfico de  $g$ . Por lo tanto, el gráfico de  $g$  se obtiene desplazando el de  $f$  en sentido contrario, en la cantidad  $a$ .

Comparemos ahora los gráficos de  $y = |x|$ ,  $y = |x+1|$ ,  $y = |x-2|$ .

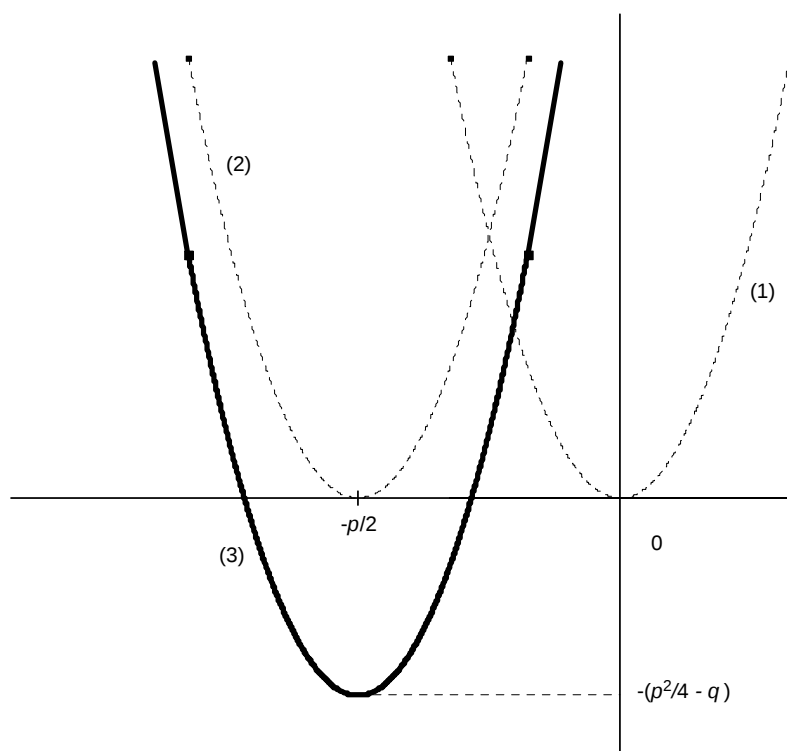


### GRÁFICO DE LA FUNCIÓN $y = x^2 + p \cdot x + q$ .

Como una aplicación de lo anterior estudiaremos el gráfico de esta función.

$$y = x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

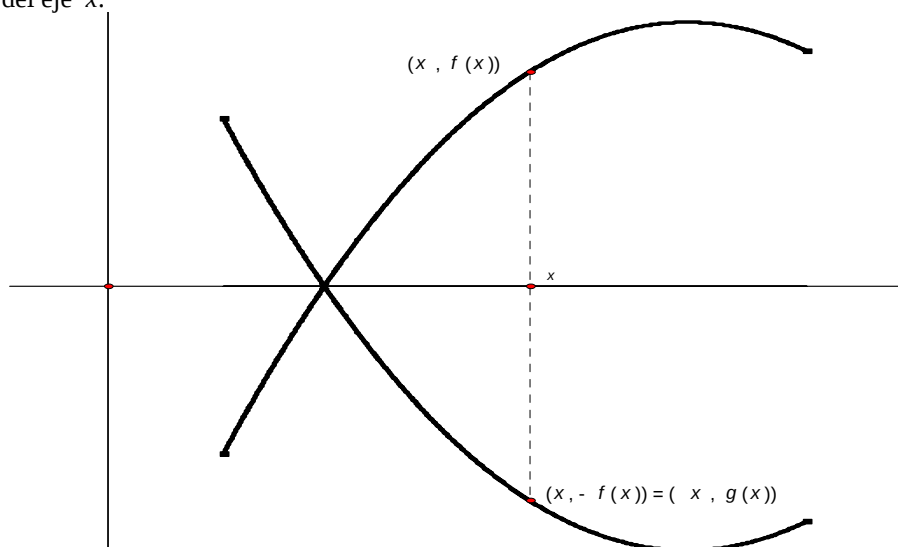
(Ver “Números reales, propiedades”).



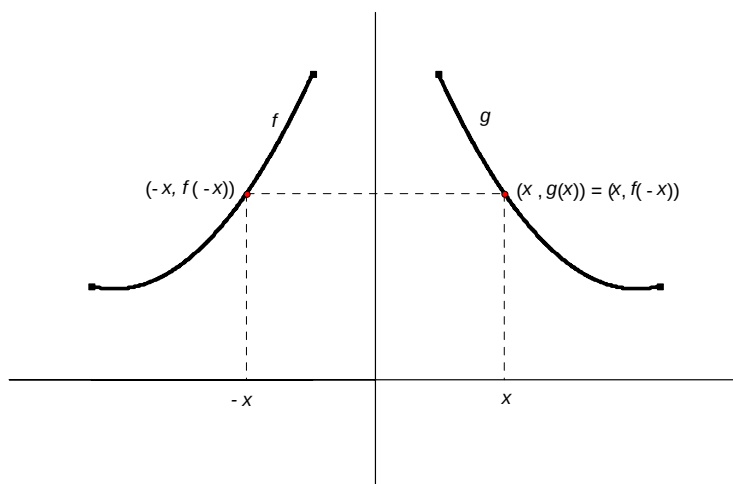
Primero hemos trazado el gráfico **(1)** de  $f(x) = x^2$ , luego el gráfico **(2)** de  $g(x) = f(x + p/2) = (x + p/2)^2$  y por último, el gráfico **(3)** de  $h(x) = g(x) - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = x^2 + p \cdot x + q$ .

Se observa que el valor mínimo de  $y = x^2 + p \cdot x + q$  se obtiene para  $x_m = -p/2$  y es el valor  $y_m = -(p^2/4 - q)$ , lo que ya vimos al estudiar las propiedades de números reales.

c) Dada la función  $y = f(x)$ , el gráfico de la función  $g(x) = -f(x)$  es el simétrico del gráfico de  $f$  respecto del eje  $x$ :



d) Si  $y = f(x)$ , el gráfico de  $g(x) = f(-x)$  es simétrico del de  $f$  respecto del eje  $y$ :



**EJERCICIO.** Representar gráficamente la función  $y = \frac{3x+2}{2-x}$ .

Dividiendo:

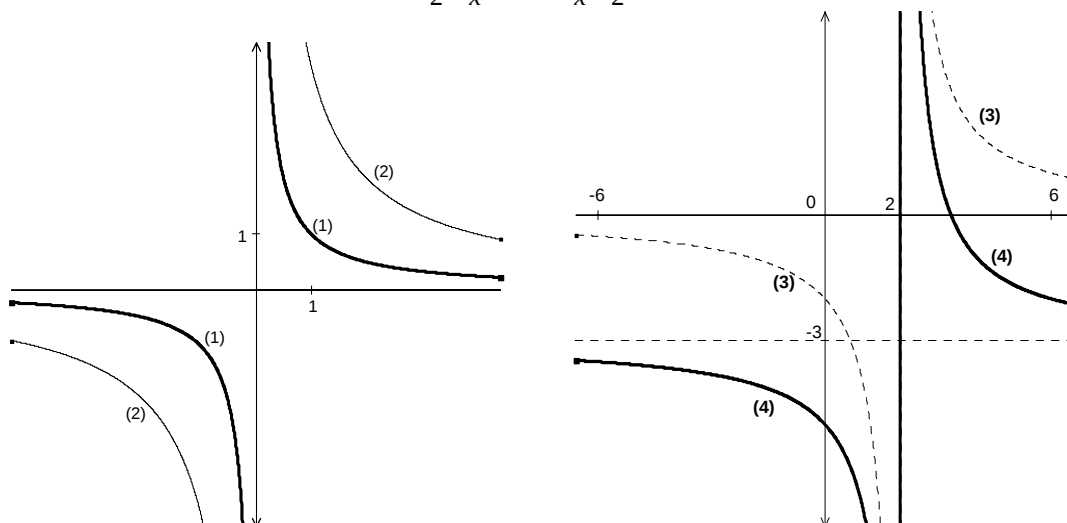
$$\begin{array}{r} 3x+2 \quad | \quad 2-x \\ -3x-6 \quad -3 \\ \hline -4 \end{array}$$

Tenemos entonces que:

$$3x+2 = -3(-x+2) + (-4)$$

Luego:

$$\frac{3x+2}{2-x} = -3 + \frac{4}{x-2}$$



Partimos del gráfico **(1)** de la función  $y = 1/x$ . **(2)** es el gráfico de  $y = 4/x$ , obtenido del anterior cuadruplicando las ordenadas. **(3)** es el gráfico de  $y = 4/(x-2)$ . Finalmente, desplazando este último hacia abajo en 3 unidades obtenemos **(4)**, que es el gráfico de la función

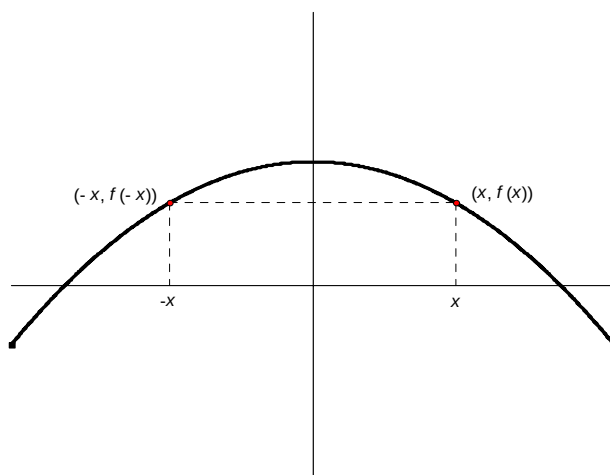
$$y = \frac{3x+2}{2-x} = -3 + \frac{4}{x-2}.$$

## 11. PARIDAD.

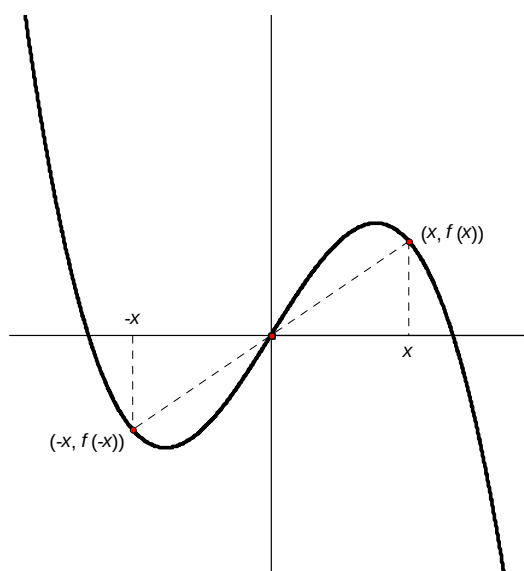
**Definición.** Una función  $f$  se dice *par* si  $f(x) = f(-x)$  para cualquier  $x$  de su dominio.  $f$  se dice *impar* si  $f(x) = -f(-x)$  para cualquier  $x$  de su dominio.

[Observación: Se está suponiendo aquí que tanto  $x$  como  $-x$  pertenecen al dominio de  $f$ , es decir que dicho dominio es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que está dispuesto en forma simétrica alrededor del origen 0.]

El gráfico de una función par es simétrico respecto del eje  $y$ .



El gráfico de una función impar es simétrico respecto del origen.



Es útil conocer si una función es par o impar para trazar su gráfico pues basta dibujar el gráfico sobre el intervalo  $[0, +\infty)$ , el resto se hará por simetría. Observe que las funciones  $y = x^n$  son pares o impares según que  $n$  sea par o impar.

## 12. OPERACIONES ENTRE FUNCIONES.

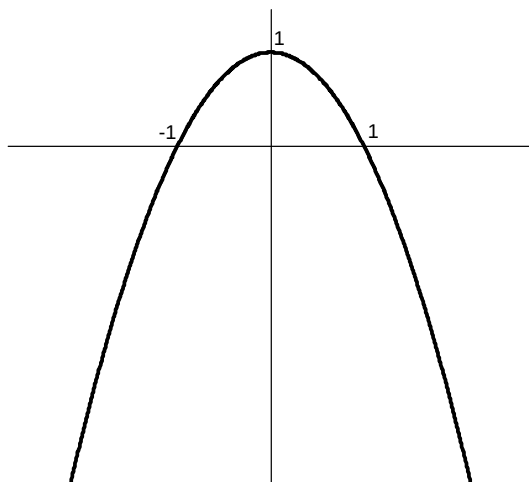
Definición. Dadas  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos:

- 1) La *suma* de las funciones  $f$  y  $g$  es la función  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = f(x) + g(x)$  para cada  $x \in D$ .
- 2) La *diferencia* de las funciones  $f$  y  $g$  es la función  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = f(x) - g(x)$  para cada  $x \in D$ .
- 3) El *producto* de las funciones  $f$  y  $g$  es la función  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  para cada  $x \in D$ .
- 4) El *cociente* de las funciones  $f$  y  $g$  es la función  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = f(x) / g(x)$  para cada  $x \in D$ . Aquí se supone que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in D$ .

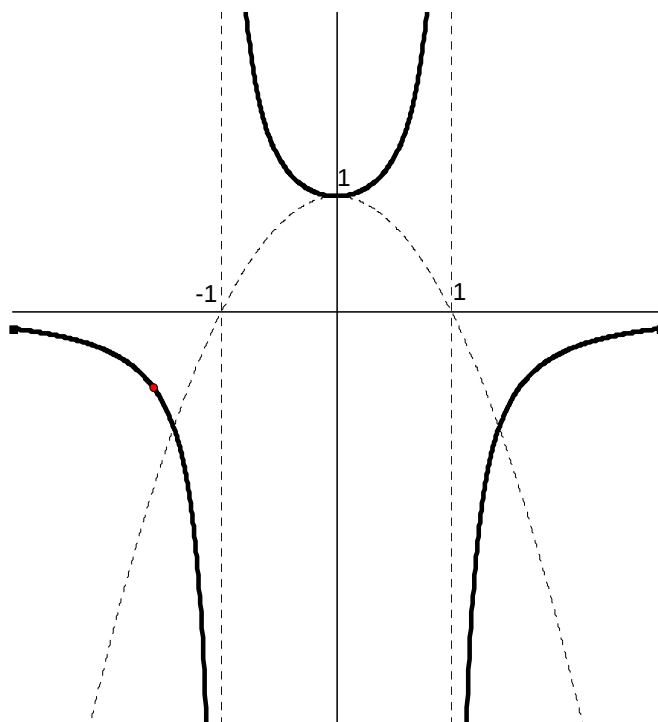
A veces, se usan las notaciones  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  para denotar las funciones definidas anteriormente.

Por ejemplo, la función  $y = \frac{x^2}{1+x} + 3x$  es suma de las funciones  $y = \frac{x^2}{1+x}$  e  $y = 3x$ . A su vez, la primera de estas funciones es el cociente de las funciones  $y = x^2$  e  $y = 1+x$ . Todavía más: la función  $y = x^2$  es el producto de la función  $y = x$  por sí misma. Este análisis o descomposición de una función en términos de funciones más simples tiene importancia teórica y práctica.

**EJEMPLO 1.** Tracemos el gráfico de  $y = 1/(1-x^2)$ . Ya sabemos cómo obtener el gráfico de la función  $y = g(x) = 1-x^2$  a partir del de  $y = x^2$ :



Tener a la vista el gráfico de esta función nos ayuda a dibujar el gráfico de la función  $y = 1/(1-x^2) = 1/g(x)$ .

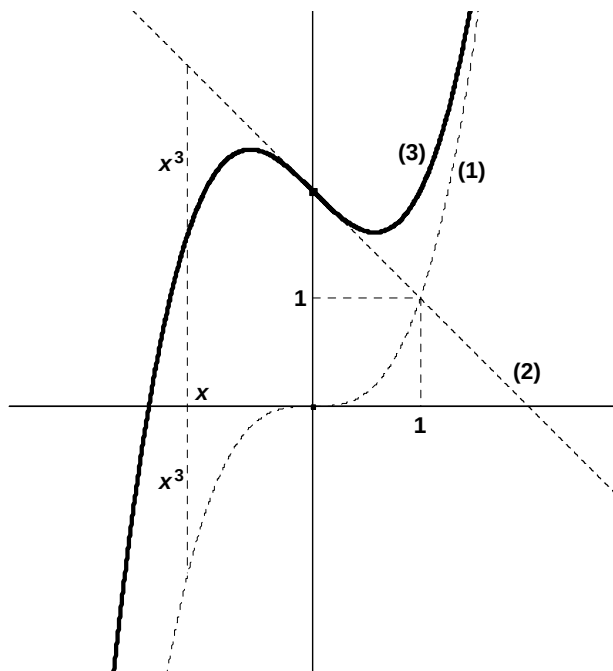


Es claro que en el segmento  $(-1,1)$  el gráfico está por arriba del eje  $x$  pues el gráfico de  $1-x^2$  también lo está. Lo contrario ocurre fuera de  $[-1,1]$ .  $f(0) = 1$  y si  $x$  aumenta ( $0 < x < 1$ ) los valores correspondientes de  $g(x)$  disminuyen, luego los valores de  $f(x) = 1/g(x)$  aumentan si  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda,  $g(x)$  se aproxima a cero y por lo tanto los valores de  $f = 1/g$  se hacen más y más grandes.

A la derecha de  $x = 1$ , los valores de  $g$  son negativos y van disminuyendo a medida que  $x$  aumenta. Luego los valores de  $f(x) = 1/g(x)$  son negativos y crecen cuando  $x$  crece.

Si  $x$  es grande,  $f(x)$  es pequeño; si  $x$  está muy próximo a 1 y  $x > 1$ ,  $f(x)$  es negativo y grande (en valor absoluto). Esto explica el trazado del gráfico de  $f$  en  $[0, +\infty)$ ; como la función es par su gráfico es simétrico con respecto al eje  $y$ .

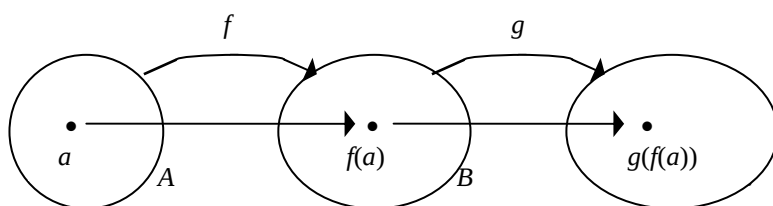
**EJEMPLO 2.** Tracemos el gráfico de  $y = x^3 - x + 2$ . Esta función puede ser considerada como la suma de las funciones  $y = f(x) = x^3$  e  $y = g(x) = -x + 2$ , cuyos gráficos son (1) y (2):



Para obtener el gráfico (3) de la función dada consideramos el gráfico (2) de  $y = -x + 2$  y para cada  $x$  adicionamos a la ordenada  $y$  la ordenada  $x^3$  correspondiente, del gráfico (1).

### 13. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  conjuntos cualesquiera y  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  dos funciones. Con estas funciones está asociada de manera natural una función  $h: A \rightarrow C$ , definida por  $h(a) = g(f(a))$ , para cada  $a \in A$ .  $h$  se llama la *composición de  $f$  y  $g$*  y se suele escribir  $h = g \circ f$ .



#### EJEMPLOS.

1) Si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{0, 1, 2\}$  y  $f$  y  $g$  son las funciones definidas por

|        |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|
| $x$    | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | a | a | b | b |

|        |   |   |   |
|--------|---|---|---|
| $x$    | a | b | c |
| $g(x)$ | 2 | 1 | 0 |

Entonces

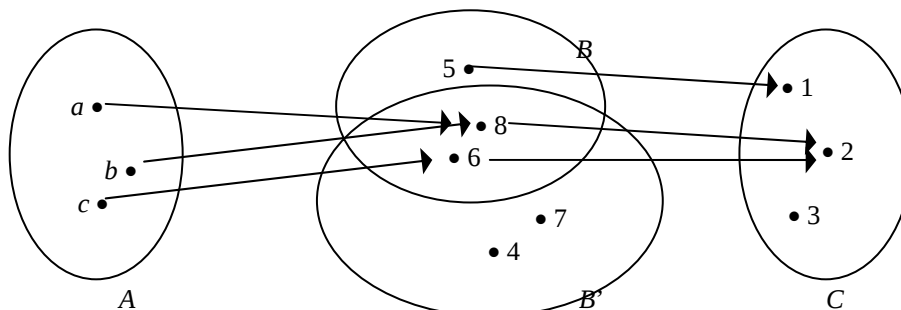
|           |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|
| $x$       | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $g(f(x))$ | 2 | 2 | 1 | 1 |

Vamos a extender la definición de composición, de manera de abarcar casos que aparecen frecuentemente en la práctica. Si  $g: B \rightarrow C$  es una función y  $f: A \rightarrow B$ , es otra función (donde  $B'$  no coincide necesariamente con  $B$ ) tal que

si  $a \in A$  entonces  $f(a) \in B$

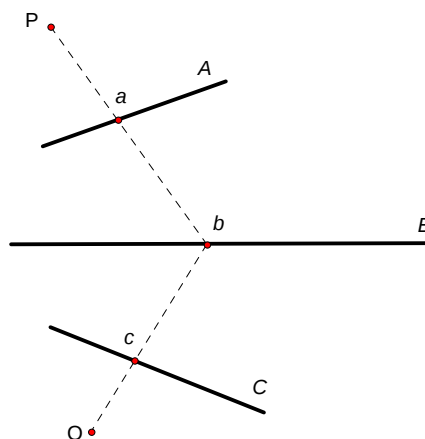
la composición  $h = g \circ f$  es la función definida para cada  $a \in A$ , por  $h(a) = g(f(a))$ .

2)



| $x$       | $a$ | $b$ | $c$ |
|-----------|-----|-----|-----|
| $g(f(x))$ | 2   | 2   | 2   |

3) Consideremos tres segmentos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en el plano, ubicados como se muestra en la siguiente figura:



Sea  $f: A \rightarrow B$  la proyección desde el punto  $P$  y sea  $g: B \rightarrow C$  la proyección desde el punto  $Q$ . Si  $b = f(a)$  y  $c = g(b)$ , la composición es la aplicación de  $A$  en  $C$  que asocia al punto  $a$  el punto  $c$ .

La composición de más de dos funciones se define de manera análoga:

si  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h: C \rightarrow D$ , entonces la composición de  $f$ ,  $g$  y  $h$  es la función  $F: A \rightarrow D$  tal que:

$$F(a) = h(g(f(a))).$$

Se emplea la notación  $F = h \circ g \circ f$ . Note que  $h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

4) La velocidad  $v$  medida en m/seg con la que sale agua por un orificio practicado en la parte inferior de un dique, depende de la diferencia (medida en metros) de alturas entre el nivel del agua y el del orificio:  $v = g(h)$  (digamos incidentalmente que esta ley de variación responde a la fórmula  $v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot h}$ ).

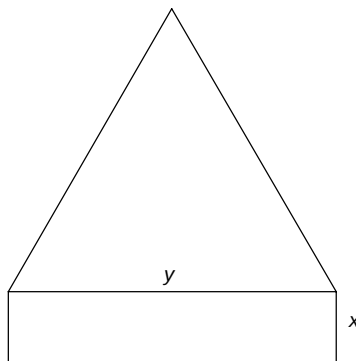
Por otra parte,  $h$  depende de la fecha (el momento o el instante  $t$ )  $h = f(t)$ . ¿Cuál será la velocidad  $v$  en una fecha  $t$ ? La respuesta es, naturalmente,  $v = g(h) = g(f(t))$ .

El ejemplo anterior es un caso particular de la situación general: una cantidad  $y$  depende de otra cantidad  $x$  de acuerdo a la ley  $y = f(x)$ . Por otra parte, una cantidad  $z$  depende de la cantidad  $y$  de

acuerdo a:  $z = g(y)$ . Entonces  $z$  depende de  $x$  según la ley que se expresa por la composición de  $f$  y  $g$ :

$$z = g(y) = g(f(x)).$$

5) En la figura están representados un rectángulo de área 1 y sobre él un triángulo equilátero cuyo lado coincide con la base del rectángulo. ¿Cuál es el área  $A$  del triángulo en función de la altura  $x$  del rectángulo?



Para resolver este problema procederemos en tres etapas:

- 1º) Determinamos la base  $y$  del rectángulo en función de su altura  $x$ .
- 2º) Expresamos el área  $A$  del triángulo equilátero en función de su lado  $y$ .
- 3º) Combinamos los dos resultados anteriores.

1º) Como  $x \cdot y = 1$ , resulta que  $y = 1/x$  ( $x > 0$ ).

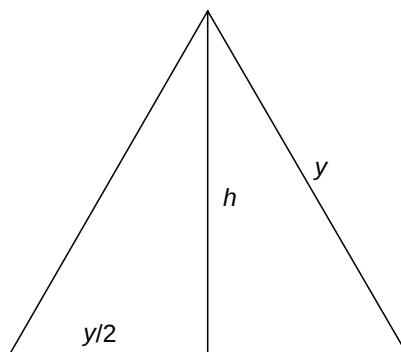
2º)  $A = y \cdot h/2$ .

$h$  se puede expresar en función de  $y$ .  
En efecto, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + (y/2)^2 = y^2, \text{ o sea que:}$$

$$h = \sqrt{y^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y.$$

$$\text{Luego: } A = \frac{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot y^2$$



$$3^\circ) \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2.$$

Obsérvese que la tercera etapa corresponde a componer las funciones obtenidas en las etapas 1ª y 2ª.

6) Consideremos las funciones  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = g(x) = 2x + 1$  y calculemos su composición  $g \circ f$ .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1.$$

En resumen, lo que hemos hecho fue sustituir en  $y = 2x + 1$  a  $x$  por  $\sqrt[3]{x}$ .

El uso de variables independiente y dependiente en la expresión de una función es técnicamente apropiado para manejarse con la composición de funciones. Supongamos que se trata de obtener la composición  $g \circ f$ . Escribimos  $u = f(x)$  poniendo en evidencia además de la variable independiente  $x$  la variable dependiente  $u$ . Escribamos ahora  $y = g(u)$ , poniendo la variable  $u$  como variable independiente de  $g$ . La sustitución de  $u$  por  $f(x)$  en  $y = g(u)$  conducirá a la expresión  $y = g(f(x))$  de la composición.

7) Frecuentemente aparecen funciones que se pueden escribir como composición de otras más sencillas, lo que facilita su estudio. Por ejemplo:

a)  $y = \sqrt[5]{x^2 - 3x + 2}$

Esta función es la composición de las funciones  $u = x^2 - 3x + 2$ ,  $y = \sqrt[5]{u}$ .

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

Vamos a expresar esta función como composición de otras. Estas funciones aparecen en forma natural indicando el orden en que son efectuadas las operaciones algebraicas para obtener  $y$ . Primero podemos calcular el número  $u = x^2 + 1$ , luego  $v = \sqrt{u}$  y finalmente  $y$  se obtiene haciendo  $y = 1/v$ . Tenemos así que:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 \\ v &= \sqrt{u} \\ y &= 1/v. \end{aligned}$$

Estas igualdades definen funciones  $y$  su composición conduce a la función  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  pues:

$$y = 1/v = 1/\sqrt{u} = 1/\sqrt{x^2 + 1}.$$

#### **Posibilidad de composición de dos funciones numéricas.**

Sean dadas las funciones definidas por  $u = 1 - x$ ,  $y = \sqrt{u}$ . Es claro que para ciertos valores de  $x$ , por ejemplo  $x = 2$ ,  $u = -1$  no pertenece al dominio de definición de  $y = \sqrt{u}$  (es decir:  $\sqrt{-1}$  no tiene sentido).

En este caso la composición no es posible. Esto es natural pues la función  $y = \sqrt{1 - x}$  solamente está definida en

$$\{x: 1 - x \geq 0\} = \{x: 1 \geq x\} = (-\infty, 1].$$

Para que la composición sea posible consideramos solamente los valores de  $x$  tales que  $x \in (-\infty, 1]$ . De esta manera  $u = 1 - x \in [0, +\infty)$ , dominio de definición de la función  $y = \sqrt{u}$ .

#### **14. COMPLEMENTO SOBRE EL CRECIMIENTO DE FUNCIONES.**

Sea  $f$  una función creciente y  $a$  un número real. Entonces:

- 1°)  $y = f(x) + a$  es creciente.
- 2°)  $y = f(x + a)$  es creciente.
- 3°)  $y = -f(x)$  es decreciente.
- 4°)  $y = f(-x)$  es decreciente.
- 5°)  $y = a \cdot f(x)$  es creciente si  $a > 0$ .
- 6°) Si además  $f$  es positiva,  $y = 1/f(x)$  es decreciente.

Por otra parte, si  $g$  es otra función creciente, entonces:

- 7°)  $f + g$  es creciente.
- 8°) Si además  $f$  y  $g$  son positivas entonces  $f \cdot g$  es creciente.

Si en lo escrito en este párrafo se intercambian las palabras “creciente” y “decreciente” se obtienen propiedades análogas.

Probemos algunas de las propiedades enunciadas:

1°) Si  $x_0 < x_1$ , como  $f$  es creciente,  $f(x_0) < f(x_1)$ ; entonces  $f(x_0) + a < f(x_1) + a$ .

2°) Si  $x_0 < x_1$ , entonces  $x_0 + a < x_1 + a$ ; como  $f$  es creciente, resulta que  $f(x_0 + a) < f(x_1 + a)$ .

7º) Supongamos  $x_0 < x_1$ . Como  $f$  y  $g$  son crecientes:

$$f(x_0) < f(x_1), \quad g(x_0) < g(x_1),$$

Sumando, se tiene que:

$$f(x_0) + g(x_0) < f(x_1) + g(x_1).$$

8º) Supongamos  $x_1 < x_2$ , como  $f$  es creciente,  $f(x_1) < f(x_2)$ . Multiplicando por el número positivo  $g(x_1)$  se tiene que:

$$(*) \quad f(x_1).g(x_1) < f(x_2).g(x_1)$$

Por ser  $g$  creciente,  $g(x_1) < g(x_2)$ . Luego, por ser  $f(x_2) > 0$ ,

$$(**) \quad f(x_2).g(x_1) < f(x_2).g(x_2).$$

Teniendo en cuenta las desigualdades (\*) y (\*\*), resulta que:

$$f(x_1).g(x_1) < f(x_2).g(x_2).$$

Con respecto a la composición se tienen las siguientes propiedades:

9º) Sea  $g \circ f$  la composición de dos funciones.

Si ambas funciones son crecientes o ambas decrecientes entonces  $g \circ f$  es creciente.

Si una de ellas es creciente y la otra es decreciente entonces  $g \circ f$  es decreciente.

Probemos una sola de estas afirmaciones:

Supongamos que  $f$  y  $g$  son crecientes y veamos que también  $g \circ f$  es creciente: en efecto,

si  $x_0 < x_1$  entonces, por ser  $f$  creciente se tiene que  $f(x_0) < f(x_1)$ . Como  $g$  es creciente, se tiene entonces que  $g(f(x_0)) < g(f(x_1))$ .

## **EJEMPLOS**

A) Consideremos nuevamente la función  $y = 1/(1-x^2)$ , cuyo gráfico hemos estudiado. (Ver ejemplo 1, párrafo 11)

En  $[0, +\infty)$ ,  $y = 1-x^2$ , es decreciente, ya que en ese intervalo  $y = x^2$  es creciente, luego  $y = -x^2$  es decreciente (por 3º) y entonces  $y = 1-x^2$  lo es también. (por 1º).

En  $[0,1)$ ,  $y = 1-x^2$  es positiva y decreciente, como vimos, luego  $y = 1/(1-x^2)$  es creciente en  $[0,1)$ . (por la propiedad análoga a 6º para funciones decrecientes).

En  $(1, +\infty)$ ,  $y = 1-x^2$  es negativa y decreciente, luego  $y = -(1-x^2)$  es positiva y creciente. En consecuencia, por la propiedad 6º,  $y = 1/(-(1-x^2))$  es decreciente y entonces, por 3º,  $y = 1/(1-x^2)$ , es creciente.

Como la función es par, basta estudiarla en  $[0, +\infty)$ .

B) Veamos que la función  $y = 1/(x^2+1)^3 - 7x + 2$  es decreciente en  $[0, +\infty)$ .

Consideremos la función  $y = 1/(x^2+1)^3$ . Ésta es la composición de  $u = 1/(x^2+1)$  y de  $y = u^3$ .

La primera es decreciente en  $[0, +\infty)$  pues en este intervalo  $y = x^2+1$  es creciente y positiva. Por otro lado,  $y = u^3$  es creciente. Luego, por 9º  $y = 1/(x^2+1)^3$ , composición de ambas, es decreciente.

Como  $y = -7x + 2$  es decreciente, la suma  $y = 1/(x^2+1)^3 - 7x + 2$  es decreciente en  $[0, +\infty)$ .

## **15. INVERSA DE UNA FUNCIÓN.**

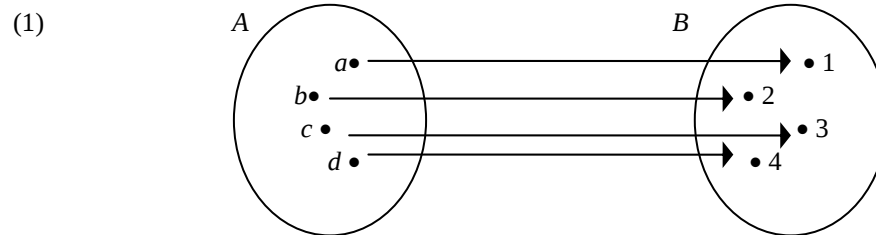
**Definición.** Una función  $f: A \rightarrow B$  se llama una *biyección* (o *función biunívoca de A sobre B*) si cumple las dos condiciones siguientes:

a)  $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ .

b) Para todo  $b \in B$  hay un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a)=b$ .

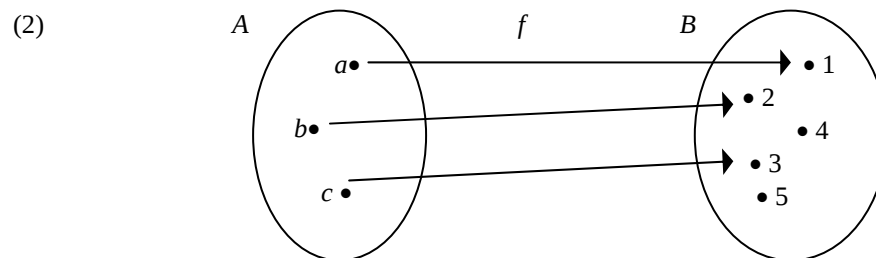
Es decir que  $B$  coincide con el conjunto de valores de la función.

Estas dos propiedades pueden enunciarse brevemente diciendo:  $f$  es biyectiva si **para todo elemento  $b \in B$  hay un único elemento  $a \in A$  tal que  $f(a)=b$ .**

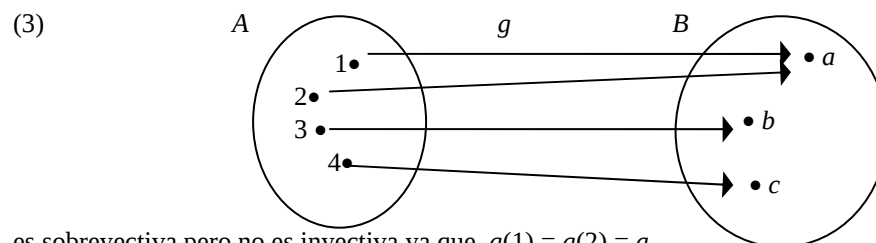


Una función  $f: A \rightarrow B$  que verifica a) se llama *inyectiva* o *biunívoca*. Si  $f: A \rightarrow B$  verifica b) se llama *sobreyectiva* o *función de A sobre B*.

De acuerdo con esto, decir que  $f$  es biyectiva equivale a afirmar que  $f$  es inyectiva y sobreyectiva. La siguiente función es inyectiva pero no es sobreyectiva ya que 4 y 5 no son valores de la función.



En cambio, la función



es sobreyectiva pero no es inyectiva ya que  $g(1) = g(2) = a$ .

**NOTA:** Observe que si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos y  $f: A \rightarrow B$  es una función biyectiva entonces  $A$  y  $B$  tienen el mismo número de elementos. Si  $f$  es inyectiva el número de elementos de  $A$  es menor o igual que el de  $B$  y si  $f$  es sobreyectiva,  $B$  tiene por lo menos tantos elementos como  $A$ .

**Definición.** Dada una función biyectiva  $f: A \rightarrow B$ , se llama *inversa de  $f$*  a la función  $g: B \rightarrow A$  que asocia a  $b \in B$  el **único** elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .

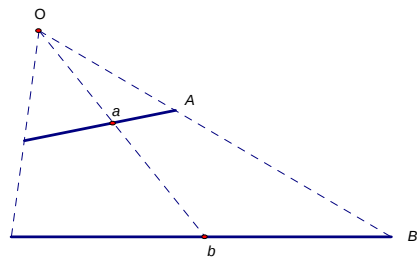
La inversa de la función indicada en el diagrama (1) se obtiene simplemente invirtiendo el sentido de las flechas.

Es claro que si  $g$  es inversa de  $f$ , entonces  $g$  también es biyectiva y su inversa es  $f$ .

En esencia: si la función  $f$  lleva  $x$  a  $y$ , la inversa  $g$  lleva  $y$  a  $x$ .

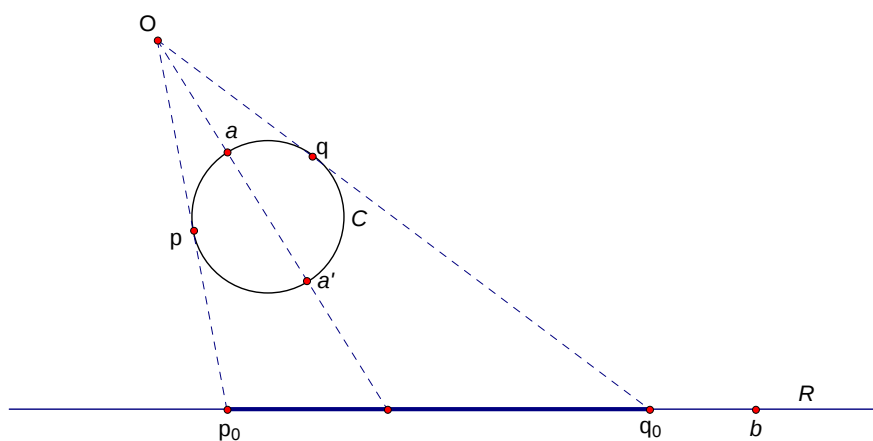
## EJEMPLOS

(1)



Si  $f$  es la proyección desde  $O$ , del segmento  $A$  sobre el segmento  $B$  (en las condiciones de la figura), su inversa  $g$  es la proyección de  $B$  sobre  $A$ . ( $f(a) = b$ ,  $g(b) = a$ )

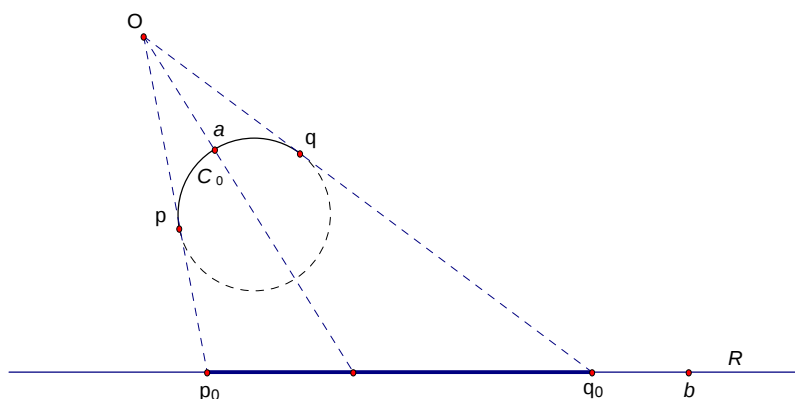
2) Consideremos ahora la proyección  $f$  de una circunferencia  $C$  sobre la recta  $R$  desde un punto  $O$ , como se indica en la figura:



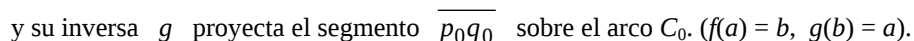
Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva. En efecto:

- 1)  $f(a) = f(a')$  y  $a \neq a'$  (luego no es inyectiva).
- 2) El punto  $b$  no es proyección de ningún punto de la circunferencia. (Luego no es sobreyectiva). El conjunto de valores de  $f$  es el segmento  $\overline{p_0q_0}$ .

En vista de que  $f$  no es biyectiva, no tiene inversa. Sin embargo, si restringimos el dominio de  $f$  al arco de circunferencia  $pq$ :



la proyección es ahora inyectiva. Por otra parte, podemos eliminar del rango los puntos que no son valores de la función, o sea, los que no pertenecen al segmento  $\overline{p_0q_0}$ . En estas condiciones, la función proyección  $f$  del arco  $C_0$  sobre el segmento  $\overline{p_0q_0}$  es una biyección:



Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función lineal  $y = f(x) = a.x + b$ , con  $a \neq 0$ . Veamos que es una biyección y calculemos su inversa: tenemos que ver que dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe un **único**  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = a.x + b = y$ . Es decir, veamos que la ecuación en la incógnita  $x$

tiene una **única** solución. Efectivamente, despejando  $x$  obtenemos

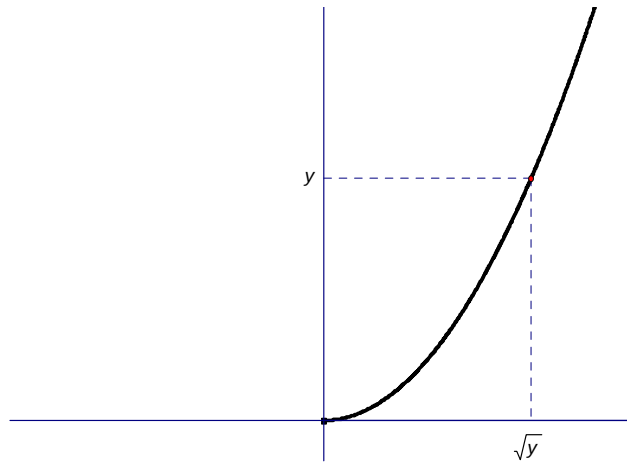
como solución única de la ecuación dada. Con esto probamos que  $f$  es una biyección. Su inversa es precisamente  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

4) Consideremos ahora la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

$$(*) \quad y = x^2, \quad (y \text{ fijo})$$

En primer lugar, si  $y < 0$ ,  $\sqrt{y}$  no tiene sentido, esto es, la ecuación (\*) no tiene ninguna solución, lo que indica que la función  $f$  no es sobreyectiva.

Lo que haremos ahora se parece a lo que hicimos en el ejemplo 2: consideraremos la función  $y = x^2$ , restringida al dominio  $[0, +\infty)$ , cuyo gráfico es:



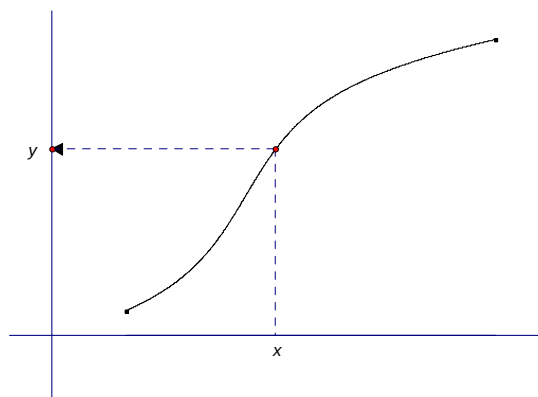
Luego, eliminamos del rango  $\mathbb{R}$  todos los puntos  $y$  que no son valores de la función, esto es, por lo recién visto, todos los números negativos. Tenemos así que la función  $y = x^2$  define una biyección  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ .

Ahora sí, para cada  $y \geq 0$ , la ecuación  $x^2 = y$  tiene como única solución  $x = \sqrt{y}$ .

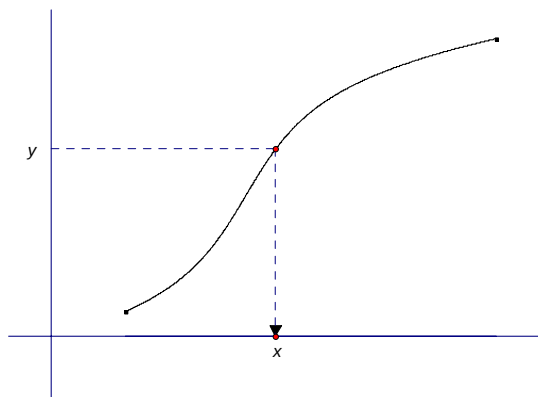
NOTA: Naturalmente, tomando la semirrecta  $(-\infty, 0]$  como dominio de la función en lugar de  $[0, +\infty)$ , hubiéramos obtenido  $x = -\sqrt{y}$  como función inversa.

### Gráfico de la función inversa.

Consideremos el gráfico de una biyección  $f$

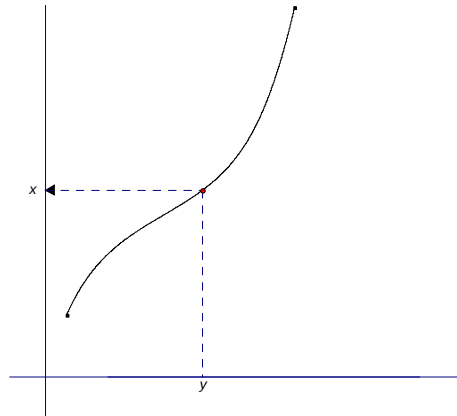


El mismo gráfico nos sirve para visualizar su inversa  $g$

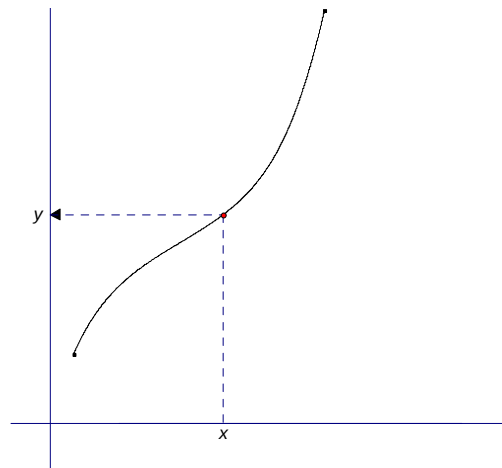


Es claro que en el eje horizontal en este segundo diagrama marcamos los valores de la variable dependiente  $x$  y en el eje vertical los de la variable independiente  $y$ . (Las variables independiente y

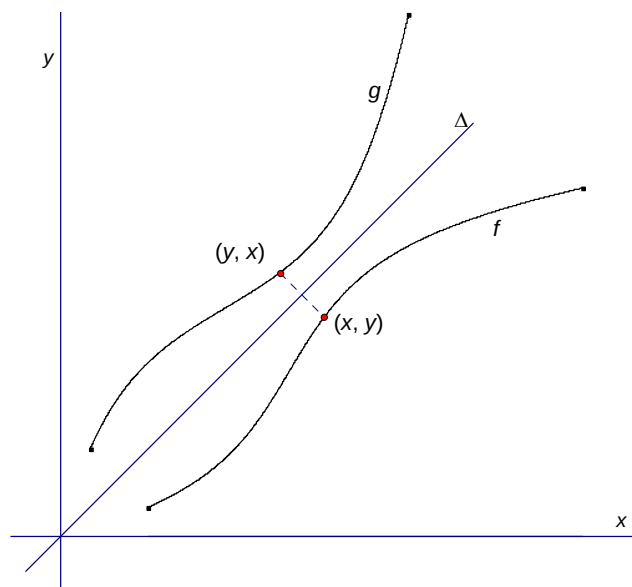
dependiente se intercambian cuando se pasa de  $f$  a  $g$ ). No es difícil llevar el diagrama anterior a la forma habitual en la cual la variable independiente se representa sobre el eje horizontal.



Finalmente, no hay inconveniente en poner, como es costumbre,  $y$  en lugar de  $x$  y  $x$  en lugar de  $y$  (o sea, intercambiar el nombre de las variables) y se tendrá



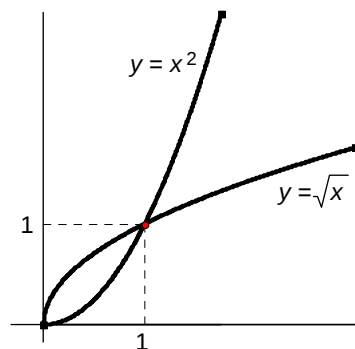
Es conveniente observar que **cundo se usan las mismas unidades de medida en los dos ejes** el gráfico de  $f$  es simétrico del de  $g$  respecto de la recta  $\Delta$ , que es el gráfico de la función  $y = x$ , bisectriz del primer y tercer cuadrantes:



Es fácil darse cuenta que un punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  tiene por simétrico con respecto de  $\Delta$  al punto de coordenadas  $(y, x)$ . Si  $(x, y)$  es un punto del gráfico de  $f$  entonces  $y = f(x)$ , luego  $x = g(y)$  y

en consecuencia el punto  $(y, x)$  es un punto del gráfico de  $g$ . Así, los gráficos de  $f$  y  $g$  son simétricos respecto de  $\Delta$ .

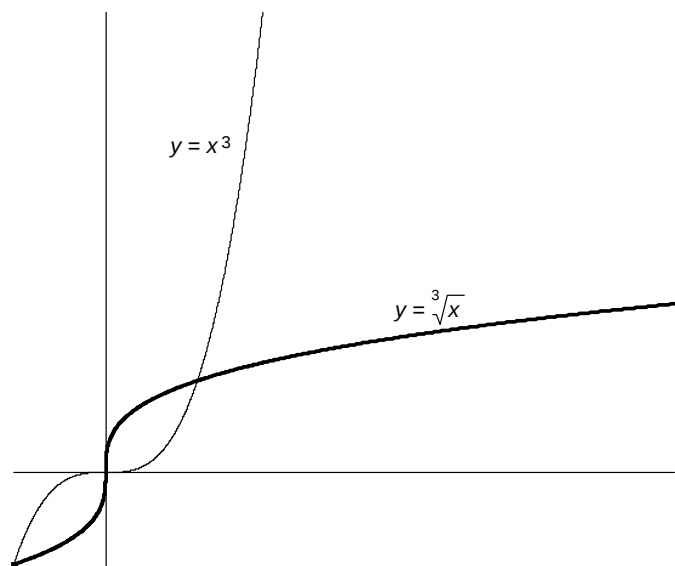
EJEMPLO.  $y = \sqrt{x}$



**Las funciones  $y = \sqrt[n]{x}$   $n \in \mathbb{N}$ .**

Estas funciones son las inversas de las funciones  $y = x^n$ . Si  $n$  es impar, el dominio es toda la recta y si  $n$  es par hay que tener el mismo cuidado que con la función  $x \rightarrow \sqrt{x}$ . Es decir, considerarlas como funciones de  $[0, +\infty)$  en  $[0, +\infty)$ .

Gráfico de  $\sqrt[3]{x}$



**Las funciones crecientes (y también las decrecientes) son inyectivas.**

En efecto: si  $x_1 \neq x_2$ , será o bien  $x_1 < x_2$ , o  $x_1 > x_2$ . Si  $f$  es, digamos, creciente, entonces será  $f(x_1) < f(x_2)$  o  $f(x_2) < f(x_1)$ , según el caso. De cualquier modo se tiene entonces que  $f(x_2) \neq f(x_1)$ .

**La inversa de una función creciente es creciente. La inversa de una función decreciente es decreciente.**

Veamos la primera afirmación.

Sea  $f$  una función creciente y  $g$  su inversa. Entonces, si  $x_1 < x_2$ , probemos que  $y_1 = g(x_1) < y_2 = g(x_2)$ . Si no fuera así, cabrían dos posibilidades: o bien  $y_1 = y_2$  o  $y_1 > y_2$ . Si fuera  $y_1 = y_2$  tendríamos que  $x_1 = g(y_1) = g(y_2) = x_2$ , lo que es absurdo pues  $x_1 \neq x_2$ . El caso  $y_1 > y_2$  conduce también a un absurdo:  $f$  es creciente, luego  $x_1 = f(y_1) > f(y_2) = x_2$ , contra lo supuesto.

**Corolario.**

- a) Las funciones  $y = \sqrt[n]{x}$  son funciones crecientes (si  $n \in \mathbb{N}$ ).
- b) Las funciones  $y = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$  (con  $p, q \in \mathbb{N}$ ) son crecientes.

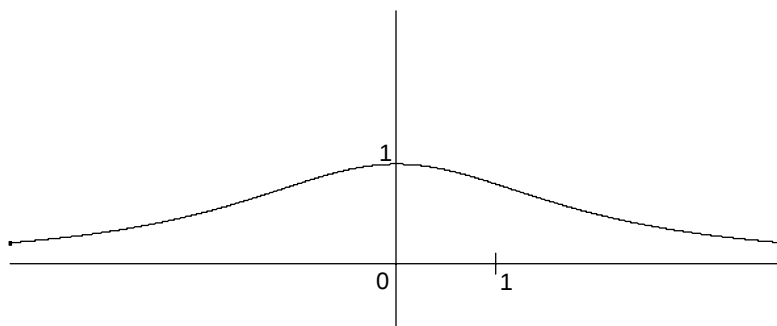
En efecto,  $y = \sqrt[q]{x^p}$  es composición de  $u = x^p$  e  $y = \sqrt[q]{u}$ , que son ambas crecientes y hemos visto que la composición de funciones crecientes es creciente.

c) Las funciones  $y = x^{-(p/q)} = 1/x^{p/q}$  (con  $p, q \in \mathbb{N}$ ) son decrecientes en  $(0, +\infty)$ . En efecto,  $y = x^{p/q}$  es creciente y positiva en  $(0, +\infty)$ , luego  $y = 1/x^{p/q}$  es decreciente en dicho intervalo.

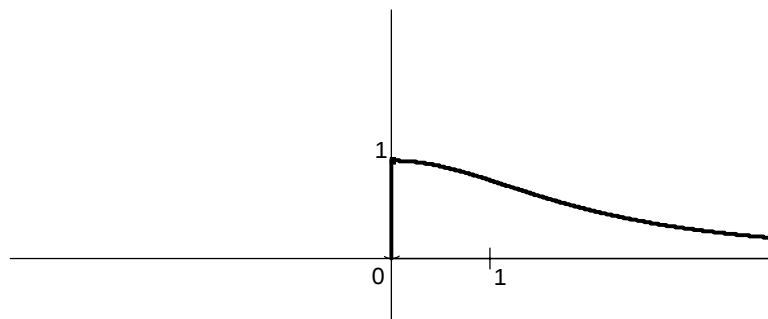
EJERCICIO. Verificar que la función  $y = \sqrt{x+2\sqrt{x}}$  es creciente en  $[0, +\infty)$ .

### Otros ejemplos sobre el cálculo de inversas.

Consideremos la función  $y = 1/(1+x^2)$ . El gráfico de esta función es como el de la figura siguiente:



Es simétrico respecto del eje  $y$  pues la función es par; en  $[0, +\infty)$  esta función es decreciente; en 0 toma el valor 1 y para valores muy grandes de  $x$  la ordenada  $y$  es muy pequeña. Siendo una función par, no puede ser inyectiva, pues en  $x$  y en  $-x$  tiene el mismo valor; además, observando la figura, vemos que la función restringida al intervalo  $[0, +\infty)$  es inyectiva y que su conjunto de valores es  $(0, 1]$ .



Luego, existe la inversa  $g:(0,1] \rightarrow [0, +\infty)$ , que podemos calcular explícitamente despejando  $x$  en la ecuación  $y = 1/(1+x^2)$ . Se tiene que  $1+x^2 = 1/y$ , luego  $x^2 = 1/y - 1$ , de donde resulta que:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

Como  $x$  debe ser mayor que 0, la inversa de  $f$  es

$$g(y) = x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

En la argumentación anterior nos hemos remitido al gráfico de la función  $f$ , pero esto no es esencial.

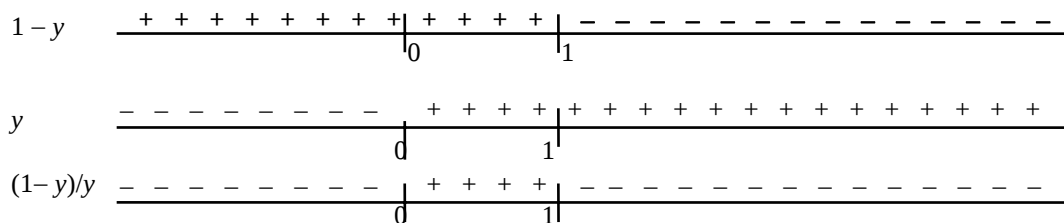
Podríamos simplemente haber estudiado la ecuación  $y = 1/(1+x^2)$ : de  $x = \pm \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ , deducimos que

la función no es inyectiva (debido a que hay **dos** raíces:  $\sqrt{\frac{1}{y} - 1}$  y  $-\sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ ) y que lo será si nos restringimos a  $[0, +\infty)$  ya que en este caso la única solución será

$$(*) \quad x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

Por otro lado, para que  $y$  sea un valor de la función, esta expresión debe tener sentido, o sea, debe ser  $1/y \geq 0$  e  $y \neq 0$ . Esto es:  $(1 - y)/y \geq 0$ .

Veamos para qué valores de  $y$  ocurre esto:

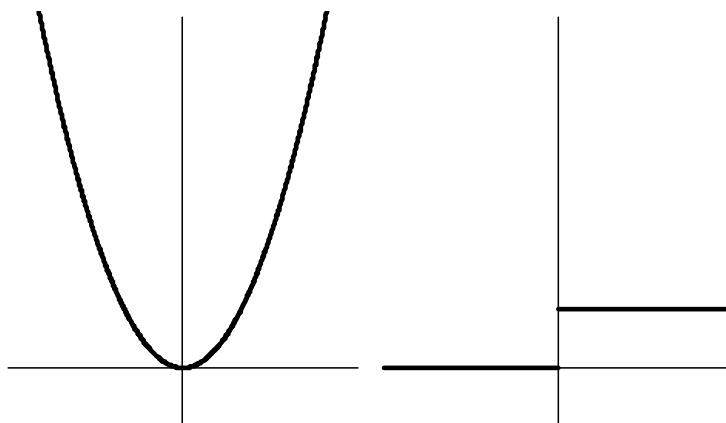


Se ve que  $(1 - y)/y \geq 0$  si  $y \in (0, 1]$ . Así, la función  $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$  es una biyección y su inversa  $g$  está dada por (\*).

En los ejemplos de funciones dadas por  $y = f(x)$  que consideramos, hemos podido despejar a  $x$  en función de  $y$ , es decir (restringiendo convenientemente el dominio y el rango de  $f$  cuando fue necesario), hemos podido calcular en forma efectiva la inversa de  $f$ . En general esto no ocurre. Puede ser un problema muy difícil y aún ser imposible obtener una expresión algebraica que dé a  $x$  en función de  $y$ .

### Noción de continuidad.

Comparemos los gráficos de  $y = x^2$  y de  $y = H(x)$  (función impulso).



El primero es un trazo continuo, se lo puede dibujar sin levantar el lápiz. Con el gráfico de  $y = H(x)$  no ocurre así, hay que dar un salto con el lápiz, en  $x = 0$ .

Una función continua es, hablando con cierta vaguedad, una función  $y = f(x)$  tal que a dos valores próximos de  $x$ :  $x_1$  y  $x_2$ , corresponden valores próximos de  $y$ :  $y_1$  e  $y_2$ . La función  $y = x^2$  y muchas otras que hemos visto en ejemplos anteriores son continuas: si dos números  $x_1$  y  $x_2$  son “casi iguales” sus cuadrados también son casi iguales”. Esta es la causa de que el gráfico de  $y = x^2$  sea un trazo continuo.

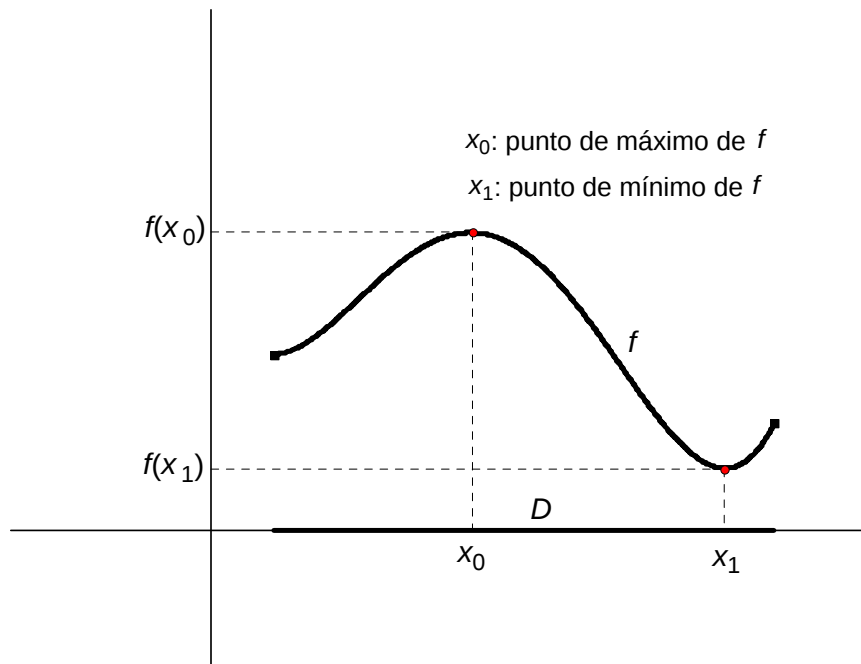
Las funciones continuas tienen gráficos con trazo continuo.

La función  $y = H(x)$ , en cambio, no es continua:  $-1/1.000.000$  es “casi igual” a 0 (es un valor muy pequeño) y sin embargo  $H(-1/1.000.000) = 0$ , que no está próximo a  $H(0) = 1$ , y esto también es así para  $-0,000000001$  o para cualquier otro número negativo pequeño  $x$ :  $H(x) = 0$  y  $H(0) = 1$ . Esta discontinuidad de  $H$  en  $x = 0$  es la causa de la ruptura del gráfico, del salto del mismo en  $x = 0$ .

La noción de continuidad será precisada y estudiada en los cursos de Análisis Matemático.

### Máximo y mínimo de una función.

Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $x_0$  es un **punto de máximo de  $f$**  si  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x \in D$ . Se dice que  $f(x_0)$  es el **valor máximo de  $f$** . Se da una definición análoga para **punto de mínimo de  $f$**  y para **valor mínimo de  $f$** .



Si  $x_0$  es tal que  $f$  decrece en  $x \geq x_0$  y crece en  $x \leq x_0$ ,  $x_0$  es un punto de máximo. Por ejemplo  $x_0 = 0$  es punto de máximo de  $f(x) = 1/(1+x^2)$ .

En los cursos de Análisis Matemático se estudiarán técnicas para la determinación de los máximos y mínimos de una función, problema éste de gran importancia práctica.