

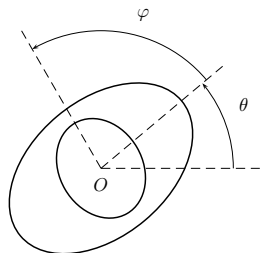
Reducción de Routh: un panorama y avances recientes

Eduardo García-Toraño Andrés (+ S. Capriotti)

Dep. de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina

ENCUENTRO ARGENTINO DE MECÁNICA GEOMÉTRICA Y FÍSICA-MATEMÁTICA
MAR DEL PLATA, 28 – OCTUBRE – 2017

Un ejemplo: "Elroy's beanie"



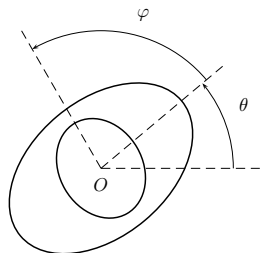
Lagrangiana con θ cíclica ($Q = S^1 \times S^1$):

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 - V(\varphi)$$

Ecs. Euler-Lagrange L :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} ((I_1 + I_2)\dot{\theta} + I_2\dot{\varphi}) = 0 & (\text{ec. } \theta), \\ I_2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + V'(\varphi) = 0 & (\text{ec. } \varphi) \end{cases}$$

Un ejemplo: "Elroy's beanie"



Lagrangiana con θ cíclica ($Q = S^1 \times S^1$):

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 - V(\varphi)$$

Ecs. Euler-Lagrange L :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} ((I_1 + I_2)\dot{\theta} + I_2\dot{\varphi}) = 0 & (\text{ec. } \theta), \\ I_2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + V'(\varphi) = 0 & (\text{ec. } \varphi) \end{cases}$$

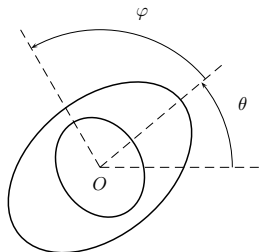
Fijemos $p_\theta := (I_1 + I_2)\dot{\theta} + I_2\dot{\varphi} = \mu$. Definamos el **Routhiano** R_c^μ :

$$R_c^\mu(\varphi, \dot{\varphi}) = (L - \dot{\theta}\mu)_{\{p_\theta=\mu\}} = \frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)} \dot{\varphi}^2 + \frac{I_2 \mu}{I_1 + I_2} \dot{\varphi} - V(\varphi) - \frac{\mu^2}{I_1 + I_2}$$

Ecs. Euler Lagrange R_c^μ :

$$I_1 I_2 \ddot{\varphi} = -(I_1 + I_2) V'$$

Un ejemplo: "Elroy's beanie"



Lagrangiana con θ cíclica ($Q = S^1 \times S^1$):

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 - V(\varphi)$$

Ecs. Euler-Lagrange L :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} ((I_1 + I_2)\dot{\theta} + I_2\dot{\varphi}) = 0 & (\text{ec. } \theta), \\ I_2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + V'(\varphi) = 0 & (\text{ec. } \varphi) \end{cases}$$

Fijemos $p_\theta := (I_1 + I_2)\dot{\theta} + I_2\dot{\varphi} = \mu$. Definamos el **Routhiano** R_c^μ :

$$R_c^\mu(\varphi, \dot{\varphi}) = (L - \dot{\theta}\mu)_{\{p_\theta = \mu\}} = \frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)} \dot{\varphi}^2 + \frac{I_2 \mu}{I_1 + I_2} \dot{\varphi} - V(\varphi) - \frac{\mu^2}{I_1 + I_2}$$

Ecs. Euler Lagrange R_c^μ :

$$I_1 I_2 \ddot{\varphi} = -(I_1 + I_2) V'$$

$$\{\mathcal{E}\mathcal{L}(L) + p_\theta = \mu\} = \{\mathcal{E}\mathcal{L}(R_c^\mu) + \text{Reconstrucción}\}$$

1 Sea $L(x^i, \dot{x}^i, \dot{\theta})$ Lagrangiano con θ cíclica. Tendremos

$$p_\theta := \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante}$$

- 1 Sea $L(x^i, \dot{x}^i, \dot{\theta})$ Lagrangiano con θ cíclica. Tendremos

$$p_\theta := \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante}$$

- 2 Fijemos un valor para el momento, $\mu = p_\theta$, y construyamos el **Routhiano**

$$R_c^\mu(x^i, \dot{x}^i) = (L - \dot{\theta}\mu)_{\{p_\theta=\mu\}},$$

donde la relación $\mu = p_\theta$ se utiliza para eliminar $\dot{\theta}$.

Reducción de Routh clásica – Edward Routh [1860-1880]

- 1 Sea $L(x^i, \dot{x}^i, \dot{\theta})$ Lagrangiano con θ cíclica. Tendremos

$$p_\theta := \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante}$$

- 2 Fijemos un valor para el momento, $\mu = p_\theta$, y construyamos el **Routhiano**

$$R_c^\mu(x^i, \dot{x}^i) = (L - \dot{\theta}\mu)_{\{p_\theta=\mu\}},$$

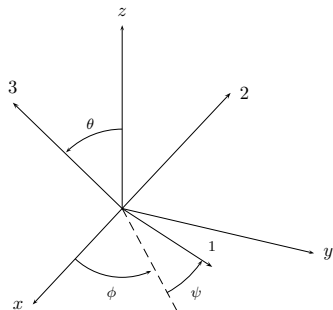
donde la relación $\mu = p_\theta$ se utiliza para eliminar $\dot{\theta}$.

- 3 Calculamos las ecs. de Euler-Lagrange de R_c^μ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Euler-Lagrange Eqs. } L \\ + \\ p_\theta = \mu \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Euler-Lagrange Eqs. } R^\mu \\ + \\ p_\theta = \mu \end{array} \right\}$$

(Para $G = \mathbb{T}^n$, se puede iterar)

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico

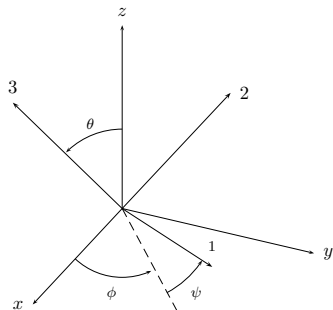


Sólido rígido con un punto fijo y simetría axial con $I_1 = I_2$ ($Q = SO(3)$)

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - V(\theta)$$

ψ es cíclica. Fijemos $p_\psi = \mu$.

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico



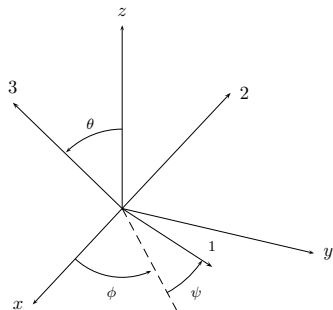
Sólido rígido con un punto fijo y simetría axial con $I_1 = I_2$ ($Q = SO(3)$)

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - V(\theta)$$

ψ es cíclica. Fijemos $p_\psi = \mu$.

$$\begin{aligned} R_c^\mu(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) &= (L(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}) - \dot{\psi}\mu)_{\{p_\psi = \mu\}} \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}^2 + (2\mu \cos \theta) \dot{\phi} + (I_1 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2) - \frac{\mu^2}{2I_3} - V(\theta) \end{aligned}$$

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico



Sólido rígido con un punto fijo y simetría axial con $I_1 = I_2$ ($Q = SO(3)$)

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - V(\theta)$$

ψ es cíclica. Fijemos $p_\psi = \mu$.

$$\begin{aligned} R_c^\mu(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) &= (L(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}) - \dot{\psi}\mu)_{\{p_\psi = \mu\}} \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}^2 + (2\mu \cos \theta) \dot{\phi} + (I_1 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2) - \frac{\mu^2}{2I_3} - V(\theta) \end{aligned}$$

Observemos que $SO(3)/S^1 \simeq S^2$, pero $SO(3)$ no es un producto.

Kharlamov demuestra que no existe Routhiano global (salvo para $\mu = 0$). Para ello, mira a $H^2(S^2, \mathbb{Z})$.

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico (cont.)

Tomemos una conexión principal en $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$,

$$\mathfrak{A} = d\psi + A_\theta d\theta + A_\phi d\phi, \quad (\text{con } A_\theta = A_\theta(\theta, \phi), A_\phi = A_\phi(\theta, \phi)).$$

Definamos el **Routhiano**:

$$R^\mu = (L(v) - \langle \mathfrak{A}(v), \mu \rangle)_{\{p_\psi = \mu\}} = R_c^\mu(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) - \mu A_\theta(\theta, \phi) \dot{\theta} - \mu A_\phi(\theta, \phi) \dot{\phi}$$

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico (cont.)

Tomemos una conexión principal en $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$,

$$\mathfrak{A} = d\psi + A_\theta d\theta + A_\phi d\phi, \quad (\text{con } A_\theta = A_\theta(\theta, \phi), A_\phi = A_\phi(\theta, \phi)).$$

Definamos el **Routhiano**:

$$R^\mu = (L(v) - \langle \mathfrak{A}(v), \mu \rangle)_{\{p_\psi = \mu\}} = R_c^\mu(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) - \mu A_\theta(\theta, \phi) \dot{\theta} - \mu A_\phi(\theta, \phi) \dot{\phi}$$

Como R_c^μ daba las ecuaciones correctas, deberá ser:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R^\mu}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial R^\mu}{\partial \theta} \right) &= -\mu \dot{\phi} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R^\mu}{\partial \dot{\phi}} \right) - \left(\frac{\partial R^\mu}{\partial \phi} \right) &= -\mu \dot{\theta} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

¡Aparecen términos de **curvatura**! Lo que aparece es $\langle \mu, d\mathfrak{A} \rangle$.

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico (cont.)

En general, por lo tanto, necesitamos una conexión plana en $\pi: SO(3) \rightarrow S^2$.
En este caso no hay ([Kob,Nom – 1996]):

Si \mathfrak{A} es una conexión principal en el G -fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$. Si \mathfrak{A} es plana y M es simplemente conexo, entonces P es trivial (isomorfo $M \times G$).

Un ejemplo de Kharlamov [1977] – El trompo simétrico (cont.)

En general, por lo tanto, necesitamos una conexión plana en $\pi: SO(3) \rightarrow S^2$. En este caso no hay ([Kob,Nom – 1996]):

Si \mathcal{A} es una conexión principal en el G -fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$. Si \mathcal{A} es plana y M es simplemente conexo, entonces P es trivial (isomorfo $M \times G$).

En general, ni siquiera puede añadirse un potencial dependiente de las velocidades para resolver el problema. Consideremos por ejemplo la conexión mecánica:

$$\mathcal{A}_M = d\psi + \cos(\theta)d\phi$$

La contracción de $d\mathcal{A}_M$ y μ desciende a una 2-forma \mathcal{B}_μ en S^2 . Se tiene

$$\int_{S^2} \mathcal{B}_\mu = \pm 4\pi\mu$$

luego si $\mu \neq 0$, \mathcal{B}_μ no puede ser exacta. Pero además ([Mor – 2001]) cualquier conexión en π define la misma clase de cohomología en $H_{DR}^2(S^2)$.

El caso mecánico – [Arnold, Kozlov, Neishtadt – 1985]

Versión global (abeliana, $G = S^1$ ó $G = \mathbb{T}^n$) para sistemas mecánicos (Q, \mathcal{G}, V) .
Considera la reducción

$$(\bar{Q} = Q/S^1, \bar{\mathcal{G}}, \bar{V}).$$

Utiliza la conexión mecánica. En el caso unidimensional,

$$\mathfrak{A}(v) = \frac{\mathcal{G}(v, \xi_Q)}{\mathcal{G}(\xi_Q, \xi_Q)}, \quad (V \text{ generador infinitesimal}).$$

Para momento $\mu = 0$, hay correspondencia soluciones $(Q, \mathcal{G}, V) \longleftrightarrow (\bar{Q}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{V})$.

Teorema: $\gamma: I \rightarrow Q$ es solución de (Q, \mathcal{G}, V) con momento μ si, y sólo si, la proyección $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \bar{Q}$ verifica

$$\mathcal{E}\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} \langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}} \rangle + \tilde{V} \right) = \mathcal{B}_\mu(\dot{\tilde{\gamma}}), \quad \tilde{V}_\mu = V + \dots \text{ (se puede escribir con } R^\mu \text{)}.$$

El caso mecánico – [Arnold, Kozlov, Neishtadt – 1985]

Versión global (abeliana, $G = S^1$ ó $G = \mathbb{T}^n$) para sistemas mecánicos (Q, \mathcal{G}, V) .
Considera la reducción

$$(\bar{Q} = Q/S^1, \bar{\mathcal{G}}, \bar{V}).$$

Utiliza la conexión mecánica. En el caso unidimensional,

$$\mathfrak{A}(v) = \frac{\mathcal{G}(v, \xi_Q)}{\mathcal{G}(\xi_Q, \xi_Q)}, \quad (V \text{ generador infinitesimal}).$$

Para momento $\mu = 0$, hay correspondencia soluciones $(Q, \mathcal{G}, V) \longleftrightarrow (\bar{Q}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{V})$.

Teorema: $\gamma: I \rightarrow Q$ es solución de (Q, \mathcal{G}, V) con momento μ si, y sólo si, la proyección $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \bar{Q}$ verifica

$$\mathcal{E}\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} \langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}} \rangle + \tilde{V} \right) = \mathcal{B}_\mu(\dot{\tilde{\gamma}}), \quad \tilde{V}_\mu = V + \dots \text{ (se puede escribir con } R^\mu \text{)}.$$

Un resultado de Bolotin (1986) interesante:

Proposición: Sea $\mathcal{M} = (Q, \mathcal{G}, V, \mathcal{B})$ un sistema mecánico con término giroscópico \mathcal{B} cerrado. Si Q es compacto, entonces existe un fibrado principal con base Q y grupo de simetría \mathbb{T}^m con $m \leq \text{rango } H^2(Q, \mathbb{R})$ tal que \mathcal{M} se obtiene mediante reducción de Routh.

El caso no abeliano (mecánico) – [Marsden, Scheurle – 1993]

Versión global en términos de R^μ que vale para grupos no abelianos y en términos de momentum map. Para L invariante, $\mu \in \mathfrak{g}^*$ y \mathfrak{A} conexión mecánica, definen

$$R^\mu = L - \langle \mu, \mathfrak{A} \rangle.$$

Se tiene

$$\{\text{Euler-Lagrange } L\} \longleftrightarrow \{\text{Lagrange-d'Alambert } R^\mu\}.$$

En general R^μ es G_μ -invariante, debe de reducirse a Q/G_μ :

El caso no abeliano (mecánico) – [Marsden, Scheurle – 1993]

Versión global en términos de R^μ que vale para grupos no abelianos y en términos de momentum map. Para L invariante, $\mu \in \mathfrak{g}^*$ y \mathfrak{A} conexión mecánica, definen

$$R^\mu = L - \langle \mu, \mathfrak{A} \rangle.$$

Se tiene

$$\{\text{Euler-Lagrange } L\} \longleftrightarrow \{\text{Lagrange-d'Alambert } R^\mu\}.$$

En general R^μ es G_μ -invariante, debe de reducirse a Q/G_μ :

Teorema: *Supongamos que $\gamma(t)$ satisface las ecs. de Euler-Lagrange para L y verifica $J_L(\gamma, \dot{\gamma}) = \mu$. Entonces la curva inducida $\tilde{\gamma}$ en Q/G_μ verifica el principio variacional de Lagrange-d'Alambert con término magnético $\mathcal{B}_\mu = \langle \mu, d\mathfrak{A} \rangle$:*

$$\delta \int \mathcal{R}^\mu dt = \int \mathcal{B}_\mu(\dot{\tilde{\gamma}}, \delta \tilde{\gamma}) dt.$$

La reducción de R^μ es $\mathcal{R}^\mu(\tilde{v}) = \overline{\mathcal{G}}(T\pi_\mu(v), T\pi_\mu(v)) - V_\mu$. V_μ da estabilidad de equilibrios relativos.

“Realization theorem”:

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

La identificación es $\psi(v_q) = ([v_q] = T\pi(v_q), [q]_{G_\mu})$ con $\pi: Q \rightarrow Q/G$. Inverso:

$$\psi^{-1}([v_q], [q]_{G_\mu}) = v_q + \xi_Q \quad \xi = \mathfrak{J}(q)^{-1}(\mu - J_L(v_q)).$$

De hecho, obtienen una triple identificación

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} \tilde{O}_\mu.$$

“Realization theorem”:

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

La identificación es $\psi(v_q) = ([v_q] = T\pi(v_q), [q]_{G_\mu})$ con $\pi: Q \rightarrow Q/G$. Inverso:

$$\psi^{-1}([v_q], [q]_{G_\mu}) = v_q + \xi_Q \quad \xi = \mathfrak{J}(q)^{-1}(\mu - J_L(v_q)).$$

De hecho, obtienen una triple identificación

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu \simeq T(Q/G) \times_{Q/G} \tilde{O}_\mu.$$

También descomponen el principio variacional reducido

$$\delta \int \mathcal{R}^\mu(x, \dot{x}, y) dt = \int \mathcal{B}_\mu(\dot{y}, \delta y) dt$$

Usando conexión en $Q/G_\mu \rightarrow Q/G$, $y \mapsto x$, y obtienen por primera vez las ecuaciones de Lagrange-Poincaré.

Tomamos una base cualquiera $\{Z_\alpha\}_\alpha$ de Q , $u \in T_q Q$ se expresa $u = w^\alpha(u)Z_\alpha(q)$. w^α son **cuasi-velocidades**. Caso usual: $Z_\alpha = \partial_{x^\alpha}$.

Se reduce directamente el campo de Euler-Lagrange Γ . Para una base Z_α de Q (no necesariamente coordenada)

$$\Gamma(Z_\alpha^V(L)) - Z_\alpha^C(L) = 0, \quad (\Gamma = w^\alpha Z_\alpha^C + \Gamma^\alpha Z_\alpha^V)$$

Expresiones en (cuasi)-coordenadas – [Crampin, Mestdag – 2008]

Tomamos una base cualquiera $\{Z_\alpha\}_\alpha$ de Q , $u \in T_q Q$ se expresa $u = w^\alpha(u)Z_\alpha(q)$. w^α son **cuasi-velocidades**. Caso usual: $Z_\alpha = \partial_{x^\alpha}$.

Se reduce directamente el campo de Euler-Lagrange Γ . Para una base Z_α de Q (no necesariamente coordenada)

$$\Gamma(Z_\alpha^V(L)) - Z_\alpha^C(L) = 0, \quad (\Gamma = w^\alpha Z_\alpha^C + \Gamma^\alpha Z_\alpha^V)$$

Denotemos por (x, θ) las variables de configuración y del grupo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Lambda_i^a \frac{\partial}{\partial \theta^a}, \quad \tilde{E}_a = K_a^b \frac{\partial}{\partial \theta^b},$$

con corchetes

$$[X_i, X_j] = B_{ij}^a \tilde{E}_a, \quad [X_i, \tilde{E}_a] = 0, \quad [\tilde{E}_a, \tilde{E}_b] = -C_{ab}^c \tilde{E}_c,$$

Podemos hacerlo completamente invariante eligiendo:

$$\hat{E}_a = L_a^b \frac{\partial}{\partial \theta^b},$$

con L_b^a tal que $0 = [\tilde{E}_a, \hat{E}_b]$.

Γ se caracteriza:

$$\begin{aligned}\Gamma(X_i^V(L)) - X_i^C(L) &= 0 \\ \Gamma(\tilde{E}_a^V(L)) - \tilde{E}_a^C(L) &= 0\end{aligned}$$

Si v^a es la cuasicoordenada en \tilde{E}_a , $\mathcal{R}^\mu = L - v^a \mu_a$. Se asume que el Hessiano “vertical” es regular (G -regularidad local):

$$g_{ab} = \tilde{E}_a(\tilde{E}_b(L)) \neq 0$$

El problema técnico es modificar la base de TQ dada por $\{X_i^V, X_i^C, \tilde{E}_a^V, \tilde{E}_a^C\}$ para que sea tangente a $p_a = \mu_a$.

Γ se caracteriza:

$$\begin{aligned}\Gamma(X_i^V(L)) - X_i^C(L) &= 0 \\ \Gamma(\tilde{E}_a^V(L)) - \tilde{E}_a^C(L) &= 0\end{aligned}$$

Si v^a es la cuasicoordenada en \tilde{E}_a , $\mathcal{R}^\mu = L - v^a \mu_a$. Se asume que el Hessiano “vertical” es regular (G -regularidad local):

$$g_{ab} = \tilde{E}_a(\tilde{E}_b(L)) \neq 0$$

El problema técnico es modificar la base de TQ dada por $\{X_i^V, X_i^C, \tilde{E}_a^V, \tilde{E}_a^C\}$ para que sea tangente a $p_a = \mu_a$.

El campo reducido, $\check{\Gamma}$, satisface la relación (ecuaciones de **Lagrange-Routh**):

$$\check{\Gamma}(\check{X}_i^V(\mathcal{R}^\mu)) - \check{X}_i^C(\mathcal{R}^\mu) = -\mu_a B_{ij}^a v^j$$

En estas cuasi-coordenadas una solución reducida $v(t) = (x^i(t), \theta^\alpha(t), v^j(t))$ verifica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}^\mu}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}^\mu}{\partial x^i} = -\mu_a R_{ij}^a v^j - \Lambda_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{R}^\mu}{\partial \theta^\alpha}$$

- $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, que suponemos regular ($\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ difeomorfismo)
- ϕ_g acción de G en Q tal que $T\phi_g : TQ \rightarrow TQ$ deja L invariante:

$$L(g \cdot v_q) = L(v_q)$$

- $T\phi_g$ actúa canónicamente en (TQ, Ω_Q^L) . Momento:

$$\langle J_L(v_q), \xi \rangle = \langle \mathbb{F}L(v_q), \xi_Q \rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
 (TQ, \Omega_Q^L) & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & (T^*Q, \Omega_Q) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (J_L^{-1}(\mu)/G_\mu, (\Omega_Q^L)_\mu) & \xrightarrow{[\mathbb{F}L_\mu]} & (J^{-1}(\mu)/G_\mu, (\Omega_Q)_\mu)
 \end{array}$$

Proposición: En la situación anterior, $[\mathbb{F}L_\mu]$ es un symplectomorfismo

$$(J_L^{-1}(\mu)/G_\mu, (\Omega_Q^L)_\mu) \cong (J^{-1}(\mu)/G_\mu, (\Omega_Q)_\mu)$$

Definición: Sea L un Lagrangiano invariante en TQ y $v_q \in T_qQ$ arbitrario.

- La aplicación $\mathcal{J}_L^{v_q} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ se define:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_L^{v_q} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}^* , \\ \xi &\mapsto J_L(v_q + \xi_Q(q)) . \end{aligned}$$

- L es G -regular si $\mathcal{J}_L^{v_q}$ es un difeomorfismo para cada $v_q \in TQ$.

Lema: Sea L un Lagrangiano G -regular (invariante) y $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Entonces existe un difeomorfismo:

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \cong T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu$$

Localmente, si $Q \simeq S \times G$ y $TQ \simeq TS \times TG \sim (x, \dot{x}, g, \dot{g})$, entonces la G -regularidad de L garantiza

$$J_L^{-1}(\mu) \sim (x, \dot{x}, g)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (TQ, \Omega_Q^L) & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & (T^*Q, \Omega_Q) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, (\Omega_Q^L)_\mu) & & (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, (\Omega_Q)_\mu)
 \end{array}$$

La función $R^\mu := L - \mathfrak{A}_\mu$ desciende al cociente a una función (**Routhiano**)

$$\mathcal{R}^\mu := L - \mathfrak{A}_\mu \in C^\infty(T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (TQ, \Omega_Q^L) & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & (T^*Q, \Omega_Q) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, (\Omega_Q^L)_\mu) & \xrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu} & (T^*(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, (\Omega_Q)_\mu)
 \end{array}$$

La función $R^\mu := L - \mathfrak{A}_\mu$ desciende al cociente a una función (**Routhiano**)

$$R^\mu := L - \mathfrak{A}_\mu \in C^\infty(T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu)$$

Teorema: Sea L hiperregular, G -invariante, G -regular en TQ . Entonces, la reducción de Marsden-Weinstein de (TQ, Ω_Q^L) con momento μ es la variedad simpléctica

$$(T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu, (\mathbb{F}\mathcal{R}^\mu)^*(\pi_1^*\Omega_{Q/G} + \pi_2^*\mathcal{B}_\mu))$$

La energía E_L se reduce a $E_{\mathcal{R}^\mu}$.

Ejemplo. $L = \dot{x}^2 + \dot{y} - V(x)$, simetría $G = \mathbb{R}$ (y cíclica). $J_L = \dot{x} = \mu$, así que $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \sim (x, \dot{y})$. Luego en general

$$J_L^{-1}(\mu)/G_\mu \not\cong T(Q/G) \times_{Q/G} Q/G_\mu.$$

Otro Ejemplo.

$$L(z_l, \dot{z}_l) = \frac{1}{2i} \sum_k \gamma_k (\bar{z}_k \dot{z}_k - z_k \overline{\dot{z}_k}) - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{k \neq n} \gamma_k \gamma_n \ln |z_n - z_k|, \quad z_l \in \mathbb{C}$$

Se utiliza un esquema basado en Lagrange-Poincaré

$$\begin{array}{ccc}
 (TQ, L) & \xrightarrow{1} & (TQ, R^\mu) \\
 \text{MW} \downarrow & & \downarrow 3 \\
 (J_L^{-1}(\mu)/G_\mu, \bar{\mathcal{R}}^\mu) & \xrightarrow{2} & (TQ/G_\mu, \mathcal{R}^\mu) = \left(T(Q/G) \times (Q/G_\mu \times \tilde{\mathfrak{g}}), \mathcal{R}^\mu \right)
 \end{array}$$

Estructura de Dirac lineal: $D_V \subset V \oplus V^*$ tal que es Lagrangiano (máx. isótropo) con respecto a

$$\langle\langle (v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2) \rangle\rangle = \langle \alpha_2, v_1 \rangle + \langle \alpha_1, v_2 \rangle.$$

Estructura de Dirac en una variedad M es un subfibrado $D_M \subset TM \oplus T^*M$ tal $(D_M)_m \subset T_m M \oplus T_m^* M$ es Dirac (lineal)

Se dice integrable si

$$\langle \mathfrak{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle + \langle \mathfrak{L}_{X_2} \alpha_3, X_1 \rangle + \langle \mathfrak{L}_{X_3} \alpha_1, X_2 \rangle = 0, \quad (X_i, \alpha_i) \in \Gamma(D).$$

Si $\varphi \in \Gamma(T^*M)$ es la *sección de energía*, se tiene un sistema dinámico. Dada una curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, la **dinámica** viene dada por

$$\dot{c}(t) \oplus \varphi(c(t)) \in (D_M)_{c(t)}.$$

- 1 Sea $M = TQ \oplus T^*Q$ con D_μ dada por el grafo pullback de Ω_Q .
- 2 Considerar la subvariedad $M_\mu = TQ \oplus J^{-1}(\mu)$, y la forma de Dirac inducida.
- 3 Escribir

$$\Omega_{M_\mu} = dx^i \wedge dp_i + \frac{1}{2} \mu_a (B_{ij}^a dx^i \wedge dx^j - C_{bc}^a \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c).$$

y una expresión similar para dE_μ .

- 4 Descomponer $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mu \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\mu)$, base $\{E_a\} = \{E_A, E_I\}$.
- 5 Reducir la estructura de Dirac. La estructura reducida es el grafo de

$$\Omega_{M_\mu} = dx^i \wedge dp_i + \frac{1}{2} \mu_a (B_{ij}^a dx^i \wedge dx^j - A'_K A^J_L C_{IJ}^a \hat{E}^K \wedge \hat{E}^L).$$

Hacer lo mismo para obtener $d\tilde{E}_\mu$.

- 6 Obtener las **ecuaciones reducidas** del sistema de Dirac reducido

Se trabaja sobre $\mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$.

Se toma la perspectiva de un problema variacional clásico:

$$\delta \int_a^b L(t, q, \dot{q}) dt \rightsquigarrow \Phi(\gamma) = \int_{\gamma \in \mathcal{V}(I)} L dt, \quad I = \{\text{Estructura de contacto en } J^1\pi\}$$

Se considera el subfibrado afín de $T^*(\mathbb{R} \times TQ)$ con su forma de Cartan λ_L

$$W_L = Ldt + I_{\text{cont}}^1 = \{L(t, q^i, v^i)dt + p_i(dq^i - v^i dt)\} \simeq \mathbb{R} \times (TQ \oplus T^*Q)$$

Se trabaja sobre $\mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$.

Se toma la perspectiva de un problema variacional clásico:

$$\delta \int_a^b L(t, q, \dot{q}) dt \rightsquigarrow \Phi(\gamma) = \int_{\gamma \in \mathcal{V}(I)} L dt, \quad I = \{\text{Estructura de contacto en } J^1\pi\}$$

Se considera el subfibrado afín de $T^*(\mathbb{R} \times TQ)$ con su forma de Cartan λ_L

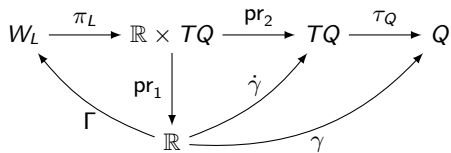
$$W_L = Ldt + I_{\text{cont}}^1 = \{L(t, q^i, v^i)dt + p_i(dq^i - v^i dt)\} \simeq \mathbb{R} \times (TQ \oplus T^*Q)$$

Definición: La curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de (W_L, λ_L) si existe una sección $\Gamma: I \rightarrow W_L$ tal que:

1 Γ cubre a γ , i.e. $\tau_Q \circ pr_2 \circ \pi_L \circ \Gamma = \gamma$, and

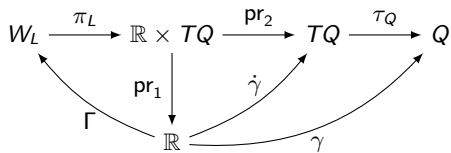
2 $\Gamma^*(X \lrcorner d\lambda_L) = 0$ for all $X \in \mathfrak{X}^V(W_L)$.

(... y teorema)



Las curvas Γ son soluciones del problema variacional **¡libre!!**

$$\Gamma \mapsto \int_a^b \Gamma^*(\lambda_L).$$



Las curvas Γ son soluciones del problema variacional **¡¡libre!!**

$$\Gamma \mapsto \int_a^b \Gamma^*(\lambda_L).$$

Mismas técnicas que en reducción, por ej.

$$T^*Q = (p_G^Q)^*(T^*(Q/G)) \oplus (Q \times \mathfrak{g}^*) \rightsquigarrow l_{\text{con}}^1 = \widetilde{l}_{\text{con}}^1 \oplus l_{\mathfrak{g}^*}^1.$$

y

$$W_L^\mu = J^{-1}(\mu) \subset W_L.$$

Muchas gracias