Sobre conexiones discretas y la Sucesión de Atiyah Discreta

Javier Fernandez [1], Marcela Zuccalli[2], Mariana Juchani[2,3]

[1]**Instituto Balseiro, UNCu-CNEA**
[2]**Dto. de Matemática, UNLP**
[3]**CONICET**

EAMGyFM
Septiembre 2017

Conexiones sobre fibrados principales

- Sea G un grupo de Lie actuando sobre una variedad Q por $l^Q : G \times Q \to Q$ tal que,
- $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal.
- Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. El fibrado vertical $\mathcal{V}$ está definido para cada $q \in Q$ por $\mathcal{V}(q) := T_q l_G^Q(q) = \{\xi_Q(q) : \xi \in \mathfrak{g}\}$

Definición

Una ***conexión*** $\mathcal{A}$ *sobre un* G*-fibrado principal* π *consiste en una elección de un subespacio* $Hor_{\mathcal{A}}(q) \subset T_qQ$ *tal que:*

(1) $T_qQ = \mathcal{V}(q) \oplus Hor_{\mathcal{A}}(q)$

(2) $Hor_{\mathcal{A}}(q)$ *es* G*-equivariante.*

(3) $Hor_{\mathcal{A}}(q)$ *depende de* q *de forma diferenciable.*

Es decir, cada $v_q \in T_qQ$ se descompone de manera única como:

$$v_q = \underbrace{\xi_Q(q)}_{\in \mathcal{V}(q)} + \underbrace{v_q - \xi_Q(q)}_{\in Hor_{\mathcal{A}}(q)}$$

Definición

*Asociada a una conexión sobre un G-fibrado principal, se tiene una 1-**forma de conexión** con valores en* $\mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : TQ & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ v_q & \mapsto & \xi \end{array}$$

donde $v_q - \xi_Q(q) \in Hor_{\mathcal{A}}(q)$

Teorema

La forma de conexión $\mathcal{A}$ de una conexión satiface las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{A}(\xi_Q(q)) = \xi$, *para todo* $\xi \in \mathfrak{g}$

(2) $\mathcal{A}$ *es* G*-equivariante.*

equivalentemente, dada una aplicación $\mathcal{A} : TQ \to \mathfrak{g}$ *que cumple con las propiedades (1) y (2) define una única conexión cuya* 1*-forma de conexión es* $\mathcal{A}$.

- $Q \times Q$ una versión discreta TQ.
- Sea la acción diagonal $l_g^{Q\times Q}(q_0, q_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))$ sobre $Q \times Q$.
- $\mathcal{V}_d(q) := \{(q, l_g^Q(q)) \in Q \times Q : g \in G\}$
- Para un par $(q_0, q_1) \in Q \times Q$,

$$(q_0, q_1) = \underbrace{(q_0, l_g^Q(q_0))}_{\in \mathcal{V}_d} \cdot \underbrace{(q_0, q_1)}_{horizontal}$$

Donde la composición de un vertical y un par arbitrario (con base en el mismo punto q_0) esta definido por

$$(q_0, l_g^Q(q_0)) \cdot (q_0, q_1) := (q_0, l_g^Q(q_1)).$$

Definición

Sea $Hor \subset Q \times Q$ *una subvariedad* $l^{Q\times Q}$*-invariante que contiene la diagonal* $\Delta_Q \subset Q \times Q$*.*
Hor *define una una conexión discreta* $\mathcal{A}_d$ *sobre el fibrado principal* $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ *si* $(id_Q \times \pi)|_{Hor} : Hor \longrightarrow Q \times Q/G$ *es un difeomorfismo local inyectivo.*

Para cualquier $(q_0, q_1) \in \mathfrak{U}$, existe un único $g \in G$ tal que

$$(q_0, q_1) = \underbrace{(q_0, l_g^Q(q_0))}_{\in \mathcal{V}_{\mathcal{A}_d}} \cdot \underbrace{(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1))}_{\in Hor_{\mathcal{A}_d}}$$

Definición

Dada una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ con dominio $\mathfrak{U}$ sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$, se define su ***forma de conexión disreta asociada*** *como*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \subset Q \times Q & \longrightarrow & G \\ (q_0, q_1) & \mapsto & g \end{array}$$

Teorema

Sea $\mathcal{A}_d$ *una conexión discreta sobre el* G*-fibrado principal* $\pi : Q \to Q/G$ *con dominio* $\mathfrak{U}$. *Entonces,* $\forall\ (q_0, q_1) \in \mathfrak{U}$ *y* g_0, $g_1 \in G$,

$$\mathcal{A}_d(l^Q_{g_0}(q_0), l^Q_{g_1}(q_1)) = g_1 \mathcal{A}_d(q_0, q_1) g_0^{-1} \tag{1}$$

Además, $Hor_{\mathcal{A}_d} = \{(q_0, q_1) \in \mathfrak{U} : \mathcal{A}_d(q_0, q_1) = e\}$.
Inversamete, dada una función suave $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to G$ *con* $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ *un conjunto abierto que contiene a la diagonal* $\Delta_Q \subset Q \times Q$ *y es invariante bajo la acción producto de* $G \times G$ *en* $Q \times Q$, *tal que la función* $\mathcal{A}$ *cumple (1), entonces*

$$Hor := \{(q_0, q_1) \in \mathcal{U} : \mathcal{A}(q_0, q_1) = e\}$$

define una conexión discreta con dominio $\mathcal{U}$ *y con forma de conexión discreta asociada* $\mathcal{A}$.

Teorema

Sea $(Q, \langle , \rangle_Q)$ una variedad de Riemann donde el grupo de Lie G actua por isometrías y $\pi : Q \to Q/G$ es un G-fibrado principal. Entonces, existe una conexión discreta $\mathcal{A}_d^{\langle , \rangle_Q}$ sobre π.

- Sea $Q := M \times G$, M variedad diferencial conexa y G un grupo de Lie.
- Sea la G-acción sobre Q definida por $l_g^Q(x, g') = (x, gg')$
- Entonces $p_1 : Q \longrightarrow M$ es el G-fibrado principal trivial.

$\mathcal{A}_d^e : Q \times Q \longrightarrow G$ dada por

$$\mathcal{A}_d^e((x_0, g_0), (x_1, g_1)) = g_1 g_0^{-1}$$

define una conexión discreta sobre el G-fibrado principal trivial, $\mathcal{A}_d^e$ es llamada conexión discreta trivial.

Definición

Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ *un fibrado principal con una conexión* $\mathcal{A}$.
La curvatura asociada a la conexión $\mathcal{A}$, *se define como:*

$$\mathcal{B}(u_q, v_q) = \boldsymbol{d}\mathcal{A}(Hor_{\mathcal{A}}(u_q), Hor_{\mathcal{A}}(v_q))$$

para $u_q, v_q \in T_qQ$.
Donde $\boldsymbol{d}$ *denota la derivada exterior.*

Conexiones discretas simétricas

Definición

Una conexión $\mathcal{A}_d$ *definida por* $Hor \subset Q \times Q$ *es simétrica si y solo si* $(q_0, q_1) \in Hor \Longleftrightarrow (q_1, q_0) \in Hor$.

Curvatura de una conexión discreta

Definición

Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta simétrica con dominio $\mathfrak{U}$ sobre el fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Sea

$$\mathfrak{U}^3 := \{(q_0, q_1, q_2) \in Q^3 : (q_i, q_j) \in \mathfrak{U} \forall i, j = 0, 1, 2\}$$

Definimos la curvatura de $\mathcal{A}_d$ como $\mathcal{B}_d : \mathfrak{U}^{(3)} \longrightarrow G$ por

$$\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) := \mathcal{A}_d(q_2, q_0)\mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1)$$

*$\mathcal{A}_d$ **es plana** si $\mathcal{B}_d = e$ sobre $\mathfrak{U}^3$.*

- Sea $Q := M \times G$, M variedad diferencial conexa y G un grupo de Lie actuando de manera trivial sobre Q.
- Entonces $p_1 : Q \longrightarrow M$ es el G-fibrado principal trivial.

La conexión discreta trivial sobre el G-fibrado principal

$$\mathcal{A}_d^e((x_0, g_0), (x_1, g_1)) = g_1 g_0^{-1}$$

Tiene curvatura:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) &:= \mathcal{A}_d^e(q_2, q_0)\mathcal{A}_d^e(q_1, q_2)\mathcal{A}_d^e(q_0, q_1) \\ &= (g_0 g_2^{-1})(g_2 g_1^{-1})(g_1 g_0^{-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

Sucesión de Atiyah

Dado un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ se tiene la siguiente sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre Q/G

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{i} TQ/G \xrightarrow{\pi_*} T(Q/G) \longrightarrow 0,$$

llamada Sucesión de Atiyah .

Donde $\widetilde{\mathfrak{g}} = (Q \times \mathfrak{g})/G$.
Una conexión $\mathcal{A}$ sobre el G-fibrado principal induce un splitting,

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \underset{(\pi_1,\mathcal{A})}{\overset{i}{\rightleftarrows}} TQ/G \underset{X^h}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} T(Q/G) \longrightarrow 0$$

Sean las acciones a izquierda de G sobre $Q \times G$ y $Q \times Q$ de la siguiente forma,

$$l_g^{Q\times G}(q,h) := (l_g^Q(q), ghg^{-1}) \;\; y \;\; l^{Q\times Q}(q_0,q_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))$$

La sucesión de fibrados sobre Q/G

$$(Q\times G)/G \xrightarrow{F_1} (Q\times Q)/G \xrightarrow{F_2} Q/G \times Q/G$$

Es llamada **Sucesión de Atiyah Discreta**.

$$F_1(\pi^{Q\times G/G}(q_0,g_0)) = \pi^{Q\times Q/G}(q_0, l_{g_0}^Q q_1)$$

$$F_2(\pi^{Q\times Q}(q_0,q_1)) = (\pi(q_0), \pi(q_1))$$

Proposición

Sea $\mathcal{A}_d$ *una conexión discreta sobre* $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ *un* G*-fibrado principal existe una función* $\sigma_2 : Q/G \times Q/G \longrightarrow (Q \times Q)/G$ *con las siguientes propiedades*

(i) $\check{p}_1 \circ \sigma_2 = p_1$

(ii) $F_2 \circ \sigma_2 = Id_{Q/G \times Q/G}$

(iii) $\sigma_2(\Delta_{Q/G \times Q/G}) \subset \pi^{(Q \times Q)/G}(\Delta_{Q \times Q})$

Inversamente, dada una $\sigma_2 : Q/G \times Q/G \longrightarrow (Q \times Q)/G$ *tales que* $(i), (ii), (iii)$ *se satifacen, entonces existe una conexión discreta* $\mathcal{A}_d$.

Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta entonces se define,

$$\sigma_2 : Q/G \times Q/G \longrightarrow (Q \times Q)/G$$

$$\sigma_2(\pi(q_0), \pi(q_1)) := \pi^{Q \times Q/G}(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)^{-1} q_1)$$

Definición

Un grupoide sobre M es un conjunto $\mathcal{G}$ con las aplicaciones:

- *origen y final* $\alpha, \beta : \mathcal{G} \longrightarrow M$ *proyecciones.*
- *Una multiplicación* $m : \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}$, *con* $\mathcal{G}_2 := \{(g_1, g_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : \beta(g_1) = \alpha(g_2)\}$
- *Un mapa identidad* $\epsilon : M \longrightarrow \mathcal{G}$ $\epsilon(\alpha(g))g = g$ *y* $g\epsilon(\beta(g)) = g$
- *Un mapa inversión* $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$.

Sujeto a ciertas condiciones...

Un grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ es un grupoide de Lie si M y $\mathcal{G}$ son variedades suaves, α y β son submersiones suaves y los mapas m, ϵ, i son suaves.

$(Q \times G)/G$ tiene estructura de grupoide de Lie sobre Q/G

- Las aplicaciones origen y final,

$$\alpha(\pi^{Q\times G/G}(q,g)) = \pi(q) \;\text{ y }\; \beta(\pi^{Q\times G/G}(q,g)) = \pi(q),$$

$$\begin{aligned} ((Q\times G)/G)_2 &= \{(\pi^{Q\times G/G}(q_0,g_0), \pi^{Q\times G/G}(q_1,g_1)) : \pi(q_0) = \pi(q_1)\} \\ &= \{(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0), \pi^{Q\times G,G}(q_0,h_0)) : q_0 \in Q, g_0, h_0 \in G\} \end{aligned}$$

- La multiplicación,

$$m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0)), (\pi^{Q\times G,G}(q_0,h_0)) := \pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0h_0)$$

- La aplicación identidad $\epsilon : (Q/G) \to (Q\times G)/G$

$$\epsilon(\pi(q)) := \pi^{Q\times G,G}(q,e)$$

  e elemento neutro de el grupo de Lie G.

- La inversión $i : (Q\times G)/G \to (Q\times G)/G$

$$i(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) := \pi^{Q\times G,G}(q,g^{-1})$$

Sucesión de Atiyah Discreta

$(Q \times Q)/G$ tiene una estructura de grupoide de Lie sobre Q/G.

- Las aplicaciones origen y final son

$$\alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) := \pi(q_0) \text{ y } \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) := \pi(q_1)$$

$$\begin{aligned}(Q\times Q/G)_2 &= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_1',q_2')) : \pi(q_1)=\pi(q_1')\}\\ &= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2)) : g\in G, q_0,q_1,q_2\in Q\}\end{aligned}$$

- La multiplicación,

$$m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2)) := \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_2)$$

- Las aplicaciones identidad,

$$\epsilon(\pi(q_0)) := \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_0)$$

- La inversión,

$$i(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) := \pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_0)$$

Definición

Dado dos grupoides de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ *y* $\mathcal{G}' \rightrightarrows M'$, *un morfismo de grupoides de Lie consiste en un par de aplicaciones suaves,* $F : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ *y* $F_0 : M \longrightarrow M'$ *tales que* $\alpha' \circ F = F_0 \circ \alpha$, $\beta' \circ F = F_0 \circ \beta$ *y además* $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$ *para todo* $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_2$.

Definición

Sean los grupoides de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ *y* $\mathcal{G}' \rightrightarrows M'$. $F : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ *y* $F_0 : M \longrightarrow M'$ *un morfismo de grupoides de Lie. Se define el núcleo de* F *como*

$$Nuc(F) := \{g \in \mathcal{G} : F(g) = \epsilon'(m') \text{para algún } m' \in M'\}$$

Sucesión de Atiyah Discreta

$$(Q \times G)/G \xrightarrow{F_1} (Q \times Q)/G \xrightarrow{F_2} Q/G \times Q/G$$

- F_1 y F_2 junto a $Id : Q/G \longrightarrow Q/G$ resultan ser morfismo de grupoides de Lie.
- $F_2 \circ F_1(\pi^{Q\times G/G}(q,g)) = (\pi(q), \pi(q))$
- y también,

$$\begin{aligned} Nuc(F_2) &= \{\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1) : (\pi(q_0),\pi(q_1)) = (\pi(q),\pi(q)), \text{para algún } q \in Q\} \\ &= \{\pi^{Q\times Q,G}(q,gq) : q \in Q, g \in G\} \\ &= Im(F_1) \end{aligned}$$

Teorema

Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta simétrica con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$. Entonces $\sigma_2 : Q/G \times Q/G \to (Q \times Q)/G$ es un morfismo de grupoides de lie local si y sólo si $\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) = e$ localmente.

Sucesión de Atiyah Discreta

$$\sigma_2((\pi(q_0),\pi(q_1))\odot(\pi(q_1),\pi(q_2))) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_2)^{-1}q_2)$$

$$\sigma_2((\pi(q_0),\pi(q_1))\odot\sigma_2((\pi(q_1),\pi(q_2))) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1,q_2)^{-1}q_2)$$

Entonces,

$$\mathcal{A}_d(q_0,q_2)^{-1} = \mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1,q_2)^{-1}$$

$$\mathcal{B}_d(q_0,q_1,q_2) = \mathcal{A}_d(q_2,q_0)\mathcal{A}_d(q_1,q_2)\mathcal{A}_d(q_0,q_1) = e$$

GRACIAS!!