Encuentro Argentino de Mecánica Geométrica y Física-Matemática

Flujos geodésicos completamente integrables: ejemplos desde grupos de Lie

Gabriela P. Ovando

Universidad Nacional de Rosario y CONICET

gabriela@fceia.unr.edu.ar

Indice

Sea M una variedad diferenciable. Sea T^*M espacio cotangente. Para cada $\psi \in T_\eta(T^*M)$ defina la 1-forma $\bar{\Theta}$ por

$$\bar{\Theta}(\psi) := \eta(d\tilde{\pi}(\psi)),$$

donde $\tilde{\pi} : T^*M \to M$, entonces

$$d\tilde{\Theta} := \tilde{\Omega}$$

es una forma simpléctica. Supongamos $\langle \, , \, \rangle$ es una métrica riemanniana en M, entonces la forma simpléctica de T^*M se induce a TM.
Nos interesan M un grupo de Lie munido de una métrica invariante a izquierda, $\Longrightarrow$ determinada en $\mathfrak{g}$.

Sea N un grupo de Lie con

- álgebra de Lie $\mathfrak{n}$,
- métrica en N (y $\mathfrak{n}$) $\langle\,,\,\rangle$
- con espacio tangente TN, $TN \simeq N \times \mathfrak{n}$, y $T_{(m,Y)}(TN) \simeq \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$
- Ω la forma simpléctica en TN.

Si $f : TN \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces tenemos los campos hamiltoniano X_f y gradiente grad f

$$df_{(m,Y)}((U,V)) = \Omega_m(X_f,(U,V)) = \langle \text{grad } f,(U,V)\rangle_m$$

Donde la métrica en $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ es la producto.
Si $\text{grad}_{(m,Y)} f = (U,V)$ entonces
$X_f(m,Y) = (V, ad^t(V)(Y) - U)$ y el corchete de Poisson sigue:
$\{f,g\}_{(m,Y)} = \langle U; V'\rangle - \langle U', V\rangle + \langle [Y,[V,V']]\rangle$
para $g : TN \to \mathbb{R}$ diferenciable con $\text{grad}\, g = (U', V')$

N grupo de Lie 2-pasos nilpotente: tiene álgebra de Lie 2-pasos nilpotente:

$$[U,[V,W]] = 0 \text{ para todos } U, V, W \in \mathfrak{n}.$$

Luego $C(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{z}$ y luego para $\langle\, , \,\rangle$

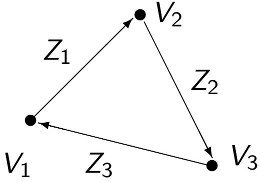
$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \text{ con } \mathfrak{v} = \mathfrak{z}^{\perp},$$

y se definen $j(Z) : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ antisimétrica por

$$\langle Z, [U,V]\rangle = \langle j(Z)U, V\rangle.$$

Ejemplos:

- El álgebra de Heisenberg de dimensión 2n+1:
  $[X_i, Y_i] = Z$ para $i = 1, \ldots, n$.
  $j(Z)$ consiste de bloques múltiplos de
  $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- álgebras asociadas a grafos:

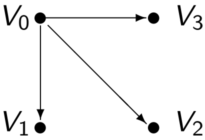


con

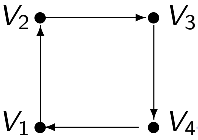
$$j(aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -b \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$$

en la base $\{V_1, V_2, V_3\}$ de $\mathfrak{v}$. Otros

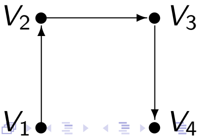
S_4



C_4



P_4



$\mathfrak{n}$ se dice

- *no singular* si toda $j(Z)$ es no singular
- *casi no singular* si existe $j(Z)$ no singular pero también existe otra singular.
- *singular* si toda $j(Z)$ es singular.

Ejemplos: Excepto K_2 toda $\mathfrak{n}$ asociada a un grafo es casi no singular o singular.

Sea

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{V+Z} &= \{X \in \mathfrak{n} : \langle V+Z, \mathrm{ad}(X)U\rangle = 0 \text{ for all } U \in \mathfrak{n}\} \\ &= \begin{cases} \mathfrak{n} & \text{si } Z = 0 \\ \mathfrak{z} \oplus \mathit{ker}\, j(Z) & \text{si } Z \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ℓ_{V+Z} es regular si ℓ_{V+Z} tiene dimensión minimal y
$\mathfrak{n}$ se dice *no-integrable* si existe un subconjunto abierto denso $\mathcal{W}$ de $\mathfrak{n}^* \times \mathfrak{n}^*$ tal que $(\ell_{V+Z}, \ell_{V'+Z'}) \in \mathcal{W}$, ambos regulares y $[\mathfrak{n}_{\ell_{V+Z}}, \mathfrak{n}_{\ell_{V'+Z'}}]$ tiene dimensión positiva.
Ejemplo: K_3 es no integrable

Resultados importantes (=motivadores)

Theorem (Butler)

$\mathfrak{n}$ *no integrable* $\Rightarrow$ *el flujo geodésico en* $\Gamma \backslash N$ *es no integrable para ningún lattice y ninguna métrica invariante a izquierda.*

Ejemplo: álgebras de Lie asociadas a grafos completos K_{2n+1}.

Theorem (Butler+Bolsinov)

$\mathfrak{n}$ *casi no singular* $\Rightarrow$ *el flujo geodésico es completamente integrable en* $\Gamma \backslash N$.

No integrable $\Rightarrow$ $\mathfrak{n}$ singular.

Qué pasa con los recíprocos?
Completamente integrable en el sentido usual

: si existen n funciones en involución que conmutan Poisson con la función energía $E(m, X) = \frac{1}{2}\langle X, X\rangle$ y son l.i. en un abierto denso

• Si M es variedad riemanniana y X^* es un campo de Killing en M, entonces $f_{X^*} : TM \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{X^*}(v) = \langle X^*(\pi(v)), v\rangle$$

es una primera integral del flujo geodésico.
• Otros... Thimm, Adler-Kostant-Symes, etc...

N actúa en $TN \simeq N \times \mathfrak{n}$ por

$$n \cdot (m, Y) = (nm, Y).$$

$f : TN \to \mathbb{R}$ es *invariante* si $f(m, Y) = f(e, Y)\ \forall m \in N, Y \in \mathfrak{n}$.

Ejemplo: La función energía para la métrica invariante a izquierda.

Sobre las funciones invariantes

1

$\{F : TN \to \mathbb{R} \ : \ F \text{ invariant } \} \longleftrightarrow \{f : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}\}$.
En efecto, $F : TN \to \mathbb{R}$ define $f : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ como

$$f(Y) = F(e, Y).$$

2

Si $F_1, F_2 : TN \to \mathbb{R}$ funciones invariantes con gradientes $\text{grad}(F_i)(p, Y) = (0, V_{F_i})$ for $i = 1, 2$. Entonces

$$\{F_1, F_2\}(m, Y) = -\langle Y, [V_{F_1}, V_{F_2}]\rangle$$

Ejemplos de funciones invariantes

(i) Dado $Z_0 \in \mathfrak{z}$, entonces $f_{Z_0} : TN \to \mathbb{R}$ es primera integral, donde

$$f_{Z_0}(m, Y) = \langle Y, Z_0 \rangle.$$

Y la familia $\{f_{Z_0}\}_{Z_0 \in \mathfrak{z}}$ es una familia Poisson-conmutativa de primeras integrales.

(ii) Sea $A : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ endomorfismo simétrico de $\mathfrak{n}$ y sea $g_A : TN \to \mathbb{R}$:

$$g_A(m, Y) = \frac{1}{2}\langle Y, AY \rangle.$$

g_A es primera integral $\Longleftrightarrow \langle Y, [AY, Y] \rangle = 0$.

Supongamos $A : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ simétrico, entonces g_A es primera integral si y sólo si

$$[J(Z), A] = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{z}$$

y $\{g_A, g_B\} = 0$ si y sólo si $J(Z)AB = J(Z)BA$.

La aplicación de Gauss

En $\mathfrak{n}^*$ tenemos las órbitas coadjuntas y via $\langle\, ,\, \rangle$ pasamos a $\mathfrak{n}$: la acción

$$g \cdot \ell_Y(U) = \langle Y, Ad(g^{-1})Y\rangle = \langle Ad(g^{-1})^t X, Y\rangle$$

$\Longrightarrow g \cdot X = Ad(g^{-1})^t(X)$. El campo inducido por $X \in \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}$ es

$$\tilde{X}(Y) = \frac{d}{ds}_{|_{s=0}} \exp(sX) \cdot Y = -\operatorname{ad}^t(X)(Y).$$

Inducimos la estructura simpléctica de $\mathfrak{n}^*$ a $\mathfrak{n}$ y tenemos

$$\omega_Y(\tilde{X}, \tilde{U}) = -\langle Y, [X, U]\rangle \qquad \text{for all } X, U \in \mathfrak{n}.$$

Para $f, g \in C^\infty(\mathfrak{n})$ tenemos

$$\{f, g\}(Y) = -\langle Y, [V_f, V_g]\rangle,$$

donde V_f, V_g denotan los respectivos gradientes de f, g

Sea $G : TN \to \mathfrak{n}$ dada por $G(m, Y) = Y$. Con $dG_{(m,Y)}(U, V) = V$ y pullback $\delta G : \mathfrak{n}^* \to T^*N$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta G(\omega)((U_1, V_1), (U_2, V_2)(m, Y) &= \omega_{G(m,Y)}(dG(U_1, V_1), dG(U, V)) \\ &= \omega_Y(V_1, V_2) \\ &= \Omega_{(m,Y)}((0, V_1), (0, V_2)). \end{aligned}$$

Proposition Sea N grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Sea $G : TN \to \mathfrak{n}$ la aplicación de Gauss.
(1) Para $f_1, f_2 : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ se tiene $f_i \circ G : TN \to \mathbb{R}$ tal que si $(m, Y) \in TN$:

$$\{f_1 \circ G, f_2 \circ G\}(m, Y) = \{f_1, f_2\} \circ G(m, Y) = -\langle Y, [V_{f_1}, V_{f_2}]\rangle \quad (1)$$

donde $V_{f_i} = \operatorname{grad} f_i$ tal que $\operatorname{grad}(f_i \circ G) = (0, V_{f_i})$. Claramente $f_i \circ G : TN \to \mathbb{R}$ es invariante.

(2) Dada $F : TN \to \mathbb{R}$ existe $f : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ G = F$ si y sólo si F es invariant. En tal caso tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} TN \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & \mathfrak{n} \arrow[dl, "f"'] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Luego para funciones diferenciables $F_i : TN \to \mathbb{R}$, con funciones asociadas $f_i : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$: $F_i = f_i \circ G$, for $i = 1, 2$, tenemos

$$\{F_1, F_2\}(m, Y) = \{f_1, f_2\} \circ G(m, Y).$$

Por ejemplo: $f_i : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, dada por

$$\bar{f}_i(V+Z) = \langle V, j(Z)^{2i-2} V \rangle$$

define $f_i : TN \to \mathbb{R}$ como $f_i(m, Y) = \bar{f}_i(Y)$ y $\{f_i, f_j\} = 0$. (Butler)

En el grupo de Heisenberg: $A_i : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ simétrico, entonces

$$A \quad \to \quad JA$$

es una biyección entre el conjunto de primeras integrales cuadráticas invariantes y el conjunto de derivaciones antisimétricas de $\mathfrak{h}_n$.

Ejemplos

• El flujo geodésico en TH_n es completamente integrable. (Butler - Kocsard-O.-Reggiani: nuevas familias)

Hay $n+1$ funciones invariantes en involución.
$\varphi : L(Iso)(N) \to C^\infty(TN)$ dada por

$$X^* \quad \longrightarrow \quad f_{X^*} \qquad (f_{X^*}(m,Y) = \langle X^*, Y\rangle)$$

es un isomorfismo sobre la imagen.

Si tomamos un lattice $\Gamma \subset H_n$ entonces es completamente integrable en $T(\Gamma\backslash N)$.
Tomando el lattice de entradas enteras en H_n $\Gamma\backslash H_n$ es un T^{n+1}-fibrado sobre T^n.
En dimensión tres: Un S^1-fibrado sobre T^2 (Thurston)

Nuevos ejemplos

Grafo estrella: S_k en $k+1$-vértices. N_{S_k} tiene dimensión $2k+1$.
Tenemos vértices base $V_0, V_1, \ldots V_n$ y aristas $Z_1, \ldots Z_n$ con $[V_0, V_i] = Z_i$.
Si $Z = a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n$, la matriz de $j(Z)$ en la base $V_0, V_1, \ldots, V_k$, es

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow j(Z)$ es singular para $k+1>2$.

Tomamos $(k+2)\times(k+2)$-matrices de la forma

$$N_{S_k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ 0 & 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

con la multiplicación usual de matrices.
Sea $\Gamma_r < N_{S_k}$:

$$\Gamma_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & rn & q_1 & q_2 & \dots & q_k \\ 0 & 1 & m_1 & m_2 & \dots & m_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad r, m_i, q_j \in \mathbb{Z}, \forall i, j \right\}$$

La variedad compacta $\Gamma_r \backslash N_{S_k}$ es un S^1-fibrado sobre T^{2k}:

$$S^1 \quad \rightarrow \quad \Gamma_r \backslash N_{S_k} \quad \rightarrow \quad T^{2n}.$$

Theorem

El flujo geodésico en N_{S_k} es completamente integrable: $\{E, f_{Z_j}, f_{V_j^*}\}_{j=1}^k$ primeras integrales están en involución cuyos gradientes son li en un abierto denso. Con $\exp(W) = m \in N$:

$$\begin{array}{rcl} E(m, Y) & = & \frac{1}{2}(y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_k^2 + z_1^2 + \ldots + z_k^2) \\ f_{V_1^*}(m, Y) & = & y_1 - w_0 z_1 \\ & \vdots & \\ f_{V_k^*}(m, Y) & = & y_k - w_0 z_k \\ f_{Z_1}(m, Y) & = & z_1 \\ & \vdots & \\ f_{Z_k}(m, Y) & = & z_k \end{array}$$

Observaciones:

• Las primeras integrales son polinomiales en las coordenadas.

• $n + 1$ primeras integrales invariantes: 1 cuadrática y n que provienen del centro de $\mathfrak{n}$.

Obstrucciones topológicas para completa integrabilidad:

Ejemplo: flujo completamente integrable en M compacta $\Longrightarrow$ conjunto denso de geodésicas cerradas.

Gracias!