Teoría de Hamilton-Jacobi e integrabilidad por cuadraturas en variedades simplécticas y de Poisson

Sergio Grillo

Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche

27 de septiembre de 2017

Encuentro Argentino de Mecánica Geométrica y Física Matemática,
Mar del Plata

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función.

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H si cumple $d\,(H \circ dW) = 0$.

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H si cumple $d\,(H \circ dW) = 0$. También se dice que una sección $\sigma : Q \to T^*Q$ (del fibrado cotangente) es solución de la ecuación clásica si

$$d\,(H \circ \sigma) = 0$$

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H si cumple $d\left(H \circ dW\right) = 0$. También se dice que una sección $\sigma : Q \to T^*Q$ (del fibrado cotangente) es solución de la ecuación clásica si

$$d\left(H \circ \sigma\right) = 0$$

y además $\sigma^* \omega_Q = d\sigma = 0$, siendo ω_Q la forma simpléctica canónica de T^*Q.

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H si cumple $d\,(H \circ dW) = 0$. También se dice que una sección $\sigma : Q \to T^*Q$ (del fibrado cotangente) es solución de la ecuación clásica si

$$d\,(H \circ \sigma) = 0$$

y además $\sigma^*\omega_Q = d\sigma = 0$, siendo ω_Q la forma simpléctica canónica de T^*Q. Notar que $\mathrm{Im}\sigma$ es una subvariedad *isotrópica*: $T\mathrm{Im}\sigma \subseteq (T\mathrm{Im}\sigma)^{\perp}$ (más aún, es *Lagrangiana*).

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H si cumple $d\,(H \circ dW) = 0$.
También se dice que una sección $\sigma : Q \to T^*Q$ (del fibrado cotangente) es solución de la ecuación clásica si

$$d\,(H \circ \sigma) = 0$$

y además $\sigma^*\omega_Q = d\sigma = 0$, siendo ω_Q la forma simpléctica canónica de T^*Q. Notar que $\mathrm{Im}\sigma$ es una subvariedad *isotrópica*: $T\mathrm{Im}\sigma \subseteq (T\mathrm{Im}\sigma)^{\perp}$ (más aún, es *Lagrangiana*).
Es posible reescribir la ecuación de arriba en términos de X_H, el campo Hamiltoniano de H, y la proyección canónica $\pi_Q : T^*Q \to Q$.

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi

Sea Q una variedad y $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $W : Q \to \mathbb{R}$ es *solución de la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi* (independiente del tiempo) para H si cumple $d\,(H \circ dW) = 0$.
También se dice que una sección $\sigma : Q \to T^*Q$ (del fibrado cotangente) es solución de la ecuación clásica si

$$d\,(H \circ \sigma) = 0$$

y además $\sigma^*\omega_Q = d\sigma = 0$, siendo ω_Q la forma simpléctica canónica de T^*Q. Notar que $\mathrm{Im}\sigma$ es una subvariedad *isotrópica*: $T\mathrm{Im}\sigma \subseteq (T\mathrm{Im}\sigma)^\perp$ (más aún, es *Lagrangiana*).
Es posible reescribir la ecuación de arriba en términos de X_H, el campo Hamiltoniano de H, y la proyección canónica $\pi_Q : T^*Q \to Q$. Se obtiene

$$\sigma_* \circ (\pi_Q)_* \circ X_H \circ \sigma = X_H \circ \sigma.$$

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración.

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma.$$

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma.$$

Esto equivale a decir que $Im\sigma$ es X-invariante,

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma.$$

Esto equivale a decir que $Im\sigma$ es X-invariante, y que

$$X^\sigma := \Pi_* \circ X \circ \sigma \in \mathfrak{X}(N)$$

está σ-relacionado con X,

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma.$$

Esto equivale a decir que $Im\sigma$ es X-invariante, y que

$$X^\sigma := \Pi_* \circ X \circ \sigma \in \mathfrak{X}(N)$$

está σ-relacionado con X, i.e.

$$\sigma_* \circ X^\sigma = X \circ \sigma.$$

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma.$$

Esto equivale a decir que $Im\sigma$ es X-invariante, y que

$$X^\sigma := \Pi_* \circ X \circ \sigma \in \mathfrak{X}(N)$$

está σ-relacionado con X, i.e.

$$\sigma_* \circ X^\sigma = X \circ \sigma.$$

En consecuencia, si hallamos $\gamma(t)$ trayectoria de X^σ,

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Ecuación generalizada de Hamilton-Jacobi (HJE)

Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Pi : M \to N$ una fibración. Diremos que una sección $\sigma : N \to M$ de Π es una **solución**[1] **de la Π-HJE para** (M, X) si

$$\sigma_* \circ \Pi_* \circ X \circ \sigma = X \circ \sigma.$$

Esto equivale a decir que $Im\sigma$ es X-invariante, y que

$$X^\sigma := \Pi_* \circ X \circ \sigma \in \mathfrak{X}(N)$$

está σ-relacionado con X, i.e.

$$\sigma_* \circ X^\sigma = X \circ \sigma.$$

En consecuencia, si hallamos $\gamma(t)$ trayectoria de X^σ, la curva $\sigma(\gamma(t))$ es trayectoria de X.

[1] S. Grillo, E. Padrón, Journal of Geometry and Physics 110 (2016) 101–129.

Expresiones locales.

Expresiones locales. En coordenadas de M y N adaptadas a Π,

Expresiones locales. En coordenadas de M y N adaptadas a Π, si escribimos $\sigma(n) = (n, \hat{\sigma}(n))$ y $X(m) = \left(m, \hat{X}(m)\right)$,

Expresiones locales. En coordenadas de M y N adaptadas a Π, si escribimos $\sigma(n) = (n, \hat{\sigma}(n))$ y $X(m) = \left(m, \hat{X}(m)\right)$, la Π-HJE para (M, X) se lee

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{X}_i(n, \hat{\sigma}(n)) \frac{\partial \hat{\sigma}^j(n)}{\partial n_i} = \hat{X}_{k+j}(n, \hat{\sigma}(n)), \quad j = 1, ..., d-k,$$

siendo $d = \dim M$ y $k = \dim N$.

Expresiones locales. En coordenadas de M y N adaptadas a Π, si escribimos $\sigma(n) = (n, \hat{\sigma}(n))$ y $X(m) = \left(m, \hat{X}(m)\right)$, la Π-HJE para (M, X) se lee

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{X}_i(n, \hat{\sigma}(n)) \, \frac{\partial \hat{\sigma}^j(n)}{\partial n_i} = \hat{X}_{k+j}(n, \hat{\sigma}(n)), \quad j = 1, ..., d-k,$$

siendo $d = \dim M$ y $k = \dim N$. Y dada un solución $\hat{\sigma}$ de la ecuación anterior,

Expresiones locales. En coordenadas de M y N adaptadas a Π, si escribimos $\sigma(n) = (n, \hat{\sigma}(n))$ y $X(m) = \left(m, \hat{X}(m)\right)$, la Π-HJE para (M, X) se lee

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{X}_i(n, \hat{\sigma}(n)) \frac{\partial \hat{\sigma}^j(n)}{\partial n_i} = \hat{X}_{k+j}(n, \hat{\sigma}(n)), \quad j = 1, ..., d-k,$$

siendo $d = \dim M$ y $k = \dim N$. Y dada un solución $\hat{\sigma}$ de la ecuación anterior, si hallamos $n(t)$ tal que

$$\dot{n}_i(t) = \hat{X}_i(n(t), \hat{\sigma}(n(t))),$$

Expresiones locales. En coordenadas de M y N adaptadas a Π, si escribimos $\sigma(n) = (n, \hat{\sigma}(n))$ y $X(m) = \left(m, \hat{X}(m)\right)$, la Π-HJE para (M, X) se lee

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{X}_i(n, \hat{\sigma}(n)) \, \frac{\partial \hat{\sigma}^j(n)}{\partial n_i} = \hat{X}_{k+j}(n, \hat{\sigma}(n)), \quad j = 1, ..., d-k,$$

siendo $d = \dim M$ y $k = \dim N$. Y dada un solución $\hat{\sigma}$ de la ecuación anterior, si hallamos $n(t)$ tal que

$$\dot{n}_i(t) = \hat{X}_i(n(t), \hat{\sigma}(n(t))),$$

luego $m(t) = (n(t), \hat{\sigma}(n(t)))$ es trayectoria de X.

Soluciones completas

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \Lambda = d - k =: l$,

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \Lambda = d - k =: l$, una función $\Sigma : N \times \Lambda \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si:

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si:
$\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X),

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si:
$\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X), Σ es sobreyectiva

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si: $\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X), Σ es sobreyectiva y Σ es un difeo local.

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si: $\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X), Σ es sobreyectiva y Σ es un difeo local.

Esto nos da, localmente, una foliación de M en subvariedades X-invariantes: $\mathrm{Im}\sigma_\lambda$, $\lambda \in \mathit{\Lambda}$.

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si: $\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X), Σ es sobreyectiva y Σ es un difeo local.

Esto nos da, localmente, una foliación de M en subvariedades X-invariantes: $\mathrm{Im}\sigma_\lambda$, $\lambda \in \mathit{\Lambda}$. Cada trayectoria de X puede escribirse a partir de una trayectoria $\gamma(t)$ de X^{σ_λ}, para algún $\lambda \in \mathit{\Lambda}$, como $\Sigma(\gamma(t), \lambda) = \sigma_\lambda(\gamma(t))$.

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si: $\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X), Σ es sobreyectiva y Σ es un difeo local.

Esto nos da, localmente, una foliación de M en subvariedades X-invariantes: $\mathrm{Im}\sigma_\lambda$, $\lambda \in \mathit{\Lambda}$. Cada trayectoria de X puede escribirse a partir de una trayectoria $\gamma(t)$ de X^{σ_λ}, para algún $\lambda \in \mathit{\Lambda}$, como $\Sigma(\gamma(t), \lambda) = \sigma_\lambda(\gamma(t))$. En términos locales, Σ define coordenadas $(n_1, ..., n_k, \lambda_1, ..., \lambda_l)$ de M en las cuales

$$X(n, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} f_i(n, \lambda) \frac{\partial}{\partial n_i}.$$

Soluciones completas

Dada Λ, con $\dim \mathit{\Lambda} = d - k =: l$, una función $\mathit{\Sigma} : N \times \mathit{\Lambda} \to M$ es una **solución completa de la Π-HJE para** (M, X) si: $\sigma_\lambda : N \to M : n \mapsto \sigma_\lambda(n) := \Sigma(n, \lambda)$ es solución **(parcial)** de la Π-HJE para (M, X), Σ es sobreyectiva y Σ es un difeo local.

Esto nos da, localmente, una foliación de M en subvariedades X-invariantes: $\mathrm{Im}\sigma_\lambda$, $\lambda \in \mathit{\Lambda}$. Cada trayectoria de X puede escribirse a partir de una trayectoria $\gamma(t)$ de X^{σ_λ}, para algún $\lambda \in \mathit{\Lambda}$, como $\Sigma(\gamma(t), \lambda) = \sigma_\lambda(\gamma(t))$. En términos locales, Σ define coordenadas $(n_1, ..., n_k, \lambda_1, ..., \lambda_l)$ de M en las cuales

$$X(n, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} f_i(n, \lambda) \frac{\partial}{\partial n_i}.$$

Por ende, las ecuaciones de movimiento en ellas se leen

$$\dot{n}_i(t) = f_i(n(t), \lambda(t)), \quad \dot{\lambda}_i(t) = 0.$$

En términos de las proyecciones naturales

$$p_N : N \times \Lambda \to N \quad y \quad p_\Lambda : N \times \Lambda \to \Lambda,$$

En términos de las proyecciones naturales

$$p_N : N \times \Lambda \to N \quad y \quad p_\Lambda : N \times \Lambda \to \Lambda,$$

puede verse que un difeo local sobreyectivo Σ es solución completa de la Π-HJE para (M, X) si y sólo si

En términos de las proyecciones naturales

$$p_N : N \times \Lambda \to N \quad y \quad p_\Lambda : N \times \Lambda \to \Lambda,$$

puede verse que un difeo local sobreyectivo Σ es solución completa de la Π-HJE para (M, X) si y sólo si

$$\Pi \circ \Sigma = p_N \quad y \quad \Sigma_* \circ X^\Sigma = X \circ \Sigma,$$

En términos de las proyecciones naturales

$$p_N : N \times \Lambda \to N \quad y \quad p_\Lambda : N \times \Lambda \to \Lambda,$$

puede verse que un difeo local sobreyectivo Σ es solución completa de la Π-HJE para (M, X) si y sólo si

$$\mathit{\Pi} \circ \Sigma = p_N \quad y \quad \Sigma_* \circ X^\Sigma = X \circ \Sigma,$$

donde $X^\Sigma \in \mathfrak{X}(N \times \Lambda)$ es el único campo que cumple

$$(p_\Lambda)_* \circ X^\Sigma = 0 \quad y \quad (p_N)_* \circ X^\Sigma = \Pi_* \circ X \circ \mathit{\Sigma}.$$

En términos de las proyecciones naturales

$$p_N : N \times \Lambda \to N \quad y \quad p_\Lambda : N \times \Lambda \to \Lambda,$$

puede verse que un difeo local sobreyectivo Σ es solución completa de la Π-HJE para (M, X) si y sólo si

$$\mathit{\Pi} \circ \Sigma = p_N \quad y \quad \Sigma_* \circ X^\Sigma = X \circ \Sigma,$$

donde $X^\Sigma \in \mathfrak{X}\,(N \times \Lambda)$ es el único campo que cumple

$$(p_\Lambda)_* \circ X^\Sigma = 0 \quad y \quad (p_N)_* \circ X^\Sigma = \Pi_* \circ X \circ \mathit{\Sigma}.$$

En otras palabras,

$$X^\Sigma\,(n, \lambda) = (X^{\sigma_\lambda}\,(n)\,, 0) \in T_n N \times T_\lambda \Lambda.$$

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado.

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado. Fijemos también una fibración $\Pi : M \to N$.

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado. Fijemos también una fibración $\Pi : M \to N$.

Es fácil ver que, dada Λ como arriba, un difeo local surjectivo Σ es solución completa si y sólo si

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado. Fijemos también una fibración $\Pi : M \to N$.
Es fácil ver que, dada Λ como arriba, un difeo local surjectivo Σ es solución completa si y sólo si $\Pi \circ \Sigma = p_N$ y

$$d\,(H \circ \Sigma) = \mathrm{i}_{X_H^{\Sigma}} \Sigma^* \omega,$$

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado. Fijemos también una fibración $\Pi : M \to N$.

Es fácil ver que, dada Λ como arriba, un difeo local surjectivo Σ es solución completa si y sólo si $\Pi \circ \Sigma = p_N$ y

$$d\left(H \circ \Sigma\right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \Sigma^* \omega,$$

lo cual implica que

$$d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado. Fijemos también una fibración $\Pi : M \to N$.
Es fácil ver que, dada Λ como arriba, un difeo local surjectivo Σ es solución completa si y sólo si $\Pi \circ \Sigma = p_N$ y

$$d\left(H \circ \Sigma\right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \Sigma^* \omega,$$

lo cual implica que

$$d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Luego, Σ es un simplectomorfismo entre $(N \times \Lambda, \Sigma^* \omega)$ y (M, ω),

Restricción a variedades simplécticas (y de Poisson)

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ una función y X_H su campo Hamiltoniano asociado. Fijemos también una fibración $\Pi : M \to N$.

Es fácil ver que, dada Λ como arriba, un difeo local surjectivo Σ es solución completa si y sólo si $\Pi \circ \Sigma = p_N$ y

$$d\,(H \circ \Sigma) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \Sigma^* \omega,$$

lo cual implica que

$$d\,(H \circ \sigma_\lambda) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Luego, Σ es un simplectomorfismo entre $(N \times \Lambda, \Sigma^* \omega)$ y (M, ω), y $X_H^\Sigma \in \mathfrak{X}\,(N \times \Lambda)$ es un campo Hamiltoniano con función $H \circ \Sigma$.

Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_\lambda^*\omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_\lambda^* \omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Si $M = T^*Q$, $\omega = \omega_Q$ y $\Pi = \pi_Q : T^*Q \to Q$, Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_{\lambda}^{*}\omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Si $M = T^{*}Q$, $\omega = \omega_{Q}$ y $\Pi = \pi_{Q} : T^{*}Q \to Q$, las soluciones isotrópicas están dadas por formas $\sigma_{\lambda} \in \Omega^{1}(Q)$ tales que

Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_\lambda^* \omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Si $M = T^*Q$, $\omega = \omega_Q$ y $\Pi = \pi_Q : T^*Q \to Q$, las soluciones isotrópicas están dadas por formas $\sigma_\lambda \in \Omega^1(Q)$ tales que

$$d(H \circ \sigma_\lambda) = 0 \quad y \quad d\sigma_\lambda = 0 :$$

las soluciones clásicas.

Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_{\lambda}^{*}\omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Si $M = T^{*}Q$, $\omega = \omega_{Q}$ y $\Pi = \pi_{Q} : T^{*}Q \to Q$, las soluciones isotrópicas están dadas por formas $\sigma_{\lambda} \in \Omega^{1}(Q)$ tales que

$$d\left(H \circ \sigma_{\lambda}\right) = 0 \quad y \quad d\sigma_{\lambda} = 0 :$$

las soluciones clásicas.

Volvamos a la situación general, con (M, ω), H y Π arbitrarios.

Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_\lambda^* \omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Si $M = T^*Q$, $\omega = \omega_Q$ y $\Pi = \pi_Q : T^*Q \to Q$, las soluciones isotrópicas están dadas por formas $\sigma_\lambda \in \Omega^1(Q)$ tales que

$$d(H \circ \sigma_\lambda) = 0 \quad y \quad d\sigma_\lambda = 0 :$$

las soluciones clásicas.

Volvamos a la situación general, con (M, ω), H y Π arbitrarios.

Teorema

Si conocemos una solución isotrópica Σ, luego podemos integrar (M, X_H) a menos de cuadraturas

Diremos que Σ es **isotrópica** si $\sigma_\lambda^* \omega = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Si $M = T^*Q$, $\omega = \omega_Q$ y $\Pi = \pi_Q : T^*Q \to Q$, las soluciones isotrópicas están dadas por formas $\sigma_\lambda \in \Omega^1(Q)$ tales que

$$d(H \circ \sigma_\lambda) = 0 \quad y \quad d\sigma_\lambda = 0:$$

las soluciones clásicas.

Volvamos a la situación general, con (M, ω), H y Π arbitrarios.

Teorema

Si conocemos una solución isotrópica Σ, luego podemos integrar (M, X_H) a menos de cuadraturas (i.e. encontrar las trayectorias explícitamente, a menos de inversas y primitivas de funciones conocidas).

Lema 1

Si $\omega = -d\theta$ *y* N *es conexo y simplemente conexo,*

Lema 1

Si $\omega = -d\theta$ *y* N *es conexo y simplemente conexo, existen funciones* $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *y* $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$L_{X_H^\Sigma}(dW - \Sigma^*\theta) = p_\Lambda^* dh.$$

Lema 1

Si $\omega = -d\theta$ *y* N *es conexo y simplemente conexo, existen funciones* $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *y* $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Lema 2

La función $\varphi : N \times \Lambda \to T^*\Lambda$ *tal que*

$$\left\langle \varphi\left(n, \lambda\right), z\right\rangle := \left\langle \left(dW - \Sigma^*\theta\right)\left(n, \lambda\right), \left(0, z\right)\right\rangle, \quad \forall z \in T_\lambda\Lambda,$$

es una inmersión.

Lema 1

Si $\omega = -d\theta$ *y* N *es conexo y simplemente conexo, existen funciones* $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *y* $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Lema 2

La función $\varphi : N \times \Lambda \to T^*\Lambda$ *tal que*

$$\langle \varphi\left(n, \lambda\right), z \rangle := \langle \left(dW - \Sigma^*\theta\right)\left(n, \lambda\right), \left(0, z\right) \rangle, \quad \forall z \in T_\lambda \Lambda,$$

es una inmersión. (Es un difeo local si $\dim N = \dim \Lambda$*.)*

Lema 1

Si $\omega = -d\theta$ *y* N *es conexo y simplemente conexo, existen funciones* $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *y* $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$L_{X_H^\Sigma} (dW - \Sigma^* \theta) = p_\Lambda^* dh.$$

Lema 2

La función $\varphi : N \times \Lambda \to T^* \Lambda$ *tal que*

$$\langle \varphi (n, \lambda) , z \rangle := \langle (dW - \Sigma^* \theta) (n, \lambda) , (0, z) \rangle , \quad \forall z \in T_\lambda \Lambda,$$

es una inmersión. (Es un difeo local si $\dim N = \dim \Lambda$*.)*

Lema 3

Dado $\lambda \in \Lambda$*, una curva* $\gamma : I \to N$ *es curva integral de* X^{σ_λ} *si y sólo si,*

Lema 1

Si $\omega = -d\theta$ *y* N *es conexo y simplemente conexo, existen funciones* $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *y* $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$L_{X_H^{\Sigma}} (dW - \Sigma^* \theta) = p_\Lambda^* dh.$$

Lema 2

La función $\varphi : N \times \Lambda \to T^*\Lambda$ *tal que*

$$\langle \varphi (n, \lambda), z \rangle := \langle (dW - \Sigma^* \theta)(n, \lambda), (0, z) \rangle, \quad \forall z \in T_\lambda \Lambda,$$

es una inmersión. (Es un difeo local si $\dim N = \dim \Lambda$.*)*

Lema 3

Dado $\lambda \in \Lambda$*, una curva* $\gamma : I \to N$ *es curva integral de* X^{σ_λ} *si y sólo si, para algún* $t_0 \in I$*, se tiene que*

$$\varphi (\gamma (t), \lambda) = \varphi (\gamma (t_0), \lambda) + (t - t_0) \; dh (\lambda).$$

Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y Π es Lagrangiano (i.e. $\ker \Pi_* = (\ker \Pi_*)^{\perp}$), Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y Π es Lagrangiano (i.e. $\ker \Pi_* = (\ker \Pi_*)^\perp$), luego φ define un simplectomorfismo entre (M, ω) y $(T^*\Lambda, \omega_\Lambda)$ que relaciona X_H con $X_{h \circ \pi_\Lambda}$, Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y Π es Lagrangiano (i.e. $\ker \Pi_* = (\ker \Pi_*)^\perp$), luego φ define un simplectomorfismo entre (M, ω) y $(T^*\Lambda, \omega_\Lambda)$ que relaciona X_H con $X_{h \circ \pi_\Lambda}$, siendo $\pi_\Lambda : T^*\Lambda \to \Lambda$ la proyección canónica.

Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y $\mathit{\Pi}$ es Lagrangiano (i.e. $\ker \mathit{\Pi}_* = (\ker \mathit{\Pi}_*)^{\perp}$), luego φ define un simplectomorfismo entre (M, ω) y $(T^*\Lambda, \omega_\Lambda)$ que relaciona X_H con $X_{h \circ \pi_\Lambda}$, siendo $\pi_{\mathit{\Lambda}} : T^*\Lambda \to \Lambda$ la proyección canónica. O sea, φ define un "cambio de variables canónicas" en las que el nuevo Hamiltoniano sólo depende de la "posición."

Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y Π es Lagrangiano (i.e. $\ker \Pi_* = (\ker \Pi_*)^\perp$), luego φ define un simplectomorfismo entre (M, ω) y $(T^*\Lambda, \omega_\Lambda)$ que relaciona X_H con $X_{h\circ\pi_\Lambda}$, siendo $\pi_\Lambda : T^*\Lambda \to \Lambda$ la proyección canónica. O sea, φ define un "cambio de variables canónicas" en las que el nuevo Hamiltoniano sólo depende de la "posición."

Si ahora tenemos una variedad de Poisson (M, Ξ), una función H, una fibración Π y una solución completa Σ tal que

Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y Π es Lagrangiano (i.e. $\ker \Pi_* = (\ker \Pi_*)^\perp$), luego φ define un simplectomorfismo entre (M, ω) y $(T^*\Lambda, \omega_\Lambda)$ que relaciona X_H con $X_{h \circ \pi_\Lambda}$, siendo $\pi_\Lambda : T^*\Lambda \to \Lambda$ la proyección canónica. O sea, φ define un "cambio de variables canónicas" en las que el nuevo Hamiltoniano sólo depende de la "posición."

Si ahora tenemos una variedad de Poisson (M, Ξ), una función H, una fibración Π y una solución completa Σ tal que

$$Im\,(\sigma_\lambda)_* \cap Im\Xi^\sharp \subseteq \Xi^\sharp\,[Im\,(\sigma_\lambda)_*]^0\,, \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

Si además $\dim N = \dim \Lambda$ y Π es Lagrangiano (i.e. $\ker \Pi_* = (\ker \Pi_*)^{\perp}$), luego φ define un simplectomorfismo entre (M, ω) y $(T^*\Lambda, \omega_\Lambda)$ que relaciona X_H con $X_{h \circ \pi_\Lambda}$, siendo $\pi_\Lambda : T^*\Lambda \to \Lambda$ la proyección canónica. O sea, φ define un "cambio de variables canónicas" en las que el nuevo Hamiltoniano sólo depende de la "posición."

Si ahora tenemos una variedad de Poisson (M, Ξ), una función H, una fibración Π y una solución completa Σ tal que

$$Im\,(\sigma_\lambda)_* \cap Im\Xi^\sharp \subseteq \Xi^\sharp \left[Im\,(\sigma_\lambda)_*\right]^0, \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

podemos proceder como antes sobre cada hoja simpléctica de M.

GRACIAS!

Demostración del Lema 1

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^* \theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$.
La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$.
La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$, y como N es **conexo**,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$.
La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$, y como N es **conexo**,
    1. luego $H \circ \sigma_\lambda = \text{cte}$,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$.
La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$, y como N es **conexo**,
  1. luego $H \circ \sigma_\lambda = \text{cte}$,
  2. luego existe $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^{\Sigma}}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$. La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$, y como N es **conexo**,
  1. luego $H \circ \sigma_\lambda = \mathrm{cte}$,
  2. luego existe $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$,
  3. luego $d\left(H \circ \Sigma\right) = p_\Lambda^* dh$;

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^{\Sigma}} \left(dW - \Sigma^* \theta \right) = p_{\Lambda}^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d \left(H \circ \sigma_{\lambda} \right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_{\lambda}}} \sigma_{\lambda}^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$. La condición de **isotropía** $\sigma_{\lambda}^* \omega = 0$ asegura que:

- $d \left(H \circ \sigma_{\lambda} \right) = 0$, y como N es **conexo**,
  1. luego $H \circ \sigma_{\lambda} = \text{cte}$,
  2. luego existe $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $H \circ \Sigma = h \circ p_{\Lambda}$,
  3. luego $d \left(H \circ \Sigma \right) = p_{\Lambda}^* dh$;
- $d \left(\sigma_{\lambda}^* \theta \right) = 0$, ya que $\omega = -d\theta$,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma} \left(dW - \Sigma^* \theta \right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d \left(H \circ \sigma_\lambda \right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$. La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d \left(H \circ \sigma_\lambda \right) = 0$, y como N es **conexo**,
  1. luego $H \circ \sigma_\lambda = \text{cte}$,
  2. luego existe $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$,
  3. luego $d \left(H \circ \Sigma \right) = p_\Lambda^* dh$;
- $d \left(\sigma_\lambda^* \theta \right) = 0$, ya que $\omega = -d\theta$, y como N es **simplemente conexo**,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = i_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$. La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^*\omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$, y como N es **conexo**,
  1. luego $H \circ \sigma_\lambda = \text{cte}$,
  2. luego existe $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$,
  3. luego $d\left(H \circ \Sigma\right) = p_\Lambda^* dh$;
- $d\left(\sigma_\lambda^*\theta\right) = 0$, ya que $\omega = -d\theta$, y como N es **simplemente conexo**,
  1. luego existe $W_\lambda : N \to \mathbb{R}$ tal que $\sigma_\lambda^*\theta = dW_\lambda$,

Demostración del Lema 1

Queremos ver que existen $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ y $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tales que

$$L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = p_\Lambda^* dh.$$

Si Σ es **solución completa**, luego $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = \mathrm{i}_{X_H^{\sigma_\lambda}} \sigma_\lambda^* \omega$, $\forall \lambda \in \Lambda$.
La condición de **isotropía** $\sigma_\lambda^* \omega = 0$ asegura que:

- $d\left(H \circ \sigma_\lambda\right) = 0$, y como N es **conexo**,
  1. luego $H \circ \sigma_\lambda = \mathrm{cte}$,
  2. luego existe $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $H \circ \Sigma = h \circ p_\Lambda$,
  3. luego $d\left(H \circ \Sigma\right) = p_\Lambda^* dh$;
- $d\left(\sigma_\lambda^* \theta\right) = 0$, ya que $\omega = -d\theta$, y como N es **simplemente conexo**,
  1. luego existe $W_\lambda : N \to \mathbb{R}$ tal que $\sigma_\lambda^* \theta = dW_\lambda$,
  2. luego existe $W : N \times \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left(dW - \Sigma^*\theta\right)\big|_{TN \times 0} = 0.$$

Notar que en particular

$$\mathrm{i}_{X_H^{\Sigma}}(dW - \Sigma^*\theta) = 0.$$

Notar que en particular

$$\mathrm{i}_{X_H^\Sigma}(dW - \Sigma^*\theta) = 0.$$

Como una solución completa Σ cumple

$$d(H \circ \Sigma) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma}\Sigma^*\omega,$$

Notar que en particular

$$\mathrm{i}_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = 0.$$

Como una solución completa Σ cumple

$$d\left(H \circ \Sigma\right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma}\Sigma^*\omega,$$

lo visto hasta aquí, junto con la identidad $L_{X_H^\Sigma} = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \circ d + d \circ \mathrm{i}_{X_H^\Sigma}$,

Notar que en particular

$$\mathrm{i}_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = 0.$$

Como una solución completa Σ cumple

$$d\left(H \circ \Sigma\right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma}\Sigma^*\omega,$$

lo visto hasta aquí, junto con la identidad $L_{X_H^\Sigma} = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \circ d + d \circ \mathrm{i}_{X_H^\Sigma}$, implica que

$$p_\Lambda^* dh = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} d\left(-\Sigma^*\theta\right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} d\left(dW - \Sigma^*\theta\right) = L_{X_H^\Sigma}\left(dW - \Sigma^*\theta\right),$$

Notar que en particular

$$\mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \left(dW - \Sigma^* \theta \right) = 0.$$

Como una solución completa Σ cumple

$$d \left(H \circ \Sigma \right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \Sigma^* \omega,$$

lo visto hasta aquí, junto con la identidad $L_{X_H^\Sigma} = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} \circ d + d \circ \mathrm{i}_{X_H^\Sigma}$, implica que

$$p_\Lambda^* dh = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} d \left(-\Sigma^* \theta \right) = \mathrm{i}_{X_H^\Sigma} d \left(dW - \Sigma^* \theta \right) = L_{X_H^\Sigma} \left(dW - \Sigma^* \theta \right),$$

como queríamos probar.

Demostración del Lema 3

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi(\gamma(t), \lambda) = \varphi(\gamma(t_0), \lambda) + (t - t_0)\ dh(\lambda),$$

para toda curva integral $(\gamma(t), \lambda)$ de X_H^{Σ}.

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^{Σ}. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^{Σ}. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

$$\frac{d}{dt}\left\langle\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle \quad = \quad L_{X_H^{\Sigma}}\left\langle dW-\Sigma^{*}\theta,Z\right\rangle\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}$$

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^{Σ}. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\left\langle\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle &= L_{X_H^{\Sigma}}\left\langle dW-\Sigma^*\theta,Z\right\rangle\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= L_{X_H^{\Sigma}}\circ i_Z\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}
\end{aligned}$$

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^{Σ}. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle &= L_{X_H^{\Sigma}}\left\langle dW-\Sigma^*\theta,Z\right\rangle\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= L_{X_H^{\Sigma}}\circ i_Z\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= i_Z\circ L_{X_H^{\Sigma}}\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}
\end{aligned}$$

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\;dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^{Σ}. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

$$\begin{array}{rcl}\frac{d}{dt}\left\langle\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle & = & L_{X_H^{\Sigma}}\left\langle dW-\Sigma^*\theta,Z\right\rangle\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\ & = & L_{X_H^{\Sigma}}\circ i_Z\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\ & = & i_Z\circ L_{X_H^{\Sigma}}\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\ & = & i_Z\left(p_\Lambda^* dh\right)\big|_{(\gamma(t),\lambda)}\end{array}$$

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^Σ. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle &= L_{X_H^\Sigma}\left\langle dW-\Sigma^*\theta,Z\right\rangle\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= L_{X_H^\Sigma}\circ\mathfrak{i}_Z\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= \mathfrak{i}_Z\circ L_{X_H^\Sigma}\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= \mathfrak{i}_Z\left(p_\Lambda^* dh\right)\big|_{(\gamma(t),\lambda)}\\
&= \left\langle dh\left(\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle
\end{aligned},$$

Demostración del Lema 3

Queremos ver que

$$\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)=\varphi\left(\gamma\left(t_0\right),\lambda\right)+\left(t-t_0\right)\ dh\left(\lambda\right),$$

para toda curva integral $\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right)$ de X_H^Σ. Pero, de la definición de φ, para todo campo $Z\in\mathfrak{X}\left(\Lambda\right)$,

$$\begin{array}{rcc}\frac{d}{dt}\left\langle\varphi\left(\gamma\left(t\right),\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle & = & L_{X_H^\Sigma}\left\langle dW-\Sigma^*\theta,Z\right\rangle\Big|_{\left(\gamma(t),\lambda\right)}\\ & = & L_{X_H^\Sigma}\circ\mathfrak{i}_Z\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{\left(\gamma(t),\lambda\right)}\\ & = & \mathfrak{i}_Z\circ L_{X_H^\Sigma}\left(dW-\Sigma^*\theta\right)\Big|_{\left(\gamma(t),\lambda\right)}\\ & = & \mathfrak{i}_Z\left(p_\Lambda^*dh\right)\big|_{\left(\gamma(t),\lambda\right)}\\ & = & \left\langle dh\left(\lambda\right),Z\left(\lambda\right)\right\rangle\end{array},$$

de donde se deduce lo buscado.