Reducción en etapas de sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos

Autores: Javier Fernández - Cora Tori - Marcela Zuccalli

Instituto Balseiro - Fac. Cs. Exactas UNLP

EAMGyFM - Septiembre 2017

Sistemas mecánicos discretos no holónomos

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto

Un **sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos** $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ está determinado por,

- Función diferenciable $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, Q variedad de dimensión finita,
- Subvariedad $\mathcal{D}_d \subset Q \times Q$, vínculos cinemáticos,
- Subfibrado $\mathcal{D} \subset TQ$, vínculos variacionales.

La acción discreta está dada por $S_d(q_\cdot) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_j, q_{j+1})$

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto. Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} (q_{j-1}, q_j) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d(q_\cdot)(\delta q_\cdot) = 0 \end{cases}$$

para toda variación $\delta q_\cdot$ a extremos fijos con $\delta q_j \in \mathcal{D}_{q_j}$.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto

Un **sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos** $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ está determinado por,

* Función diferenciable $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, Q variedad de dimensión finita,
* Subvariedad $\mathcal{D}_d \subset Q \times Q$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\mathcal{D} \subset TQ$, vínculos variacionales.

La acción discreta está dada por $S_d(q_\cdot) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_j, q_{j+1})$

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto. Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} (q_{j-1}, q_j) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d(q_\cdot)(\delta q_\cdot) = 0 \end{cases}$$

para toda variación $\delta q_\cdot$ a extremos fijos con $\delta q_j \in \mathcal{D}_{q_j}$.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto

Un **sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos** $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ está determinado por,

* Función diferenciable $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$, Q variedad de dimensión finita,
* Subvariedad $\mathcal{D}_d \subset Q \times Q$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\mathcal{D} \subset TQ$, vínculos variacionales.

La acción discreta está dada por $S_d\left(q_\cdot\right) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d\left(q_j, q_{j+1}\right)$

Principio de Lagrange-D'Alembert discreto. Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} \left(q_{j-1}, q_j\right) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d\left(q_\cdot\right)\left(\delta q_\cdot\right) = 0 \end{cases}$$

para toda variación $\delta q_\cdot$ a extremos fijos con $\delta q_j \in \mathcal{D}_{q_j}$.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

G grupo de Lie que actúa sobre Q, $l : G \times Q \to Q$, de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Otras acciones de G

Acción levantada a TQ	Acción diagonal
$G \times TQ \to TQ$	$G \times (Q \times Q) \to Q \times Q$
$g \cdot (q, \dot{q}) \mapsto (l_g(q), dl_g(\dot{q}))$	$g \cdot (q_0, q_1) \mapsto (l_g(q_0), l_g(q_1))$

G es una simetría para $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ si L_d, $\mathcal{D}_d$ y $\mathcal{D}$ son G-invariantes.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

G grupo de Lie que actúa sobre Q, $l : G \times Q \to Q$, de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Otras acciones de G

Acción levantada a TQ	Acción diagonal
$G \times TQ \to TQ$	$G \times (Q \times Q) \to Q \times Q$
$g \cdot (q, \dot{q}) \mapsto (l_g(q), dl_g(\dot{q}))$	$g \cdot (q_0, q_1) \mapsto (l_g(q_0), l_g(q_1))$

G es una simetría para $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ si L_d, $\mathcal{D}_d$ y $\mathcal{D}$ son G-invariantes.

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

G grupo de Lie que actúa sobre Q, $l : G \times Q \to Q$, de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Otras acciones de G

Acción levantada a TQ	Acción diagonal
$G \times TQ \to TQ$	$G \times (Q \times Q) \to Q \times Q$
$g \cdot (q, \dot{q}) \mapsto (l_g(q), dl_g(\dot{q}))$	$g \cdot (q_0, q_1) \mapsto (l_g(q_0), l_g(q_1))$

G es una simetría para $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ si L_d, $\mathcal{D}_d$ y $\mathcal{D}$ son G-invariantes.

Definición

*Una **conexión discreta afín** es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d(q_0, q_1) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$(q_0, q_1) = \left(q_0, l_g^Q(q_0)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $(Q \times G)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := (Q \times G)/G$.

$$Q \times Q \xrightarrow{\Phi} Q \times G \times Q/G \qquad \Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$(Q \times Q)/G$

Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

Conexión discreta - Descripción de espacios

Definición

Una ***conexión discreta afín*** *es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d\left(q_0, q_1\right) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$\left(q_0, q_1\right) = \left(q_0, l_g^Q\left(q_0\right)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q\left(q_1\right)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $\left(Q \times G\right)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := \left(Q \times G\right)/G$.

$$Q \times Q \xrightarrow{\Phi} Q \times G \times Q/G \qquad \Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$(Q \times Q)/G$

Definición

*Una **conexión discreta afín** es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d\left(q_0, q_1\right) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$\left(q_0, q_1\right) = \left(q_0, l_g^Q\left(q_0\right)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q\left(q_1\right)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $(Q \times G)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := (Q \times G)/G$.

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & Q \times G \times Q/G \\ (Q \times Q)/G & \end{tikzcd}$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

Definición

*Una **conexión discreta afín** es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d\left(q_0, q_1\right) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$\left(q_0, q_1\right) = \left(q_0, l_g^Q\left(q_0\right)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q\left(q_1\right)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $\left(Q \times G\right)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := \left(Q \times G\right)/G$.

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & Q \times G \times Q/G \arrow[d] \\ (Q \times Q)/G \arrow[r] & \tilde{G} \times Q/G \end{tikzcd}$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

Definición

Una ***conexión discreta afin*** *es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d(q_0, q_1) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$(q_0, q_1) = \left(q_0, l_g^Q(q_0)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $(Q \times G)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := (Q \times G)/G$.

$$\begin{tikzcd}
Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & Q \times G \times Q/G \arrow[d] \\
(Q \times Q)/G \arrow[r] & \tilde{G} \times Q/G
\end{tikzcd}$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\Gamma(q_0, q_1) = (\pi^{Q \times G, G}(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)), \pi^{Q,G}(q_1))$$

Definición

*Una **conexión discreta afín** es una aplicación* $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q \to G$,

$$\mathcal{A}_d\left(q_0, q_1\right) := g,$$

donde $g \in G$ *es el único tal que*

$$\left(q_0, q_1\right) = \left(q_0, l_g^Q\left(q_0\right)\right) \cdot \left(q_0, l_{g^{-1}}^Q\left(q_1\right)\right).$$

Esta noción de conexión discreta afín permite, entre otras cosas, describir el espacio cociente $\left(Q \times G\right)/G$ que aparece naturalmente en el proceso de reducción y que denotamos $\tilde{G} := \left(Q \times G\right)/G$.

$$\begin{tikzcd}
Q \times Q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & Q \times G \times Q/G \arrow[d] \\
(Q \times Q)/G \arrow[r] & \tilde{G} \times Q/G
\end{tikzcd}$$

$$\Phi(q_0, q_1) := (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\Gamma(q_0, q_1) = (\pi^{Q \times G, G}(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)), \pi^{Q,G}(q_1))$$

$$\hat{L}_d : \tilde{G} \times Q/G \to \mathbb{R}$$

Sea G un grupo de simetría de $\mathcal{M} = (Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D})$ y $\mathcal{A}_d$ conexión discreta afín sobre $\pi^{Q,G} : Q \to Q/G$.

Sean $q_.$ curva discreta en Q, $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(q_k, q_{k+1})$ curva discreta en $\tilde{G} \times Q/G$.

Son equivalentes,

1. *$q_.$ es trayectoria del sistema en Q,*
2. *$(v_., r_.)$ es trayectoria del sistema reducido definido sobre $\tilde{G} \times Q/G$; es decir, (v_k, r_{k+1}) satisface los vínculos cinemáticos reducidos y*

$$d\hat{S}_d(v_., r_.)(\delta v_., \delta r_.) = 0$$

para toda variación $(\delta v_., \delta r_.)$ que satisface los vínculos variacionales reducidos.

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\ \downarrow & \\ \hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R} \end{array}$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

El sistema reducido $\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}})$ no es un sistema mecánico discreto.

Reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos

¿Se puede plantear la reducción en etapas?

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\ \downarrow & & \\ \hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R} \end{array}$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

El sistema reducido $\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}})$ no es un sistema mecánico discreto.

Reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos

¿Se puede plantear la reducción en etapas?

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & \qquad & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\ \big\downarrow & & \\ \hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \qquad & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R} \end{array}$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

El sistema reducido $\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}})$ no es un sistema mecánico discreto.

Reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos

¿Se puede plantear la reducción en etapas?

- H subgrupo cerrado normal de G - G/H es grupo de Lie
- Reducción de la simetría dada por H

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_Q = (Q \times Q, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}) & \qquad & L_d : Q \times Q \to \mathbb{R} \\
\Big\downarrow & & \\
\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}) & \qquad & \hat{L}_d : \tilde{H} \times Q/H \to \mathbb{R}
\end{array}
$$

- G/H representa la simetría residual del sistema

El sistema reducido $\hat{\mathcal{M}}_Q = (\tilde{H} \times Q/H, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}})$ no es un sistema mecánico discreto.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

Para sistemas continuos, Cendra, Marsden y Ratiu (2001) definen una familia de sistemas donde realizar reducciones sucesivas es posible. Siguiendo esa línea proponemos la siguiente definición para el caso de sistemas discretos.

Definición

Un ***sistema de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discreto*** $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *está determinado por,*

* $\phi : E \to M$ *espacio fibrado entre variedades de dimensión finita,*
* *Función diferenciable* $L_d : E \times M \to \mathbb{R}$*,*
* *Subvariedad* $\mathcal{D}_d \subset E \times M$*, vínculos cinemáticos,*
* *Subfibrado* $\mathcal{D} \subset TE$*, vínculos variacionales,*
* $\mathcal{P}$ *una aplicación que determina una relación encadenada entre las variaciones.*

Algunos sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

- Sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos.
- El sistema reducido obtenido anteriormente.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

Para sistemas continuos, Cendra, Marsden y Ratiu (2001) definen una familia de sistemas donde realizar reducciones sucesivas es posible. Siguiendo esa línea proponemos la siguiente definición para el caso de sistemas discretos.

Definición

*Un **sistema de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discreto** $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ está determinado por,*

* $\phi : E \to M$ *espacio fibrado entre variedades de dimensión finita,*
* *Función diferenciable* $L_d : E \times M \to \mathbb{R}$*,*
* *Subvariedad* $\mathcal{D}_d \subset E \times M$*, vínculos cinemáticos,*
* *Subfibrado* $\mathcal{D} \subset TE$*, vínculos variacionales,*
* $\mathcal{P}$ *una aplicación que determina una relación encadenada entre las variaciones.*

Algunos sistemas de Lagrange D'Alembert Poincaré discretos

- Sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos.
- El sistema reducido obtenido anteriormente.

Dinámica de los sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

La acción discreta está dada por $S_d(\epsilon_\cdot, m_\cdot) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\epsilon_k, m_{k+1})$

Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} (\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d(\epsilon_\cdot, m_\cdot)(\delta\epsilon_\cdot, \delta m_\cdot) = 0 \end{cases}$$

para toda variación infinitesimal $(\delta\epsilon_\cdot, \delta m_\cdot)$ a extremos fijos.

Una variación infinitesimal a extremos fijos $(\delta\epsilon_\cdot, \delta m_\cdot)$ satisface

$$\delta m_N = 0 \quad \text{y} \quad \delta m_k = d\phi(\epsilon_k)(\delta\epsilon_k) \text{ con } k = 1, ..., N-1$$

$$\delta\epsilon_0 = \mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\left(\widetilde{\delta\epsilon_1}\right) \quad \text{y} \quad \delta\epsilon_{N-1} = \widetilde{\delta\epsilon_{N-1}}$$

$$\delta\epsilon_k = \widetilde{\delta\epsilon_k} + \mathcal{P}((\epsilon_k, m_{k+1}), (\epsilon_{k+1}, m_{k+2}))\left(\widetilde{\delta\epsilon_{k+1}}\right) \text{ si } k = 1, ..., N-2$$

donde $\widetilde{\delta\epsilon_k} \in \mathcal{D}_{\epsilon_k} \subset T_{\epsilon_k}E$ es arbitrario para $k = 1, ..., N-1$.

Dinámica de los sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

La acción discreta está dada por $S_d(\epsilon_{\cdot}, m_{\cdot}) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\epsilon_k, m_{k+1})$

Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} (\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d(\epsilon_{\cdot}, m_{\cdot})(\delta\epsilon_{\cdot}, \delta m_{\cdot}) = 0 \end{cases}$$

para toda variación infinitesimal $(\delta\epsilon_{\cdot}, \delta m_{\cdot})$ a extremos fijos.

Una variación infinitesimal a extremos fijos $(\delta\epsilon_{\cdot}, \delta m_{\cdot})$ satisface

$$\delta m_N = 0 \quad \text{y} \quad \delta m_k = d\phi(\epsilon_k)(\delta\epsilon_k) \text{ con } k = 1, \ldots, N-1$$

$$\delta\epsilon_0 = \mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\left(\widetilde{\delta\epsilon_1}\right) \quad \text{y} \quad \delta\epsilon_{N-1} = \widetilde{\delta\epsilon_{N-1}}$$

$$\delta\epsilon_k = \widetilde{\delta\epsilon_k} + \mathcal{P}((\epsilon_k, m_{k+1}), (\epsilon_{k+1}, m_{k+2}))\left(\widetilde{\delta\epsilon_{k+1}}\right) \text{ si } k = 1, \ldots, N-2$$

donde $\widetilde{\delta\epsilon_k} \in \mathcal{D}_{\epsilon_k} \subset T_{\epsilon_k}E$ es arbitrario para $k = 1, \ldots, N-1$.

Dinámica de los sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

La acción discreta está dada por $S_d(\epsilon_., m_.) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\epsilon_k, m_{k+1})$

Las trayectorias del sistema satisfacen

$$\begin{cases} (\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d \\ dS_d(\epsilon_., m_.)(\delta\epsilon_., \delta m_.) = 0 \end{cases}$$

para toda variación infinitesimal $(\delta\epsilon_., \delta m_.)$ a extremos fijos.

Una variación infinitesimal a extremos fijos $(\delta\epsilon_., \delta m_.)$ satisface

$$\delta m_N = 0 \quad \text{y} \quad \delta m_k = d\phi(\epsilon_k)(\delta\epsilon_k) \text{ con } k = 1, ..., N-1$$

$$\delta\epsilon_0 = \mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\left(\widetilde{\delta\epsilon_1}\right) \quad \text{y} \quad \delta\epsilon_{N-1} = \widetilde{\delta\epsilon_{N-1}}$$

$$\delta\epsilon_k = \widetilde{\delta\epsilon_k} + \mathcal{P}((\epsilon_k, m_{k+1}), (\epsilon_{k+1}, m_{k+2}))\left(\widetilde{\delta\epsilon_{k+1}}\right) \text{ si } k = 1, ..., N-2$$

donde $\widetilde{\delta\epsilon_k} \in \mathcal{D}_{\epsilon_k} \subset T_{\epsilon_k}E$ es arbitrario para $k = 1, ..., N-1$.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Definicion

Un grupo de Lie G es un ***grupo de simetría*** *de* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *si*

1. *G actúa sobre* $\phi : E \to M$,
2. L_d, $\mathcal{D}_d$ *y* $\mathcal{D}$ *son G-invariantes por las acciones correspondientes,*
3. $\mathcal{P}$ *es G-equivariante.*

Considerando esta simetría, con $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afin sobre $M \to M/G$, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
E \times M \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & E \times G \times M/G \arrow[d] \\
(E \times M)/G \arrow[r] & \tilde{G}_E \times M/G
\end{tikzcd}$$

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Definicion

Un grupo de Lie G es un ***grupo de simetría*** *de* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *si*

1. *G actúa sobre* $\phi : E \to M$,
2. L_d, $\mathcal{D}_d$ *y* $\mathcal{D}$ *son G-invariantes por las acciones correspondientes,*
3. $\mathcal{P}$ *es G-equivariante.*

Considerando esta simetría, con $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afin sobre $M \to M/G$, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
E \times M \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\Gamma"] & E \times G \times M/G \arrow[d] \\
(E \times M)/G \arrow[r] & \tilde{G}_E \times M/G
\end{tikzcd}$$

El sistema reducido $\hat{\mathcal{M}} = \left(\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}}\right)$ está determinado por,

* $p^{M/G} : \tilde{G}_E := (E \times G)/G \to M/G$ espacio fibrado,
* Función diferenciable $\hat{L}_d : \tilde{G}_E \times M/G \to \mathbb{R}$,
* Subvariedad $\hat{\mathcal{D}}_d := \Gamma(\mathcal{D}_d) \subset \tilde{G}_E \times M/G$, vínculos cinemáticos,
* Subfibrado $\hat{\mathcal{D}} := D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}) \subset T\tilde{G}_E$, vínculos variacionales,
* Una aplicación que determina una relación encadenada entre las variaciones es
  $\hat{\mathcal{P}}((v_0, r_1), (v_1, r_2))(\delta v_1) =$
  $d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)\left(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), dp^{M/G}(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1)\right)$
  donde $\delta\epsilon_1 \in \mathcal{D}_{\epsilon_1}$.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Teorema de Reducción

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_., m_.)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_., r_.)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_., m_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*
$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$
para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.
3. $(v_., r_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$.
4. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$ *y*
$$D_1 \hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) + D_1 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k) \circ \hat{\mathcal{P}}((v_{k-1}, r_k), (v_k, r_{k+1})) + D_2 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k)\, dp^{M/G}(v_k) = 0$$
para variaciones $\delta v_k \in \hat{\mathcal{D}}_{v_k}$.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Teorema de Reducción

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_\cdot, r_\cdot)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*

$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$

   para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.

3. $(v_\cdot, r_\cdot)$ *es una trayectoria del sistema* $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$.
4. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$ *y*

$$D_1 \hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) + D_1 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k) \circ \hat{\mathcal{P}}((v_{k-1}, r_k), (v_k, r_{k+1})) + D_2 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k)\, dp^{M/G}(v_k) = 0$$

   para variaciones $\delta v_k \in \hat{\mathcal{D}}_{v_k}$.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Teorema de Reducción

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_., m_.)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_., r_.)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_., m_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*

$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$

   para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.
3. $(v_., r_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$.
4. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$ *y*

$$D_1 \hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) + D_1 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k) \circ \hat{\mathcal{P}}((v_{k-1}, r_k), (v_k, r_{k+1})) + D_2 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k)\, dp^{M/G}(v_k) = 0$$

   para variaciones $\delta v_k \in \hat{\mathcal{D}}_{v_k}$.

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Teorema de Reducción

Sean G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín sobre $\pi^{M,G} : M \to M/G$.

Para el camino discreto $(\epsilon_., m_.)$ en $E \times M$ definimos un camino discreto $(v_., r_.)$ en $\tilde{G}_E \times M/G$ como $(v_k, r_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$. Luego, son equivalentes,

1. $(\epsilon_., m_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$.
2. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(\epsilon_k, m_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ *y*
$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) \\ + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k) = 0$$
para variaciones $\delta\epsilon_k \in \mathcal{D}_{\epsilon_k}$.
3. $(v_., r_.)$ *es una trayectoria del sistema* $\hat{\mathcal{M}} = (\tilde{G}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}})$.
4. *Para todo* $k = 0, ..., N-1$, $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$ *y*
$$D_1 \hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) + D_1 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k) \circ \hat{\mathcal{P}}((v_{k-1}, r_k), (v_k, r_{k+1})) \\ + D_2 \hat{L}_d(v_{k-1}, r_k)\, dp^{M/G}(v_k) = 0$$
para variaciones $\delta v_k \in \hat{\mathcal{D}}_{v_k}$.

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos****: sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos****: aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
  - Γ es una submersión suryectiva,
  - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma(\mathcal{D}_d), \qquad \mathcal{D}' = D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}),$
  - Para todo $((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1) \in p_3^*(\mathcal{D})$,
  $$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\right)(D_1(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_1, m_2)(\delta\epsilon_1)) =$$
  $$d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), d\phi(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1))$$
  - $D_1(p_2 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1) = 0$ para todo $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$,
  - $p_2^{C''(E),M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E),C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'),E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E),C'(E)}$

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos**: sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos**: aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
  - Γ es una submersión suryectiva,
  - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma(\mathcal{D}_d), \qquad \mathcal{D}' = D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}),$
  - Para todo $((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1) \in p_3^*(\mathcal{D})$,

$$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\right)(D_1(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_1, m_2)(\delta\epsilon_1)) =$$
$$d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), d\phi(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1))$$

  - $D_1(p_2 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1) = 0$ para todo $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$,
  - $p_2^{C''(E), M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E), C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'), E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E), C'(E)}$

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos***: *sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos***: *aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
    - Γ es una submersión suryectiva,
    - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma(\mathcal{D}_d), \qquad \mathcal{D}' = D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}),$
    - Para todo $((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1) \in p_3^*(\mathcal{D})$,

$$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\right)(D_1(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_1, m_2)(\delta\epsilon_1)) = d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), d\phi(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1))$$

    - $D_1(p_2 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1) = 0$ para todo $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$,
    - $p_2^{C''(E), M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E), C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'), E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E), C'(E)}$

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos***: *sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos***: *aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
  - Γ es una submersión suryectiva,
  - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma(\mathcal{D}_d), \qquad \mathcal{D}' = D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}),$
  - Para todo $((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1) \in p_3^*(\mathcal{D})$,
  $$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\right)(D_1(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_1, m_2)(\delta\epsilon_1)) =$$
  $$d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), d\phi(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1))$$
  - $D_1(p_2 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1) = 0$ para todo $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$,
  - $p_2^{C''(E), M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E), C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'), E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E), C'(E)}$

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos***: *sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos***: *aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
  - Γ es una submersión suryectiva,
  - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma(\mathcal{D}_d), \qquad \mathcal{D}' = D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}),$
  - Para todo $((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1) \in p_3^*(\mathcal{D})$,
  $$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\right)(D_1(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_1, m_2)(\delta\epsilon_1)) =$$
  $$d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), d\phi(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1))$$
  - $D_1(p_2 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1) = 0$ para todo $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$,
  - $p_2^{C''(E),M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E),C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'),E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E),C'(E)}$

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos***: *sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos***: *aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
  - Γ es una submersión suryectiva,
  - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma(\mathcal{D}_d), \qquad \mathcal{D}' = D_1(p_1 \circ \Gamma)(\mathcal{D}),$
  - Para todo $((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1) \in p_3^*(\mathcal{D})$,
  $$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))\right)(D_1(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_1, m_2)(\delta\epsilon_1)) =$$
  $$d(p_1 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1)(\mathcal{P}((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2))(\delta\epsilon_1), d\phi(\epsilon_1)(\delta\epsilon_1))$$
  - $D_1(p_2 \circ \Gamma)(\epsilon_0, m_1) = 0$ para todo $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$,
  - $p_2^{C''(E), M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E), C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'), E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E), C'(E)}$

Categoría de sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- ***Objetos***: *sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$
- ***Morfismos***: *aplicaciones* $\Gamma : E \times M \to E' \times M'$ *tales que*
  - Γ es una submersión suryectiva,
  - $L_d = L'_d \circ \Gamma, \qquad \mathcal{D}'_d = \Gamma\left(\mathcal{D}_d\right), \qquad \mathcal{D}' = D_1\left(p_1 \circ \Gamma\right)\left(\mathcal{D}\right),$
  - Para todo $\left(\left(\epsilon_0, m_1\right), \left(\epsilon_1, m_2\right), \delta\epsilon_1\right) \in p_3^*\left(\mathcal{D}\right)$,
  $$\mathcal{P}'\left(\Gamma^{(2)}\left(\left(\epsilon_0, m_1\right), \left(\epsilon_1, m_2\right)\right)\right)\left(D_1\left(p_1 \circ \Gamma\right)\left(\epsilon_1, m_2\right)\left(\delta\epsilon_1\right)\right) =$$
  $$d\left(p_1 \circ \Gamma\right)\left(\epsilon_0, m_1\right)\left(\mathcal{P}\left(\left(\epsilon_0, m_1\right), \left(\epsilon_1, m_2\right)\right)\left(\delta\epsilon_1\right), d\phi\left(\epsilon_1\right)\left(\delta\epsilon_1\right)\right)$$
  - $D_1\left(p_2 \circ \Gamma\right)\left(\epsilon_0, m_1\right) = 0$ para todo $\left(\epsilon_0, m_1\right) \in C'\left(E\right)$,
  - $p_2^{C''(E), M'} \circ \Gamma \circ p_1^{C''(E), C'(E)} = \phi' \circ p_1^{C'(E'), E'} \circ \Gamma \circ p_2^{C''(E), C'(E)}$

Formulación categórica

Proposición

$\mathfrak{LDP}_d$ es una categoría.

Teorema

Dado $\Gamma \in \mathrm{mor}_{\mathfrak{LDP}_d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ con $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ y $\mathcal{M}' = (E', L'_d, \mathcal{D}'_d, \mathcal{D}', \mathcal{P}')$, sea $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ un camino discreto en $C'(E)$ y definimos $(\epsilon'_k, m'_{k+1}) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$ para $k = 0, \ldots, N-1$.

Luego, $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ es una trayectoria de $\mathcal{M}$ si y sólo si $(\epsilon'_\cdot, m'_\cdot)$ es una trayectoria de $\mathcal{M}'$.

Formulación categórica

Proposición

$\mathfrak{LDP}_d$ es una categoría.

Teorema

Dado $\Gamma \in \mathrm{mor}_{\mathfrak{LDP}_d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ *con* $\mathcal{M} = (E, L_d, \mathcal{D}_d, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ *y* $\mathcal{M}' = \left(E', L'_d, \mathcal{D}'_d, \mathcal{D}', \mathcal{P}'\right)$, *sea* $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *un camino discreto en* $C'(E)$ *y definimos* $\left(\epsilon'_k, m'_{k+1}\right) := \Gamma(\epsilon_k, m_{k+1})$ *para* $k = 0, ..., N-1$.
Luego, $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *es una trayectoria de* $\mathcal{M}$ *si y sólo si* $(\epsilon'_\cdot, m'_\cdot)$ *es una trayectoria de* $\mathcal{M}'$.

Simetría residual

Proposición

Sea G un grupo de simetría de $\mathcal{M}$ y $H \subset G$ un subgrupo normal cerrado.
Se elige una conexión $\mathcal{A}_d^H$ del fibrado principal $\pi^{M,H} : M \to M/H$ de modo tal que

$$\mathcal{A}_d^H \left(l_g^M (m_0), l_g^M (m_1) \right) = g \mathcal{A}_d^H (m_0, m_1)\, g^{-1}.$$

Entonces, G/H es un grupo de simetría de $\hat{\mathcal{M}} = \left(\tilde{H}_E, \hat{L}_d, \hat{\mathcal{D}}_d, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{P}} \right)$ obtenido por la reducción de $\mathcal{M}$ usando $\mathcal{A}_d^H$.

Equivalencia entre la reducción en etapas y la reducción directa

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[ddl, "\Gamma_{\mathcal{A}_d^G}"'] \arrow[dr, "\Gamma_{\mathcal{A}_d^H}"] & & \\
 & & \mathcal{M}^H \arrow[dr, "\Gamma_{\mathcal{A}_d^{G/H}}"] & \\
\mathcal{M}^G & & & \mathcal{M}^{G/H}
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Los sistemas $\mathcal{M}^G$ y $\mathcal{M}^{G/H}$ son isomorfos en $\mathfrak{LDP}_d$.

Equivalencia entre la reducción en etapas y la reducción directa

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[ddl, "\Gamma_{\mathcal{A}_d^G}"'] \arrow[dr, "\Gamma_{\mathcal{A}_d^H}"] & & \\
 & & \mathcal{M}^H \arrow[dr, "\Gamma_{\mathcal{A}_d^{G/H}}"] & \\
\mathcal{M}^G & & & \mathcal{M}^{G/H} \arrow[lll, red]
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Los sistemas $\mathcal{M}^G$ y $\mathcal{M}^{G/H}$ son isomorfos en $\mathfrak{LDP}_d$.

Equivalencia entre la reducción en etapas y la reducción directa

Teorema

1. *Sea* $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *una curva discreta en* $C'(E)$. *Para* $k = 0, \ldots, N-1$ *definimos las curvas discretas*

$$\left(v_k^H, r_{k+1}^H\right) := \Gamma_{\mathcal{A}_d^H}\left(\epsilon_k, m_{k+1}\right), \ \left(v_k^{G/H}, r_{k+1}^{G/H}\right) := \Gamma_{\mathcal{A}_d^{G/H}}\left(v_k^H, r_{k+1}^H\right)$$

$$y \ \left(v_k^G, r_{k+1}^G\right) := \Gamma_{\mathcal{A}_d^G}\left(\epsilon_k, m_{k+1}\right)$$

en $C'\left(\tilde{H}_E\right)$, $C'\left(\tilde{G}_E\right)$ *y* $C'\left(\widetilde{G/H}_{\tilde{H}_E}\right)$ *respectivamente. Son equivalentes,*

- $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *es una trayectoria de* $\mathcal{M}$.
- $\left(v_\cdot^G, r_\cdot^G\right)$ *es una trayectoria de* $\mathcal{M}^G$.
- $\left(v_\cdot^H, r_\cdot^H\right)$ *es una trayectoria de* $\mathcal{M}^H$.
- $\left(v_\cdot^{G/H}, r_\cdot^{G/H}\right)$ *es una trayectoria de* $\mathcal{M}^{G/H}$.

2. $F\left(v_k^{G/H}, r_{k+1}^{G/H}\right) = \left(v_k^G, r_{k+1}^G\right)$ *para todo* k.

Otros resultados para sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos

- Las trayectorias de un SLDPD satisfacen ecuaciones verticales y horizontales.
- Estas ecuaciones definen morfismos G-equivariantes de modo que las ecuaciones pueden expresarse en términos de las variables reducidas.
- Se define un momento no holónomo discreto cuya evolución puede describirse a partir de la dinámica vertical.

Suponemos que la acción de G define un fibrado principal $\pi^{E,G} : E \to E/G$. El espacio vertical es $\mathcal{V}^G_\epsilon := T_\epsilon\left(\mathcal{O}\left(\epsilon\right)\right)$.

Una conexión principal sobre este fibrado consiste en la elección de un subespacio G-equivariante $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_\epsilon}$ de $T_\epsilon E$ tal que

$$T_\epsilon E = \mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_\epsilon} \oplus \mathcal{V}^G_\epsilon$$

y $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_\epsilon}$ depende de ϵ en forma diferenciable.

Consideramos el subfibrado $\mathcal{S} \subset TE$ dado por $\mathcal{S}_\epsilon := \mathcal{V}^G_\epsilon \cap \mathcal{D}_\epsilon$ y elegimos la siguiente descomposición

$$TE = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$$

donde $\mathcal{V}^G = \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$, $\mathcal{D} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{H}$.

*La única conexión $\mathcal{A}$ sobre el fibrado principal $\pi^{E,G} : E \to E/G$ cuyo espacio horizontal es $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$ es llamada **conexión no holónoma generalizada** (CFG - 2008).*

Suponemos que la acción de G define un fibrado principal $\pi^{E,G} : E \to E/G$. El espacio vertical es $\mathcal{V}_\epsilon^G := T_\epsilon(\mathcal{O}(\epsilon))$.

Una conexión principal sobre este fibrado consiste en la elección de un subespacio G-equivariante $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_\epsilon}$ de $T_\epsilon E$ tal que

$$T_\epsilon E = \mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_\epsilon} \oplus \mathcal{V}_\epsilon^G$$

y $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}_\epsilon}$ depende de ϵ en forma diferenciable.

Consideramos el subfibrado $\mathcal{S} \subset TE$ dado por $\mathcal{S}_\epsilon := \mathcal{V}_\epsilon^G \cap \mathcal{D}_\epsilon$ y elegimos la siguiente descomposición

$$TE = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$$

donde $\mathcal{V}^G = \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$, $\mathcal{D} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{H}$.

La única conexión $\mathcal{A}$ sobre el fibrado principal $\pi^{E,G} : E \to E/G$ cuyo espacio horizontal es $\mathrm{Hor}_{\mathcal{A}} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$ es llamada ***conexión no holónoma generalizada*** *(CFG - 2008).*

Proposición

Sea $\mathcal{M}$ un sistema de Lagrange D'Alembert Poincaré discreto y $(\epsilon_., m_.)$ un camino discreto en $C'(E)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $(\epsilon_., m_.)$ *satisface*

$$D_1 L_d(\epsilon_k, m_{k+1}) + D_2 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ d\phi(\epsilon_k)$$
$$+ D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})) \in \mathcal{D}^{\circ}_{\epsilon_k}.$$

2. $(\epsilon_., m_.)$ *satisface*

$$\nu_d^{hor}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1}), \cdot) \in \mathcal{H}^{\circ}_{\epsilon_k}$$
$$\nu_d^{ver}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1}), \cdot) \in \mathcal{S}^{\circ}_{\epsilon_k}.$$

Lema (H)

- *La aplicación ν_d^{hor} es un morfismo G-equivariante de fibrados vectoriales.*
- $\widehat{\nu}_d^{hor}\left((v_0, r_1), (v_1, r_2), \delta v_1\right) = \nu_d^{hor}\left((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1^{\mathcal{H}}\right)$.

Lema (V)

- *La aplicación ν_d^{ver} es un morfismo G-equivariante de fibrados vectoriales.*
- $\widehat{\nu}_d^{ver}\left((v_0, r_1), (v_1, r_2), \delta v_1\right) = \nu_d^{ver}\left((\epsilon_0, m_1), (\epsilon_1, m_2), \delta\epsilon_1^{\mathcal{S}}\right)$.

Aplicación momento - Evolución

Sistemas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré discretos con simetría

Definición

Sea G un grupo de simetría del sistema $\mathcal{M}$. Definimos la ***aplicación momento no holónomo discreto*** $J_d : C'(E) \to \left(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}\right)^*$ *por*

$$J_d(\epsilon_0, m_1)(\xi) := -D_1 L_d(\epsilon_0, m_1)(\xi_E(\epsilon_0))$$

para $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$ *y* $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}} := \left\{\xi \in \mathfrak{g} : \xi_E(\epsilon_0) \in \mathcal{D}_{\epsilon_0}\right\}$, *con* $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.

Para cada $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$, $(J_d)_\xi(\epsilon_0, m_1) := J_d(\epsilon_0, m_1)(\xi)$.

Teorema

Sea G un grupo de simetría del sistema $\mathcal{M}$ y $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ un camino discreto en $C'(E)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

1. $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *satisface* $\nu_d^{ver}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1}), \cdot) \in \mathcal{S}^\circ_{\epsilon_k}$.
2. *Para todas las secciones* $\xi \in \Gamma\left(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}\right)$,

$$(J_d)_\xi(\epsilon_k, m_{k+1}) = (J_d)_\xi(\epsilon_{k-1}, m_k) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})).$$

Definición

Sea G un grupo de simetría del sistema $\mathcal{M}$. Definimos la ***aplicación momento no holónomo discreto*** $J_d : C'(E) \to \left(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}\right)^*$ *por*

$$J_d(\epsilon_0, m_1)(\xi) := -D_1 L_d(\epsilon_0, m_1)(\xi_E(\epsilon_0))$$

para $(\epsilon_0, m_1) \in C'(E)$ *y* $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}} := \left\{\xi \in \mathfrak{g} : \xi_E(\epsilon_0) \in \mathcal{D}_{\epsilon_0}\right\}$, *con* $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.

Para cada $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$, $(J_d)_\xi(\epsilon_0, m_1) := J_d(\epsilon_0, m_1)(\xi)$.

Teorema

Sea G un grupo de simetría del sistema $\mathcal{M}$ y $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ un camino discreto en $C'(E)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

1. $(\epsilon_\cdot, m_\cdot)$ *satisface* $\nu_d^{ver}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1}), \cdot) \in \mathcal{S}^\circ_{\epsilon_k}$.
2. *Para todas las secciones* $\xi \in \Gamma\left(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}\right)$,

$$(J_d)_\xi(\epsilon_k, m_{k+1}) = (J_d)_\xi(\epsilon_{k-1}, m_k) + D_1 L_d(\epsilon_{k-1}, m_k) \circ \mathcal{P}((\epsilon_{k-1}, m_k), (\epsilon_k, m_{k+1})).$$

Bibliografía

Cendra, Marsden, Ratiu. *Lagrangian reduction by stages*. Mem. Amer. Math. Soc.152 (2001).

Cendra, Marsden, Ratiu. *Geometric mechanics, Lagrangian reduction, and nonholonomic systems*. Mathematics unlimited-2001 and beyond, Springer, 2001.

Cendra, Díaz. *Lagrange-d'Alembert-Poincaré equations by several stages*, arXiv:1406.7271, 2014.

Fernández, Tori, Zuccalli. *Lagrangian reduction of discrete mechanical systems by stages.* Journal of Geometric Mechanics, 8 (2016).

Fernández, Tori, Zuccalli. *Lagrangian reduction of nonholonomic discrete mechanical systems*. Journal of Geometric Mechanics, 2 (2010).