Interpretación geométrica de núcleos de Toeplitz

E. Andruchow [b c], E. Chiumiento [a c], G. Larotonda [b c]

[a]Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

[b]Instituto de Ciencias
Universidad Nacional de General Sarmiento

[c]Instituto Argentino de Matemática
“Alberto P. Calderón”

Encuentro Argentino de Mecánica Geométrica y Física-Matemática 2017

Mar del Plata

La Grassmanniana de un espacio de Hilbert

La **Grassmanniana de un Hilbert** $\mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Gr(\mathcal{H}) &= \{\, \mathcal{S} \,:\, \mathcal{S} \text{ subespacio cerrado de } \mathcal{H} \,\} \\ &\simeq \{\, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,:\, P = P^2 = P^* \,\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son los operadores lineales continuos en $\mathcal{H}$

Observación: $\|P - Q\| \leq 1, \forall\, P, Q \in Gr(\mathcal{H})$

Acción del grupo unitario $\mathcal{U}$ sobre $Gr(\mathcal{H})$:

$$U \cdot P = UPU^*, \quad P \in Gr(\mathcal{H}),\; U \in \mathcal{U}$$

- Localmente transitiva: $\|P - Q\| < 1 \Longrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}$ tal que $Q = UPU^*$
- Para cada $P \in Gr(\mathcal{H})$, su órbita cumple

$$\mathcal{O}_P = \{\, UPU^* \,:\, U \in \mathcal{U} \,\} = \text{ Comp. conexa } P$$

- $\mathcal{I}_P = \{\, U \in \mathcal{U} \,:\, UP = PU \,\}$ es un subgrupo de Lie de $\mathcal{U}$

La Grassmanniana de un espacio de Hilbert

La **Grassmanniana de un Hilbert** $\mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Gr(\mathcal{H}) &= \{\, \mathcal{S} \,:\, \mathcal{S} \text{ subespacio cerrado de } \mathcal{H} \,\} \\ &\simeq \{\, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,:\, P = P^2 = P^* \,\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son los operadores lineales continuos en $\mathcal{H}$

<u>Observación:</u> $\|P - Q\| \leq 1, \forall\, P, Q \in Gr(\mathcal{H})$

Acción del grupo unitario $\mathcal{U}$ sobre $Gr(\mathcal{H})$:

$$U \cdot P = UPU^*, \quad P \in Gr(\mathcal{H}),\ U \in \mathcal{U}$$

- Localmente transitiva: $\|P - Q\| < 1 \Longrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}$ tal que $Q = UPU^*$
- Para cada $P \in Gr(\mathcal{H})$, su órbita cumple

$$\mathcal{O}_P = \{\, UPU^* \,:\, U \in \mathcal{U} \,\} = \text{ Comp. conexa } P$$

- $\mathcal{I}_P = \{\, U \in \mathcal{U} \,:\, UP = PU \,\}$ es un subgrupo de Lie de $\mathcal{U}$

La Grassmanniana de un espacio de Hilbert

La **Grassmanniana de un Hilbert** $\mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Gr(\mathcal{H}) &= \{\, \mathcal{S} \;:\; \mathcal{S} \text{ subespacio cerrado de } \mathcal{H} \,\} \\ &\simeq \{\, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;:\; P = P^2 = P^* \,\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son los operadores lineales continuos en $\mathcal{H}$

<u>Observación:</u> $\|P - Q\| \leq 1, \forall\, P, Q \in Gr(\mathcal{H})$

Acción del grupo unitario $\mathcal{U}$ sobre $Gr(\mathcal{H})$:

$$U \cdot P = UPU^*, \quad P \in Gr(\mathcal{H}),\ U \in \mathcal{U}$$

- Localmente transitiva: $\|P - Q\| < 1 \implies \exists\, U \in \mathcal{U}$ tal que $Q = UPU^*$
- Para cada $P \in Gr(\mathcal{H})$, su órbita cumple

$$\mathcal{O}_P = \{\, UPU^* \;:\; U \in \mathcal{U} \,\} = \text{ Comp. conexa } P$$

- $\mathcal{I}_P = \{\, U \in \mathcal{U} \;:\; UP = PU \,\}$ es un subgrupo de Lie de $\mathcal{U}$

Estructura diferencial de $Gr(\mathcal{H})$

Observación

$\mathcal{O}_P \simeq \mathcal{U}/\mathcal{I}_P$ es un espacio homogéneo suave de $\mathcal{U}$

Espacio tangente en P: derivar $\gamma(t) = e^{tX}Pe^{-tX}$, $X = -X^*$

$$T_P Gr(H) = \{\, XP - PX \,:\, X = -X^* \,\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix} : x_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}) \right\}$$
$$\subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})_h \ (= \text{ operadores hermitianos})$$

Proyección sobre el tangente:

$$E_P : \mathcal{B}(\mathcal{H})_h \to T_P Gr(\mathcal{H}), \quad E\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12}^* & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición (H. Porta, L. Recht '87)

$Gr(\mathcal{H})$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})_h$

Estructura diferencial de $Gr(\mathcal{H})$

Observación

$\mathcal{O}_P \simeq \mathcal{U}/\mathcal{I}_P$ es un espacio homogéneo suave de $\mathcal{U}$

Espacio tangente en P: derivar $\gamma(t) = e^{tX}Pe^{-tX}$, $X = -X^*$

$$T_P Gr(H) = \{\, XP - PX \,:\, X = -X^* \,\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \,:\, x_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}) \right\}$$
$$\subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})_h \;(= \text{ operadores hermitianos})$$

A

Proyección sobre el tangente:

$$E_P : \mathcal{B}(\mathcal{H})_h \to T_P Gr(\mathcal{H}), \;\; E\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12}^* & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición (H. Porta, L. Recht '87)

$Gr(\mathcal{H})$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})_h$

Geodésicas en $Gr(\mathcal{H})$

- Conexión lineal: $X(t)$ campo tangente a lo largo de $\alpha(t) \subseteq Gr(\mathcal{H})$

$$\frac{DX}{dt} = E_\alpha(\dot{X}(t))$$

- Ecuación geodésicas:

$$\ddot{\delta} = [[\dot{\delta}, \delta], \dot{\delta}]$$

- La geodésica δ tal que $\delta(0) = P$ y $\dot{\delta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$ está dada por

$$\delta(t) = e^{t\begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}} P \, e^{-t\begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}}$$

¿Geodésicas cortas? Medimos así: dada $\gamma : [0,1] \to Gr(\mathcal{H})$,

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

Geodésicas en $Gr(\mathcal{H})$

- Conexión lineal: $X(t)$ campo tangente a lo largo de $\alpha(t) \subseteq Gr(\mathcal{H})$

$$\frac{DX}{dt} = E_\alpha(\dot{X}(t))$$

- Ecuación geodésicas:

$$\ddot{\delta} = [[\dot{\delta}, \delta], \dot{\delta}]$$

- La geodésica δ tal que $\delta(0) = P$ y $\dot{\delta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$ está dada por

$$\delta(t) = e^{t\begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}} P \, e^{-t\begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}}$$

¿Geodésicas cortas? Medimos así: dada $\gamma : [0, 1] \to Gr(\mathcal{H})$,

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

Geodésicas en $Gr(\mathcal{H})$

Teorema (H. Porta, L. Recht '87)

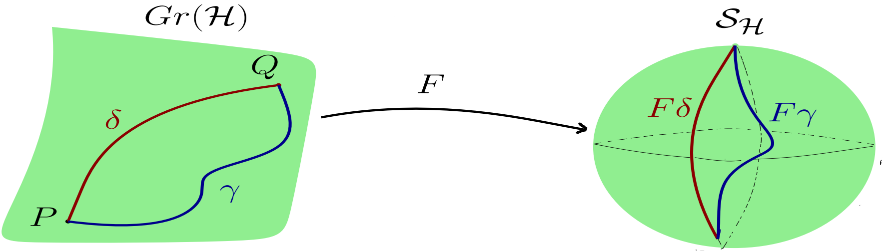
$\|P - Q\| < 1 \implies$ *Existe única geodésica minimal uniendo P y Q*

Ideas en la prueba: $\|P - Q\| < 1 \implies$ Hay $X = \begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$ tal que

$$e^X P e^{-X} = Q, \quad \|X\| < \pi/2$$

Geodésica minimal: $\delta(t) = e^{tX} P e^{-tX}$, $t \in [0, 1]$

Comparar en la esfera $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ usando una función F que reduce longitudes



Geodésicas en $Gr(\mathcal{H})$

Teorema (E. Andruchow '14)

Dadas $P, Q \in Gr(\mathcal{H})$, son equivalentes:

1. *Existe geodésica minimal uniendo P y Q*
2. *Existe geodésica uniendo P y Q*
3. $\dim(ran(P) \cap \ker(Q)) = \dim(\ker(P) \cap ran(Q))$

Además, hay una única geodésica minimal sii la dimensión es cero.

Halmos '69: $\mathcal{S} = ran(P)$, $\mathcal{T} = ran(Q)$, $\mathcal{S}^\perp = \ker(P)$, $\mathcal{T}^\perp = \ker(Q)$

$$\mathcal{H} = \underbrace{(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \oplus (\mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T}^\perp) \oplus (\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\perp) \oplus (\mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T})}_{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_0^\perp$$

Observación: La condición $\dim \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\perp = \dim \mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T}$ permite construir un operador $X = \begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$ tal que

$$e^X P e^{-X} = Q, \quad \|X\| \leq \pi/2$$

Geodésicas en $Gr(\mathcal{H})$

Teorema (E. Andruchow '14)

Dadas $P, Q \in Gr(\mathcal{H})$, son equivalentes:

1. *Existe geodésica minimal uniendo P y Q*
2. *Existe geodésica uniendo P y Q*
3. $\dim(ran(P) \cap \ker(Q)) = \dim(\ker(P) \cap ran(Q))$

Además, hay una única geodésica minimal sii la dimensión es cero.

Halmos '69: $\mathcal{S} = ran(P)$, $\mathcal{T} = ran(Q)$, $\mathcal{S}^\perp = \ker(P)$, $\mathcal{T}^\perp = \ker(Q)$

$$\mathcal{H} = \underbrace{(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \oplus (\mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T}^\perp) \oplus (\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\perp) \oplus (\mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T})}_{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_0^\perp$$

Observación: La condición $\dim \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^\perp = \dim \mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T}$ permite construir un operador $X = \begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$ tal que

$$e^X P e^{-X} = Q, \quad \|X\| \le \pi/2$$

Subespacios invariantes por el shift

$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}, \quad \mathbb{T} = \partial \mathbb{D}$

Espacio de Hardy:

$$H^2 = \left\{ f \text{ analítica en } \mathbb{D} : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}$$

$$\simeq \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : f = \sum_{n \geq 0} f_n e^{int} \right\}$$

Operador shift:

$$S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \ (Sf)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it})$$

Teorema (Beurling-Helson)

E subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$, $S(E) \subsetneq E \implies E = \varphi H^2$, $|\varphi| = 1$ a.e.

¿Geodésicas uniendo subespacios invariantes por el shift en $Gr(L^2(\mathbb{T}))$?
Dadas φ, ψ unimodulares, entender cuándo se cumple

$$\dim \varphi H^2 \cap (\psi H^2)^\perp = \dim \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp$$

Subespacios invariantes por el shift

$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}, \ \ \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$

Espacio de Hardy:

$$H^2 = \left\{ f \text{ analítica en } \mathbb{D} : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}$$

$$\simeq \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : f = \sum_{n\geq 0} f_n e^{int} \right\}$$

Operador shift:

$$S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \ \ (Sf)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it})$$

Teorema (Beurling-Helson)

E subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$, $S(E) \subsetneq E \Longrightarrow E = \varphi H^2$, $|\varphi| = 1$ a.e.

¿Geodésicas uniendo subespacios invariantes por el shift en $Gr(L^2(\mathbb{T}))$?

Dadas φ, ψ unimodulares, entender cuándo se cumple

$$\dim \varphi H^2 \cap (\psi H^2)^\perp = \dim \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp$$

Subespacios invariantes por el shift

$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < 1 \}, \quad \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$

Espacio de Hardy:

$$H^2 = \left\{ f \text{ analítica en } \mathbb{D} \, : \, \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}$$

$$\simeq \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \, : \, f = \sum_{n \geq 0} f_n e^{int} \right\}$$

Operador shift:

$$S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \;\; (Sf)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it})$$

Teorema (Beurling-Helson)

E subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$, $S(E) \subsetneq E \Longrightarrow E = \varphi H^2$, $|\varphi| = 1$ a.e.

¿Geodésicas uniendo subespacios invariantes por el shift en $Gr(L^2(\mathbb{T}))$?

Dadas φ, ψ unimodulares, entender cuándo se cumple

$$\dim \varphi H^2 \cap (\psi H^2)^{\perp} = \dim \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^{\perp}$$

$L^2 = L^2(\mathbb{T}), \quad L^\infty = L^\infty(\mathbb{T}), \quad P_+ =$ proyección ortogonal sobre H^2

Operador de Toeplitz

Dada $\varphi \in L^\infty, \quad T_\varphi : H^2 \to H^2, \quad T_\varphi(f) = P_+(\varphi f)$ B

Propiedades: $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty \; ; \quad T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}} \; ; \quad \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \simeq \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp$

Lema de Coburn: Si $\varphi \neq 0 \in L^\infty \implies \ker(T_\varphi) = \{0\}$ o $\ker(T_\varphi^*) = \{0\}$

Teorema (E. Andruchow, E.C., G. Larotonda)

Sean φ, ψ unimodulares. Son equivalentes:

1. $\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\overline{\varphi}\psi}) = \{0\}$
2. *Hay una geodésica en $Gr(L^2)$ uniendo φH^2 y ψH^2*
3. *Hay una única geodésica minimal en $Gr(L^2)$ uniendo φH^2 y ψH^2*

$L^2 = L^2(\mathbb{T}), \;\; L^\infty = L^\infty(\mathbb{T}), \;\; P_+ =$ proyección ortogonal sobre H^2

Operador de Toeplitz

Dada $\varphi \in L^\infty, \;\; T_\varphi : H^2 \to H^2, \;\; T_\varphi(f) = P_+(\varphi f)$

Propiedades: $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$; $\quad T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$; $\quad \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \simeq \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp$

Lema de Coburn: Si $\varphi \neq 0 \in L^\infty \Longrightarrow \ker(T_\varphi) = \{0\}$ o $\ker(T_\varphi^*) = \{0\}$

Teorema (E. Andruchow, E.C., G. Larotonda)

Sean φ, ψ unimodulares. Son equivalentes:

1. $\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\overline{\varphi}\psi}) = \{0\}$
2. *Hay una geodésica en $Gr(L^2)$ uniendo φH^2 y ψH^2*
3. *Hay una única geodésica minimal en $Gr(L^2)$ uniendo φH^2 y ψH^2*

Operadores de Toeplitz y geodésicas

$L^2 = L^2(\mathbb{T})$, $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T})$, $P_+ =$ proyección ortogonal sobre H^2

Operador de Toeplitz

Dada $\varphi \in L^\infty$, $T_\varphi : H^2 \to H^2$, $T_\varphi(f) = P_+(\varphi f)$

B

Propiedades: $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$; $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$; $\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \simeq \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp$

Lema de Coburn: Si $\varphi \neq 0 \in L^\infty \implies \ker(T_\varphi) = \{0\}$ o $\ker(T_\varphi^*) = \{0\}$

Teorema (E. Andruchow, E.C., G. Larotonda)

Sean φ, ψ unimodulares. Son equivalentes:

1. $\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\overline{\varphi}\psi}) = \{0\}$
2. *Hay una geodésica en $Gr(L^2)$ uniendo φH^2 y ψH^2*
3. *Hay una única geodésica minimal en $Gr(L^2)$ uniendo φH^2 y ψH^2*

Inyectividad de operadores Toeplitz

- D. Clark '69
- M. Lee - D. Sarason '71
- N. Makarov - A. Poltoratski '10 (Completitud de exponenciales)
- M. Mitkovski- A. Poltoratski '10 (Sucesiones de Pólya)

Condición suficiente:

$$T_{\varphi\overline{\psi}} \text{ invertible} \Longrightarrow \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\overline{\varphi}\psi}) = \{0\}$$

No vale: " $\Longleftarrow$ " (veremos ejemplo más delante)

Notación: $C = C(\mathbb{T})$, $H^\infty := L^\infty \cap H^2$
Álgebra de Sarason:

$$H^\infty + C = \{ f + g : f \in H^\infty, g \in C \}$$

- $H^\infty \subseteq H^\infty + C \subseteq L^\infty$ son subálgebras
- Noción bien definida de índice para f invertible en $H^\infty + C$

Inyectividad e invertibilidad de operadores de Toeplitz

Inyectividad de operadores Toeplitz

- D. Clark '69
- M. Lee - D. Sarason '71
- N. Makarov - A. Poltoratski '10 (Completitud de exponenciales)
- M. Mitkovski- A. Poltoratski '10 (Sucesiones de Pólya)

Condición suficiente:

$$T_{\varphi\overline{\psi}} \text{ invertible} \Longrightarrow \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\overline{\varphi}\psi}) = \{0\}$$

No vale: " $\Longleftarrow$ " (veremos ejemplo más delante)

Notación: $C = C(\mathbb{T})$, $\;H^\infty := L^\infty \cap H^2$
Álgebra de Sarason:

$$H^\infty + C = \{ f + g \,:\, f \in H^\infty,\, g \in C \}$$

- $H^\infty \subseteq H^\infty + C \subseteq L^\infty$ son subálgebras
- Noción bien definida de índice para f invertible en $H^\infty + C$

Inyectividad e invertibilidad de operadores de Toeplitz

Teorema (Invertibilidad de operadores de Toeplitz)

Dada $f \in L^\infty$, valen

1. T_f *es invertible* $\iff$ T_f *Fredholm de índice cero*
2. *Si* $f \in H^\infty + C$, T_f *invertible* $\iff$ f *invertible en* $H^\infty + C$, $ind(f) = 0$

$$\begin{aligned} ind(\varphi\overline{\psi}) = -ind(T_{\varphi\overline{\psi}}) &= \dim\ker(T_{\psi\overline{\varphi}}) - \dim\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \\ &= \dim \varphi H^2 \cap (\psi H^2)^\perp - \dim \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp \end{aligned}$$

Corolario (E. Andruchow, E.C., G. Larotonda)

Sean φ, ψ *invertibles en* $H^\infty + C$. *Entonces* $ind(\varphi) = ind(\psi) \iff$
$\exists!$ *geodésica minimal en* $Gr(L^2)$ *uniendo* φH^2 *y* ψH^2

Ejemplos:

- $z\left(\frac{z-1/2}{1-z/2}\right)H^2$ y $z^{-1}\left(\frac{z-1/3}{1-z/3}\right)\left(\frac{z-1/4}{1-z/4}\right)\left(\frac{z-1/5}{1-z/5}\right)H^2 \rightsquigarrow \exists$ geodésica
- zH^2 y $z^{-1}H^2 \rightsquigarrow \nexists$ geodésica

Inyectividad e invertibilidad de operadores de Toeplitz

Teorema (Invertibilidad de operadores de Toeplitz)

Dada $f \in L^\infty$, valen

1. T_f *es invertible* $\Longleftrightarrow$ T_f *Fredholm de índice cero*
2. *Si* $f \in H^\infty + C$, T_f *invertible* $\Longleftrightarrow$ f *invertible en* $H^\infty + C$, $ind(f) = 0$

$$\begin{aligned} ind(\varphi\overline{\psi}) = -ind(T_{\varphi\overline{\psi}}) &= \dim\ker(T_{\psi\overline{\varphi}}) - \dim\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \\ &= \dim \varphi H^2 \cap (\psi H^2)^\perp - \dim \psi H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp \end{aligned}$$

Corolario (E. Andruchow, E.C., G. Larotonda)

Sean φ, ψ *invertibles en* $H^\infty + C$. *Entonces* $ind(\varphi) = ind(\psi) \Longleftrightarrow$
$\exists!$ *geodésica minimal en* $Gr(L^2)$ *uniendo* φH^2 *y* ψH^2

Ejemplos:

- $z\left(\frac{z-1/2}{1-z/2}\right)H^2$ y $z^{-1}\left(\frac{z-1/3}{1-z/3}\right)\left(\frac{z-1/4}{1-z/4}\right)\left(\frac{z-1/5}{1-z/5}\right)H^2 \quad \rightsquigarrow \quad \exists$ geodésica
- zH^2 y $z^{-1}H^2 \quad \rightsquigarrow \quad \nexists$ geodésica

Factorización de funciones en H^2

$f \in H^2$ es *interior* si $|f| = 1$ a.e.

$f \in H^2$ es *exterior* si $\overline{\text{span}}\{ f\chi_n : n \geq 0 \} = H^2$, siendo $\chi_n(e^{it}) = e^{int}$

Teorema (Factorización interior-exterior)

Si $f \in H^2$, $f = f_{int} f_{ext}$ (única salvo constantes)

Las funciones interiores se pueden seguir factorizando...

Productos de Blaschke: Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D} \setminus \{ 0 \}$

$$b(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\overline{a_j}}{|a_j|} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Para infinitos $a_1, a_2, \ldots$, tenemos la *condición de Blaschke*

$$\text{Producto converge} \iff \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) < \infty$$

Observación: Productos de Blaschke son interiores con ceros $\{ a_j \}$

Factorización de funciones en H^2

$f \in H^2$ es *interior* si $|f| = 1$ a.e.

$f \in H^2$ es *exterior* si $\overline{\text{span}}\{ f\chi_n : n \geq 0 \} = H^2$, siendo $\chi_n(e^{it}) = e^{int}$

Teorema (Factorización interior-exterior)

Si $f \in H^2$, $f = f_{int} f_{ext}$ (única salvo constantes)

Las funciones interiores se pueden seguir factorizando...

Productos de Blaschke: Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D} \setminus \{ 0 \}$

$$b(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\overline{a_j}}{|a_j|} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Para infinitos $a_1, a_2, \ldots$, tenemos la *condición de Blaschke*

$$\text{Producto converge} \iff \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) < \infty$$

<u>Observación:</u> Productos de Blaschke son interiores con ceros $\{ a_j \}$

Factorización de funciones en H^2

Funciones singulares: Sea μ medida positiva finita en $\mathbb{T}$ y μ singular respecto medida de Lebesgue

$$s_\mu(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\mu(w)\right)$$

Observación: Son interiores y $s_\mu \neq 0$ en $\mathbb{D}$

Ejemplo: Si μ soportada en $\{1\}$, $s_\mu(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$

Teorema (Factorización canónica)

Toda $f \in H^2$ se factoriza como

$$f = \lambda\, b\, s_\mu f_{ext}\,,$$

donde $\lambda \in \mathbb{T}$, b producto de Blaschke, s_μ singular y f_{ext} parte exterior de f

Ejemplos

Observación

Si φ/ψ (i.e. $\varphi\theta = \psi$ para alguna θ función interior) $\Longrightarrow \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \neq \{0\}$

Ejemplo: Tomando como ceros $a_j = -1 + 1/j^2$, no hay geodésica entre

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{-1+1/(2j)^2 - z}{1-(-1+1/(2j)^2)z} e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2 \qquad \text{y} \qquad \prod_{j=1}^{\infty} \frac{-1+1/j^2 - z}{1-(-1+1/j^2)z} e^{\frac{z+1}{z-1}} e^{\frac{z-1}{z+1}} H^2$$

Teorema (M. Lee - D. Sarason '71)

Sean φ, ψ funciones interiores.

1. *$sop(\varphi) \setminus sop(\psi) \neq \emptyset$* $\Longrightarrow \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \{0\}$
2. *$sop(\varphi) \neq sop(\psi)$ $\Longrightarrow$ espectro de $T_{\varphi\overline{\psi}}$ es $\overline{\mathbb{D}}$*

Ejemplo: Hay geodésica entre

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{-1+1/j^2 - z}{1-(-1+1/j^2)z} H^2 \qquad \text{y} \qquad e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2$$

Observación: $T_{\varphi\overline{\psi}}$ inyectivo, rango denso y no invertible

Ejemplos

Observación

Si φ/ψ (i.e. $\varphi\theta = \psi$ para alguna θ función interior) $\Longrightarrow \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) \neq \{0\}$

Ejemplo: Tomando como ceros $a_j = -1 + 1/j^2$, no hay geodésica entre

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{-1 + 1/(2j)^2 - z}{1 - (-1 + 1/(2j)^2)z} e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2 \qquad \text{y} \qquad \prod_{j=1}^{\infty} \frac{-1 + 1/j^2 - z}{1 - (-1 + 1/j^2)z} e^{\frac{z+1}{z-1}} e^{\frac{z-1}{z+1}} H^2$$

Teorema (M. Lee - D. Sarason '71)

Sean φ, ψ funciones interiores.

1. *$sop(\varphi) \setminus sop(\psi) \neq \emptyset$* $\Longrightarrow \ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \{0\}$
2. *$sop(\varphi) \neq sop(\psi)$ $\Longrightarrow$ espectro de $T_{\varphi\overline{\psi}}$ es $\overline{\mathbb{D}}$*

Ejemplo: Hay geodésica entre

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{-1 + 1/j^2 - z}{1 - (-1 + 1/j^2)z} H^2 \qquad \text{y} \qquad e^{\frac{z+1}{z-1}} H^2$$

Observación: $T_{\varphi\overline{\psi}}$ inyectivo, rango denso y no invertible

Una desigualdad

Notación: P_φ (resp. P_ψ) proyección ortogonal sobre φH^2 (resp. ψH^2)

Si hay geodésica entre φH^2 y ψH^2, está dada por

$$\delta(t) = e^{tX_{\varphi,\psi}} P_\varphi e^{-tX_{\varphi,\psi}}, \ \ t \in [0,1]$$

donde $X^*_{\varphi,\psi} = -X_{\varphi,\psi}$ codiagonal y $P_\psi = e^{X_{\varphi,\psi}} P_\varphi e^{-X_{\varphi,\psi}}$

Definición: Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\gamma(A) = \text{ínf}\ \sigma(|A|) \setminus \{0\}$ (módulo mínimo reducido).

Lema

$$\|X_{\varphi,\psi}\| = \cos^{-1}\left(\gamma(T_{\varphi\overline{\psi}})\right)$$

Teorema (E. Andruchow, E. C., G. Larotonda)

φ, ψ unimodulares tales que $\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\psi\overline{\varphi}}) = \{0\} \Longrightarrow$

$$\|M_\theta P_+ - P_+ M_\theta\| \geq \cos^{-1}\left(\gamma(T_{\varphi\overline{\psi}})\right)$$

para toda función real $\theta \in L^\infty$ con $e^{i\theta} = \varphi\overline{\psi}$

Una desigualdad

Notación: P_φ (resp. P_ψ) proyección ortogonal sobre φH^2 (resp. ψH^2)

Si hay geodésica entre φH^2 y ψH^2, está dada por

$$\delta(t) = e^{tX_{\varphi,\psi}} P_\varphi e^{-tX_{\varphi,\psi}}, \ \ t \in [0,1]$$

donde $X^*_{\varphi,\psi} = -X_{\varphi,\psi}$ codiagonal y $P_\psi = e^{X_{\varphi,\psi}} P_\varphi e^{-X_{\varphi,\psi}}$

Definición: Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\gamma(A) = \text{ínf}\ \sigma(|A|) \setminus \{0\}$ (módulo mínimo reducido).

Lema

$$\|X_{\varphi,\psi}\| = \cos^{-1}\left(\gamma(T_{\varphi\overline{\psi}})\right)$$

Teorema (E. Andruchow, E. C., G. Larotonda)

φ, ψ unimodulares tales que $\ker(T_{\varphi\overline{\psi}}) = \ker(T_{\psi\overline{\varphi}}) = \{0\} \Longrightarrow$

$$\|M_\theta P_+ - P_+ M_\theta\| \geq \cos^{-1}\left(\gamma(T_{\varphi\overline{\psi}})\right)$$

para toda función real $\theta \in L^\infty$ con $e^{i\theta} = \varphi\overline{\psi}$

Muchas gracias

Representación por bloques

Si P proyección sobre $\mathcal{S}$, cualquier $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se escribe

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

donde

$$x_{11} = PX|_{\mathcal{S}} \qquad x_{12} = PX|_{\mathcal{S}^{\perp}}$$

$$x_{21} = (I - P)X|_{\mathcal{S}} \qquad x_{22} = (I - P)X|_{\mathcal{S}^{\perp}}$$

Observación: $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

vuelta

Representación por bloques

Si P proyección sobre $\mathcal{S}$, cualquier $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se escribe

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

donde

$$x_{11} = PX|_{\mathcal{S}} \qquad x_{12} = PX|_{\mathcal{S}^\perp}$$

$$x_{21} = (I - P)X|_{\mathcal{S}} \qquad x_{22} = (I - P)X|_{\mathcal{S}^\perp}$$

Observación: $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

vuelta

Usando que $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de L^2, y si $\varphi \in L^\infty$,

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

el operador de Toeplitz se escribe

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & \cdots \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \cdots \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \cdots \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

▸ B

Apéndice B

Usando que $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de L^2, y si $\varphi \in L^\infty$,

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

el operador de Toeplitz se escribe

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & \cdots \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \cdots \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \cdots \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

B