“Algoritmo de Gotay-Nester y aplicaciones”

Elio Miranda

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

Septiembre 2017

1.Sistemas Hamiltonianos presimplécticos. Algoritmo de Gotay-Nester

Definición:

Llamaremos sistema Hamiltoniano presimpléctico a un triple $(M, \omega, \mathcal{H})$*,donde* M *es una variedad diferenciable,* ω *es una 2-forma cerrada y* $\mathcal{H} \in C^{\infty}(M)$*.*

- Los sistemas Hamiltonianos presimplécticos definen una EDI (Ecuación diferencial implícita):

$$\omega(x)(\dot{x},\ .) = d\mathcal{H}(x). \tag{1}$$

Una curva solución $x(t)$ satisface por definición:

$$\omega(x(t))(\dot{x}(t),\ .) = d\mathcal{H}(x(t)). \tag{2}$$

- Buscamos probar si existe, o no, una subvariedad N de M con la propiedad de que para toda condición inicial en N hay una curva solución.
- Gotay y Nester desarrollaron un algoritmo de Ligaduras (ver [2]) que permite hallar, en caso de que exista, tal subvariedad N .
- En la teoría de Gotay-Nester se pretende resolver, localmente en un entorno de un punto dado $x_0 \in M$, una EDI:

$$\omega(x)(\dot{x},\ ) = \alpha(x), x \in M, \tag{3}$$

donde ω es una 2-forma cerrada sobre la variedad M y α es una 1-forma cerrada sobre M.

- El algoritmo consiste en hallar la sucesión de subvariedades de M: $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_f$, donde M_f es la subvariedad final y $M_0 = M$, definida de la siguiente manera::

  $$M_{k+1} := \left\{ x \in M_k \,\middle|\, \text{existe } (x, v) \in TM_k \text{ tal que } \; \omega(x)(v,\, u) = \alpha(x)(u), \forall u \in TM \right\}$$

  donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se asume la siguiente condición de regularidad en cada uno de los pasos del algoritmo:

- **Condición de regularidad**
  1. Cada subconjunto M_{k+1} obtenido en cada paso es una subvariedad cerrada de la variedad anterior M_k, definida regularmente por ecuaciones en esta última.
  2. $\omega^b(x)\mid_{TM_k}$ tiene rango localmente constante en M_{k+1}.

1.1 Indice del Algoritmo

- La condición de regularidad determina que el proceso se detenga en una cantidad finita de pasos cuando ocurra $M_{f+1} = M_f$ para algún $f \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Este valor f se denomina **índice del algoritmo**.
- La finitud de pasos del algoritmo se basa en los siguientes lemas:

Lema

Sea (M, ω, α) un sistema Hamiltoniano presimpléctico y sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ la sucesión de subvariedades de M obtenidas por aplicación del algoritmo de ligaduras de Gotay-Nester. Entonces tenemos que cada subvariedad de dicha sucesión puede definirse a partir de la anterior de la siguiente manera:

$$M_{k+1} = \{x \in M_k \mid \langle \alpha(x), (T_x M_k)^{\omega} \rangle = \{0\}\}, \tag{4}$$

donde $k+1 \in \mathbb{N}$ y $(T_x M_k)^{\omega}$ es el complemento simpléctico de $T_x M_k$ respecto de M.

Lema

Sea (M, ω, α) *un sistema Hamiltoniano presimpléctico y sea* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *la sucesión de subvariedades de* M *obtenidas por aplicación del algoritmo de ligaduras de Gotay-Nester. Si existen* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $x_0 \in M_{k+1}$ *tal que se cumple:*

$$dim(C^{k+1}(x_0)) = dim(C^k(x_0)),$$

entonces $x_0 \in M_{k+2}$ *y:*

$$C^{k+2}(x_0) = C^{k+1}(x_0),$$

donde $C^m(x_0)$ *es la componente conexa de* x_0 *en* M_m*.*

- Nota 1:No se utilizó la hipótesis 1 de la condición de regularidad en la demostración del lema, sino solamente el hecho de que M_{k+1} es subvariedad de M_k.
- Nota 2: Si utilizamos la hipótesis 1 de la condición de regularidad en su totalidad, es decir, el hecho de que M_{k+1} es subvariedad cerrada de M_k definida por ecuaciones, entonces se cumple que $C^{k+1}(x_0) = C^k(x_0)$.

Se demuestra, utilizando los lemas anteriores, el siguiente teorema:

Teorema

Sea (M, ω, α) *un sistema Hamiltoniano presimpléctico y sea* $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ *la sucesión de subvariedades de* M *obtenidas por aplicación del algoritmo de ligaduras de Gotay-Nester. Si además existen* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $x_0 \in M_{k+1}$ *que cumplen las condiciones del lema anterior, entonces existe* $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que:*

$$M_{i+1} = M_i,$$

donde $M_i \neq \phi$*. En caso contrario, es decir, sino existen* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $x_0 \in M_{k+1}$ *tal que se cumpla el lema anterior, entonces la subvariedad final es vacía.*

1.2 Descripción de la ecuación final

- La condición de regularidad determina que $\omega^b|_{TM_f}$ tenga rango localmente constante sobre la subvariedad final M_f. Entonces para toda condición inicial sobre M_f habrá curvas solución del sistema sobre M_f.

- La subvariedad final M_f contiene cada una de las curvas solución de la EDI original (3). La EDI final esta dada por:

$$\omega(x)(\dot{x},\ ) = \alpha(x), x \in M_f. \tag{5}$$

- En coordenadas locales $(x^1, ..., x^m)$ para M_f, centradas en x_0, la ecuación (5) toma la siguiente forma:

$$\omega_{ij}(x)\dot{x}^j = \alpha_i(x), \tag{6}$$

donde $i = 1, ..., n = dim(M)$.

- Sea $s = m - r$ rango de (ω_{ij}) en (6) con $r = dim(ker(\omega^b|_{TM_f}))$, en un entorno de x_0. Entonces la ecuación (6) puede reducirse a la siguiente ecuación equivalente:

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1,s} \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ \omega_{s,1} & \dots & \omega_{s,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ . \\ . \\ \dot{x}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ \alpha_s \end{pmatrix} - \dot{x}^{s+1} \begin{pmatrix} \omega_{1,s+1} \\ . \\ . \\ \omega_{s,s+1} \end{pmatrix} - \dots - \dot{x}^m \begin{pmatrix} \omega_{1,m} \\ . \\ . \\ \omega_{s,m} \end{pmatrix} \tag{7}$$

  donde $B = (\omega_{ij})$, $i, j = 1, \dots, s$, constituye una submatriz inversible de rango máximo de la matriz (ω_{ij}) dada en (6).
- A partir de (7) obtenemos:

$$(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^s) = \vec{u_0} - \dot{x}^{s+1}.\vec{u_1} - \dots - \dot{x}^m.\vec{u_r}, \tag{8}$$

  donde $\vec{u_i} \in \mathbb{R}^s$.
- La ecuación (8) constituye una EDO en las variables $x_1, \dots, x_s$ dependiente de los parámetros $\dot{x}^{s+1}, \dots, \dot{x}^m$. Esto nos permite afirmar que la EDI (5) puede ser interpretada como una EDO dependiente de r parámetros.

- Puesto que $ker(\omega^b|_{TM_f})$ tiene rango localmente constante sobre M_f tenemos que es una distribución.
- Al ser ω una 2-forma cerrada, entonces, $ker(\omega^b|_{TM_f})$ es un subfibrado involutivo y por lo tanto integrable por teorema de Frobenius (ver [8]).
- El teorema de Frobenius asegura la existencia de una foliación F de variedades maximales integrales que tienen por fibrado tangente a $ker(\omega^b|_{TM_f})$.

1.3 Ejemplos de aplicación del Algoritmo de Gotay-Nester

- En los diferentes ejemplos se resuelve la ecuación:

$$\omega(x)(\dot{x},\ ) = d\mathcal{E}(x), x \in M_0. \tag{9}$$

Ejemplo 1.Lagrangiano lineal en las velocidades.

- $M_0 = TQ \oplus T^*Q$, fibrado de Pontryagin.
- Función Lagrangiana: $L(q, v) = \alpha(q)(v)$.
- Función energía: $\mathcal{E}(q, v, p) = pv - \alpha(q)(v)$.
- 2-forma presimpléctica: $\omega = dq \wedge dp$.

Caso 1: $d\alpha = 0$

- Indice del algoritmo = 1.
- $M_f = M_1 = \{x \in M_0 \mid p_i - \alpha_i(q) = 0\}$.
- EDI final: $\dot{q}^i = v^i, \dot{p}_i = \frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} v^j$.
- Curvas solución $(q(t), v(t), p(t))$, donde:
    - $v(t)$ es arbitraria.
    - $q(t) = \int v(t) dt + c$.
    - $p(t) = \alpha(q(t))$.

Caso 2: $d\alpha$ simpléctica sobre Q .

- Indice del algoritmo = 2.
- $M_f = M_2 = \{x \in M_0 \mid p_i - \alpha_i(q) = 0, v^i = 0\}$.
- EDI final: $\dot{q}^i = v^i = 0, \dot{p}_i = \frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} v^j = 0$.
- Curvas solución $(q(t), v(t), p(t))$, donde:
  - $v(t)$ es nula.
  - $q(t)$ es constante.
  - $p(t) = \alpha(q(t))$ constante.

Ejemplo 2: Lagrangiano afín en las velocidades.

- $M_0 = TQ \bigoplus T^*Q$
- Función Lagrangiana: $L(q, v) = \alpha(q)v + h(q)$.
- Función energía: $\mathcal{E}(q, v, p) = pv - \alpha(q)(v) - h(q)$.
- 2-forma presimpléctica: $\omega = dq \wedge dp$.
- $d\alpha = \frac{1}{2} A_{ij}.dq^i \wedge dq^j = \frac{1}{2}(\frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j}).dq^i \wedge dq^j$.

Caso 1: $d\alpha = 0$, $\frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial q^k}$ inversible

- Indice del algoritmo = 3.
- $M_f = M_3 = \left\{x \in M_0 \mid \; p_i - \alpha_i(q) = 0, v^j = 0, \frac{\partial h}{\partial q^k} = 0\right\}$.
- EDI final: $\dot{q}^i = v^i = 0, \dot{p}_i = \frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} v^j = 0$.
- Curvas solución $(q(t), v(t), p(t))$, donde:
  - $v(t)$ es nula.
  - $q(t)$ es constante.
  - $p(t) = \alpha(q(t))$ constante.

Caso 2: $d\alpha$ simpléctica sobre Q

- Indice del algoritmo= 2.
- $M_f = M_2 = \left\{x \in M_0 \;\middle|\; p_i - \alpha_i(q) = 0, A_{ij} v^j + \frac{\partial h}{\partial q^i} = 0\right\}.$
- EDI final: $\dot{q}^i = v^i, \dot{v}^i = -(A^{-1})^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k, \dot{p}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j} \dot{q}^j.$
- Curvas solución $(q(t), v(t), p(t))$ donde:
    - $v^i(t) = -(A^{-1})^{ij} \frac{\partial h}{\partial q^j}(q(t)).$
    - $p(t) = \alpha(q(t)).$
    - $q(t)$ solución de la EDO $\dot{q}^i = (A^{-1})^{ij} \frac{\partial h}{\partial q^j}.$

Aplicación del ejemplo 2. Ejemplo de Jakubiec dado por Cariñena.

- $M_0 = TR^2 \oplus T^*R^2$
- Función Lagrangiana: $L(q, v) = \frac{1}{2}(q^2\dot{q}^1 - q^1\dot{q}^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2)$.
- Función energía: $\mathcal{E}(q, v, p) = p_1\dot{q}^1 + p_2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left(-q^2\dot{q}^1 + q^1\dot{q}^2 + (q^1)^2 + (q^2)^2\right)$.
- Indice del algoritmo = 2.
- $M_f = M_2 = \left\{x \in M_0 \;\middle|\; p_1 = \frac{1}{2}q^2, p_2 = -\frac{1}{2}q^1; -v^2 - q^1 = 0, v^1 - q^2 = 0\right\}$.
- EDI final: $\dot{x} = q^2\frac{\partial}{\partial q^1} - q^1\frac{\partial}{\partial q^2} - q^1\frac{\partial}{\partial v^1} - q^2\frac{\partial}{\partial v^2} - \frac{1}{2}q^1\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{1}{2}q^2\frac{\partial}{\partial p_2}$.
- Curvas solución $(q(t), v(t), p(t))$ donde:
    - $(v^1(t), v^2(t)) = (q^2(t), -q^1(t))$.
    - $(p_1(t), p_2(t)) = (\frac{1}{2}q^2(t), -\frac{1}{2}q^1(t))$.
    - $(q^1(t), q^2(t))$ solución de la EDO $(\dot{q}^1, \dot{q}^2) = (-q^2, q^1)$.

Ejemplo 3: Sistemas del tipo $(TQ, \omega_L, \mathcal{E}_L)$, con L afín en las velocidades.

- $M_0 = TQ$
- Función Lagrangiana: $L(q, v) = \alpha(q)(v) + h(q)$.
- Función energía: $\mathcal{E}_L = \alpha(q)v - L(q, v) = -h(q)$.
- 2-forma presimpléctica: $\omega_L = -\frac{1}{2}A_{ij}.dq^i \wedge dq^j = -\frac{1}{2}(\frac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial q^j}).dq^i \wedge dq^j$.

Caso 1: $d\alpha = 0$.

- Indice del algoritmo = 1.
- $M_f = M_1 = \{x = (q, v) \in TQ \,|\, \frac{\partial h}{\partial q^i} = 0\}$.
- EDI final: $(\dot{q}, \dot{v})$ arbitrario.
- Curvas solución $(q(t), v(t))$, donde:
  - $v(t)$ es arbitraria.
  - $q(t)$ tal que $\frac{\partial h}{\partial q^i}(q(t)) = 0$.

Caso 2: $d\alpha$ una 2-forma simpléctica sobre Q .

- Indice del algoritmo = 1.
- $M_f = M_1 = \left\{x = (q, v) \in TQ \,\middle|\, A_{ij}v^j + \frac{\partial h}{\partial q^i} = 0\right\}$.
- EDI final: $\dot{q}^i = v^i$, $\dot{v}^i = -(A^{-1})^{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial q^k}\dot{q}^k$.
- Curvas solución $(q(t), v(t))$, donde:
  - $v^i(t) = -(A^{-1})^{ij}\frac{\partial h}{\partial q^j}(q(t))$.
  - $q(t)$ solución de la EDO $\dot{q}^i = -(A^{-1})^{ij}\frac{\partial h}{\partial q^j}$.

Referencias

- J. Cariñena, C. López, M. F. Rañada, *Geometric Lagrangian approach to first-order systems and applications* , J. Math. Phys., 29 (5) (1988), 1134-1142.
- M. Gotay, J. Nester, G. Hinds: *Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints* , J. Math. Phys. 19, 11(1978), 2388-2399.
- P.A.M. Dirac :*Lectures on Quantum Mechanics*, Dover publications, (1964).
- H.Cendra, M. Etchechoury, S. Ferraro: *The Dirac Theory of Constraints, the Gotay-Nester Theory and Poisson Geometry*, .
- R. Skinner, R. Rusk: *Generalized Hamiltonian Dynamics.I. Formulation on* $T^*Q \oplus TQ$, J. Math. Phys., 24(11) (1983), 2589-2594 .
- P.A.M. Dirac :*Generalized Hamiltonian Dynamics*, Canadian J. Math. 2, (1950), 129-148.
- A.Jakubiec : *Canonical variables for the Dirac Theory*, Lett. Math. Phys.9, (1985), 171-182.
- R. Abraham, J.Marsden: *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York,