Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

María Emma Eyrea Irazú

Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

Septiembre 2017

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Definición 1.1

Un **sistema lagrangiano magnético** consiste en una terna $(\epsilon : P \to Q, L, \mathcal{B})$, donde P es el espacio total de configuraciones, $\epsilon : P \to Q$ es un fibrado, L es una función suave en el producto fibrado $TQ \times_Q P$ (independiente de las velocidades tangentes de las fibras de ϵ) y $\mathcal{B}$ es una 2-forma cerrada en P que se denomina **término de fuerza magnético**.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + k$.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + k$.
- $q = (q_i)$ con $i = 1, ..., n$ denota las coordenadas sobre Q y (q_i, p_a) con $a = 1, ..., k$ con $k < n$ denotan las coordenadas sobre P.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + k$.
- $q = (q_i)$ con $i = 1, ..., n$ denota las coordenadas sobre Q y (q_i, p_a) con $a = 1, ..., k$ con $k < n$ denotan las coordenadas sobre P.
- Las coordenadas inducidas en el producto fibrado $TQ \times_Q P$ están dadas por (q_i, v_i, p_a).

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + k$.
- $q = (q_i)$ con $i = 1, ..., n$ denota las coordenadas sobre Q y (q_i, p_a) con $a = 1, ..., k$ con $k < n$ denotan las coordenadas sobre P.
- Las coordenadas inducidas en el producto fibrado $TQ \times_Q P$ están dadas por (q_i, v_i, p_a).
- El lagrangiano es independiente de las velocidades en las coordenadas p_a, y luego puede interpretarse como un lagrangiano singular sobre el fibrado tangente TP.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + k$.
- $q = (q_i)$ con $i = 1, ..., n$ denota las coordenadas sobre Q y (q_i, p_a) con $a = 1, ..., k$ con $k < n$ denotan las coordenadas sobre P.
- Las coordenadas inducidas en el producto fibrado $TQ \times_Q P$ están dadas por (q_i, v_i, p_a).
- El lagrangiano es independiente de las velocidades en las coordenadas p_a, y luego puede interpretarse como un lagrangiano singular sobre el fibrado tangente TP.
- La **2-forma Magnética** $\mathcal{B}$ tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\mathbf{B}_{ij} dq_i \wedge dq_j + \mathbf{B}_{ia} dq_i \wedge dp_a + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{ab} dp_a \wedge dp_b.$$

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Notación 1

Abreviaremos por $T_P Q$ al producto fibrado $TQ \times_Q P$ y los puntos seran denotados por (v_q, p), donde $v_q \in T_q Q$ y $p \in P$ tal que $\epsilon(p) = q$.

Notación 2

Similarmente, el producto fibrado $T^*Q \times_Q P$ se abrevia como $T^*_P Q$ y los puntos en $T^*_P Q$ seran denotados por (α_q, p), donde $\alpha_q \in T^*_q Q$ y $p \in P$ tal que $\epsilon(p) = q$.

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Definición 1.2

Sea $(\epsilon : P \to Q, L, \mathcal{B})$ un Sistema Lagrangiano magnético. Se tiene definido entonces:

- $\pi_1 : T_P^* Q \to T^* Q$ es la proyección canónica dada por $\pi_1(\alpha_q, p) = \alpha_q$.
- $\pi_2 : T_P^* Q \to P$ es la proyección canónica dada por $\pi_2(\alpha_q, p) = p$.
- La *transformada de Legendre* correspondiente a L es la aplicación $\mathbb{F}L : T_P Q \to T_P^* Q$ definida como $\mathbb{F}L(v_q, p) = (\alpha_q, p)$ donde $\alpha_q \in T_q^* Q$ está unívocamente determinado por la relación

$$< \alpha_q, w_q >= \left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} L(v_q + u w_q, p),$$

para $w_q \in T_q Q$ arbitrario.

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Definición 1.3

La funcion **Energía del sistema lagrangiano magnético** $E_L : T_P Q \to \mathbb{R}$ está dada por

$$E_L(v_q, p) =< \mathbb{F}L(v_q, p), (v_q, p) > -L(v_q, p)$$

Aquí la contracción de un elemento $(\alpha_q, p) \in T_P^* Q$ con $(v_q, p) \in T_P Q$ es definida naturalmente como $< (\alpha_q, p), (v_q, p) > := < \alpha_q, v_q >$.

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Definición 1.3

La funcion **Energía del sistema lagrangiano magnético** $E_L : T_P Q \to \mathbb{R}$ está dada por

$$E_L(v_q, p) = < \mathbb{F}L(v_q, p), (v_q, p) > -L(v_q, p)$$

Aquí la contracción de un elemento $(\alpha_q, p) \in T_P^* Q$ con $(v_q, p) \in T_P Q$ es definida naturalmente como $< (\alpha_q, p), (v_q, p) > := < \alpha_q, v_q >$.

- $\omega_Q = d\theta_Q$ es la forma simpléctica canónica en $T^* Q$.
- $\pi_1^* \omega_Q + \pi_2^* \mathcal{B}$ es la 2-forma cerrada sobre $T_P^* Q$.
- Vía la transformada de Legendre se define

$$\Omega^{L,\mathcal{B}} := \mathbb{F}L^* (\pi_1^* \omega_Q + \pi_2^* \mathcal{B})$$

que es una 2-forma cerrada sobre $T_P Q$.

Expresión local de $\Omega^{L,\mathcal{B}}$ y dE_L

Las expresiones locales de la 2-forma $\Omega^{L,\mathcal{B}}$ y de la 1-forma dE_L son:

$$\Omega^{L,\mathcal{B}} = d\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) \wedge dq_i + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{ij} dq_i \wedge dq_j + \mathbf{B}_{ia} dq_i \wedge dp_a + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{ab} dp_a \wedge dp_b$$

$$dE_L = v_i d\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i - dL = v_i d\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial p_a} dp_a$$

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Definición 1.4

Una curva $p(t) \in P$ es **solución del sistema lagrangiano magnético** sii la curva inducida $\gamma(t) = (\dot{q}(t), p(t)) \subset T_P Q$, con $q(t) = \epsilon(p(t))$ para todo t satisface la ecuación

$$i_{\dot{\gamma}(t)} \Omega^{L,\mathcal{B}}(\gamma(t)) = -dE_L(\gamma(t))$$

Es decir, $p(t)$ es solucion sii $p(t)$ verifica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \mathbf{B}_{ij}\dot{q}_j + \mathbf{B}_{ia}\dot{p}_a$$

$$-\frac{\partial L}{\partial p_a} = -\mathbf{B}_{ia}\dot{q}_i + \mathbf{B}_{ab}\dot{p}_b$$

para $i = 1, ..., n$ y $a = 1, ..., k$

Sistemas Lagrangianos de Orden 1 con Términos Magnéticos

Definición 1.4

Una curva $p(t) \in P$ es **solución del sistema lagrangiano magnético** sii la curva inducida $\gamma(t) = (\dot{q}(t), p(t)) \subset T_P Q$, con $q(t) = \epsilon(p(t))$ para todo t satisface la ecuación

$$i_{\dot{\gamma}(t)} \Omega^{L,\mathcal{B}}(\gamma(t)) = -dE_L(\gamma(t))$$

Es decir, $p(t)$ es solucion sii $p(t)$ verifica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \mathbf{B}_{ij}\dot{q}_j + \mathbf{B}_{ia}\dot{p}_a$$

$$-\frac{\partial L}{\partial p_a} = -\mathbf{B}_{ia}\dot{q}_i + \mathbf{B}_{ab}\dot{p}_b$$

para $i = 1, ..., n$ y $a = 1, ..., k$
que son denominadas **Ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema lagrangiano magnético**

Elementos de la la Mecánica de Orden Superior

Sea Q una variedad de dimension n. Para definir el fibrado tangente de orden superior consideremos:

Elementos de la la Mecánica de Orden Superior

Sea Q una variedad de dimension n. Para definir el fibrado tangente de orden superior consideremos:

Definición 2.1

Dado $q \in Q$. Definimos la relación de equivalencia en $C^\infty(\mathbb{R}, Q) = \{$curvas suaves de $\mathbb{R}$ a $Q\}$ de la siguiente manera:
dadas $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ en $C^\infty(\mathbb{R}, Q)$ si $a \in \mathbb{R}^+$ y $t \in (-a, a)$ decimos que tienen un *contacto de orden k* en $q_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ si para cualquier carta local (φ, U) de Q tal que $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in U$, $\forall s = 0, ..., k$, se tiene que:

$$\frac{d^s}{dt^s}(\varphi \circ \gamma_1(t)) = \frac{d^s}{dt^s}(\varphi \circ \gamma_2(t))$$

Denotamos por $[\gamma(t)]_0^k$ a la clase de equivalencia de γ.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.2

Definimos T^kQ como el conjunto de las clases de equivalencia $[\gamma(t)]_0^k$ que tiene estructura de variedad diferenciable.
Luego los elementos de T^kQ tienen la forma $[\gamma]_0^k$ y entonces en coordenadas pueden ser escritos como:

$$(q_1^{(0)}, ..., q_n^{(0)}, q_1^{(1)}, ..., q_n^{(1)}, ..., q_1^{(k)}, ..., q_n^{(k)})$$

por lo que $dim(T^kQ) = n.(k+1)$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.2

Definimos T^kQ como el conjunto de las clases de equivalencia $[\gamma(t)]_0^k$ que tiene estructura de variedad diferenciable.
Luego los elementos de T^kQ tienen la forma $[\gamma]_0^k$ y entonces en coordenadas pueden ser escritos como:

$$(q_1^{(0)}, ..., q_n^{(0)}, q_1^{(1)}, ..., q_n^{(1)}, ..., q_1^{(k)}, ..., q_n^{(k)})$$

por lo que $dim(T^kQ) = n.(k+1)$.

Observación 2.3

Podemos escribir también las coordenadas anteriores de la siguiente manera:
Si $q \in Q$ entonces $(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^{(k)}) \in T^kQ$, donde $q^{(l)}$ denota la derivada de orden l y, como es usual, $q^{(0)} = q$, $q^{(1)} = \dot{q}$ y $q^{(2)} = \ddot{q}$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.4

El **Fibrado Tangente de orden** k **sobre** Q es la aplicación $\tau_Q^k : T^kQ \to Q$ dada por $\tau_Q^k([\gamma]_0^k) = \gamma(0) = q_0$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.4

El **Fibrado Tangente de orden** k **sobre** Q es la aplicación $\tau_Q^k : T^kQ \to Q$ dada por $\tau_Q^k([\gamma]_0^k) = \gamma(0) = q_0$.

Observación 2.5

- $\tau_Q^1 = TQ$ es el fibrado tangente.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.4

El **Fibrado Tangente de orden** k **sobre** Q es la aplicación $\tau_Q^k : T^kQ \to Q$ dada por $\tau_Q^k([\gamma]_0^k) = \gamma(0) = q_0$.

Observación 2.5

- $\tau_Q^1 = TQ$ es el fibrado tangente.
- $\tau_Q^0 = Q$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.4

El **Fibrado Tangente de orden** k **sobre** Q es la aplicación $\tau_Q^k : T^k Q \to Q$ dada por $\tau_Q^k([\gamma]_0^k) = \gamma(0) = q_0$.

Observación 2.5

- $\tau_Q^1 = TQ$ es el fibrado tangente.
- $\tau_Q^0 = Q$.
- De ahora en más usaremos la expresión $(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^{(k)})$ para hablar de $[\gamma]_0^{(k)}$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.6

Un **Sistema Lagrangiano de orden k** es un par (Q, L) donde Q es una variedad diferenciable y $L : T^k Q \to \mathbb{R}$ es una aplicación suave, es decir

$$L([\gamma]_0^{(k)}) = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^{(k)})$$

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.6

Un **Sistema Lagrangiano de orden k** es un par (Q, L) donde Q es una variedad diferenciable y $L : T^kQ \to \mathbb{R}$ es una aplicación suave, es decir

$$L([\gamma]_0^{(k)}) = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^{(k)})$$

Para escribir las ecuaciones de movimiento de un Sistema Lagrangiano de orden superior a partir de un principio variacional vamos a definir:

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Consideremos la acción $\mathcal{A}$ dada por

$$\mathcal{A}(q(t)) := \int_0^1 L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), ..., q^{(k)}(t))dt$$

donde $q(t) \in \mathcal{C}^{2k}([0,1], Q)$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Consideremos la acción $\mathcal{A}$ dada por

$$\mathcal{A}(q(t)) := \int_0^1 L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), ..., q^{(k)}(t))dt$$

donde $q(t) \in \mathcal{C}^{2k}([0,1], Q)$.

El principio de Hamilton establece que una curva $q(t) \in \mathcal{C}^{2k}([0,1], Q)$ es una solución del sistema lagrangiano sí y sólo sí $q(t)$ es punto crítico de $\mathcal{A}$. Para encontrar dichos puntos necesitamos caracterizar las curvas $q(t)$ tales que $d\mathcal{A}(q(t)).(X) = 0$, $\forall X \in T_{q(t)}\mathcal{C}^{2k}([0,1], Q)$.

Elementos de la Mecánica de Orden Superior

Definición 2.7

Las ecuaciones de movimiento son llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior* y pueden ser escritas como

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(j)}}\right) = 0$$

Expresiones locales

- Θ_L es la única 1-forma en $T^{(k)}Q$ que tiene la forma

$$\Theta_L = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{p}i(l).dq_i^{(l)}.$$

  donde $\hat{p}i(l)$ son los *momentos generalizados de Jacobi-ostrogradski*.

- Usando el hecho de que $\Omega_L = -d\Theta_L$, se obtiene la 2-forma cerrada definida como

$$\Omega_L = \sum_{l=0}^{k-1} dq_i^{(l)} \wedge \hat{p}i(l)$$

- Ω_L es simpléctica cuando $det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_j^{(l-1)} dq_i^{(l-1)}}\right) \neq 0$

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.1

Un **sistema lagrangiano magnético de orden k** consiste en una terna $(\epsilon : P \to Q, L^k, \mathcal{B})$, donde P es el espacio de configuración del sistema, $\epsilon : P \to Q$ es un fibrado, L^k es una función suave en el producto fibrado $T^kQ \times_Q P$ y $\mathcal{B}$ es una 2-forma cerrada en P que se denomina término de fuerza magnético.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + l$.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + l$.
- $(q_i, p^a) = (q_1, ..., q_n, p^1, ..., p^l)$ para $i = 1, ..., n$ y $a = 1, ..., l$ con $l < n$ denotan las coordenadas sobre P.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + l$.
- $(q_i, p^a) = (q_1, ..., q_n, p^1, ..., p^l)$ para $i = 1, ..., n$ y $a = 1, ..., l$ con $l < n$ denotan las coordenadas sobre P.
- Las coordenadas del fibrado T^kQ seran están dadas por $(q_1^{(0)}, ..., q_n^{(0)}, q_1^{(1)}, ..., q_n^{(1)}, ..., q_1^{(k)}, ..., q_n^{(k)})$.

Descripción local

- Supongamos que $\dim Q = n$ y $\dim P = n + l$.
- $(q_i, p^a) = (q_1, ..., q_n, p^1, ..., p^l)$ para $i = 1, ..., n$ y $a = 1, ..., l$ con $l < n$ denotan las coordenadas sobre P.
- Las coordenadas del fibrado T^kQ seran están dadas por $(q_1^{(0)}, ..., q_n^{(0)}, q_1^{(1)}, ..., q_n^{(1)}, ..., q_1^{(k)}, ..., q_n^{(k)})$.
- Las coordenadas inducidas en el fibrado $T^kQ \times_Q P$ son de la forma $(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k)}, p^a)$; es decir, $(q_1^{(0)}, ..., q_n^{(0)}, q_1^{(1)}, ..., q_n^{(1)}, ..., q_1^{(k)}, ..., q_n^{(k)}, p^1, ..., p^l)$.

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.2

El lagrangiano L^k es localmente expresado como una función de $(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k)}, p^a)$, donde $L^k : T^k Q \times_Q P \to \mathbb{R}$.

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.2

El lagrangiano L^k es localmente expresado como una función de $(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k)}, p^a)$, donde $L^k : T^kQ \times_Q P \to \mathbb{R}$.

Definición 3.3

Asumimos que el sistema lagrangiano magnético $(\epsilon : P \to Q, L^k, \mathcal{B})$ esta dado, sean entonces:

1. Definimos para $i = 1, ..., k-1$ los momentos de Ostrodradsky de la siguiente manera

$$\hat{p}_i := \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L}{\partial q_r^{(i+j+1)}} \right)$$

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.2

El lagrangiano L^k es localmente expresado como una función de $(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k)}, p^a)$, donde $L^k : T^kQ \times_Q P \to \mathbb{R}$.

Definición 3.3

Asumimos que el sistema lagrangiano magnético $(\epsilon : P \to Q, L^k, \mathcal{B})$ esta dado, sean entonces:

1. Definimos para $i = 1, ..., k-1$ los momentos de Ostrodradsky de la siguiente manera

$$\hat{p}_i := \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L}{\partial q_r^{(i+j+1)}} \right)$$

2. Sea $\pi_1^k : T^*(T^{k-1}Q) \times_Q P \to T^*(T^{k-1}Q)$ la proyección dada por $\pi_1^k(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}, p^a) = (q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1})$.

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.4

1. Sea $\pi_2^k : T^*(T^{k-1}Q) \times_Q P \to P$ la proyección dada por $\pi_2^k(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}, p^a) = p^a$

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.4

1. Sea $\pi_2^k : T^*(T^{k-1}Q) \times_Q P \to P$ la proyección dada por $\pi_2^k(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}, p^a) = p^a$
2. La transformada de Ostrogradski-Legendre correspondiente a L^k esta dada por

$$\mathbb{F}L^k : T^{2k-1}Q \times_Q P \to T^*(T^{k-1}Q) \times_Q P$$

definida como

$$\mathbb{F}L^k(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(2k-1)}, p^a) = (q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}, p^a)$$

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.5

1. Definimos la contracción de un elemento $(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}, p^a) \in T^*(T^{k-1}Q) \times_Q P$ con $(q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(2k-1)}, p^a) \in T^{2k-1}Q \times_Q P$ como:

$$\langle (q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}, p^a), (q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(2k-1)}, p^a) \rangle :=$$

$$\langle (q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(k-1)}, \hat{p}_0, ..., \hat{p}_{k-1}), (q^{(0)}, q^{(1)}, ..., q^{(2k-1)}) \rangle$$

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.5

1. Definimos la contracción de un elemento $(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}_0, \dots, \hat{p}_{k-1}, p^a) \in T^*(T^{k-1}Q) \times_Q P$ con $(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}, p^a) \in T^{2k-1}Q \times_Q P$ como:

$$\langle (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}_0, \dots, \hat{p}_{k-1}, p^a), (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}, p^a) \rangle :=$$

$$\langle (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, \hat{p}_0, \dots, \hat{p}_{k-1}), (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}) \rangle$$

2. La función Energía $E_L^k : T^{2k-1}Q \times_Q P \to \mathbb{R}$ está dada por

$$E_L^k = \left\langle \mathbb{F}L^k(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}, p^a), (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(2k-1)}, p^a) \right\rangle -$$

$$L^k(q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, p^a)$$

Sistemas Lagrangianos de Orden Superior con Términos Magnéticos

Definición 3.6

Sea $\omega_Q = d\theta_Q$ la forma simpléctica canónica en $T^*(T^{k-1}Q)$. Definimos la 2-forma cerrada en $T^{2k-1}Q \times_Q P$ de la siguiente manera:

$$\Omega^{L^k,\mathcal{B}} := (\mathbb{F}L^k)^*((\pi_1^k)^*\omega_Q + (\pi_2^k)^*\mathcal{B})$$

MUCHAS GRACIAS