Formalismo unificado para gravedad de Palatini

S. Capriotti[1]

[1]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina y CONICET

Encuentro Argentino de Mecánica Geométrica y Física-Matemática
Mar del Plata 2017

Esquema de la charla

Dónde estamos...

Teorías de campo

- Datos iniciales:
  - Fibrado $\pi : E \to M^m$.
  - Densidad Lagrangiana $\mathscr{L} : J^k\pi \to \wedge^m(T^*M)$.
- En $J^k\pi$ tenemos los morfismos

$$\begin{tikzcd}
J^k\pi \arrow[r, "\pi_{k,k-1}"] \arrow[dr, "\pi_k"] & J^{k-1}\pi \arrow[r, "\pi_{k-1,k-2}"] \arrow[d, "\pi_{k-1}"] & \cdots \arrow[r, "\pi_{21}"] & J^1\pi \arrow[r, "\pi_{10}"] \arrow[dll, "\pi_1"'] & E \arrow[dlll, bend left, "\pi"] \\
 & M & & &
\end{tikzcd}$$

- Una sección $s_k : M \to J^k\pi$ es *holónoma* si $s_k = j^k s$ para alguna sección $s : M \to E$.
- El problema variacional asociado a estos datos consiste en hallar los extremales de

$$S[s] := \int_M \left(j^k s\right)^* \mathscr{L}.$$

Espacio de multimomentos

- Fijamos $\eta \in \wedge^m M$ forma de volumen.
- $\wedge^k_l E :=$ $k-$formas γ sobre E tales que $V_1 \lrcorner \cdots V_p \lrcorner \gamma = 0$ si $p \geq l$ y $V_i \in V\pi$.
- Definimos

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}\pi := \wedge^m_2 E \arrow[rr, "\overline{\tau}^m_E"] \arrow[dr, "\nu"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

- Coordenadas locales: $\alpha = \left(x^\mu, u^A, p, p^\mu_A\right)$ sii

$$\alpha = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu, \qquad \eta_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \eta.$$

- Tenemos la m-forma canónica

$$\Theta|_\alpha (Z) := \alpha \left(T_\alpha \overline{\tau}^m_E (Z)\right).$$

- Localmente

$$\Theta = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu$$

Formalismo unificado en teorías de campo[1]

- Definimos $W := J^1\pi \times_E \mathscr{M}\pi$, con proyecciones

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_M"] & \\ J^1\pi \arrow[r, "\pi_1"'] & M & \mathscr{M}\pi \arrow[l, "\nu"] \end{tikzcd}$$

- Existen m-formas C, Θ_W sobre W tales que

$$C|_{(j^1_x s,\alpha)} := \rho_M^*\left((T_x s)^*\alpha\right), \qquad \Theta_W := \rho_2^*\Theta.$$

- Coordenadas locales $\left(x^\mu, u^A, u^A_\mu, p, p^\mu_A\right)$,

$$C = \left(p + p^\mu_A u^A_\mu\right)\eta, \qquad \Theta_W = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu.$$

- Definimos la *subvariedad hamiltoniana* $W_0 \subset W$ tal que $C = \rho_1^*\mathscr{L}$.

Teorema

Sea $\sigma_0 : M \to W_0$ tal que $\sigma_0^*(Z \lrcorner d\Theta_0) = 0$, con $Z \in \mathfrak{X}^{V\rho^0_M}(W_0)$. Entonces

- *$\rho^0_1 \circ \sigma_0 = j^1 s$ para alguna sección $s : M \to E$ solución de las ecs. de E-L para $\mathscr{L}$.*
- *Si s solución de las ecs. de E-L, entonces $\sigma_0 := \left(j^1 s, \mathbb{F}\mathscr{L} \circ j^1 s\right)$ solución del problema unificado.*

---

[1] M. de León, J. C. Marrero y D. Martin de Diego (2003). "A New geometric setting for classical field theories". En: *Banach Center Publ.* 59, págs. 189-209. arXiv: math-ph/0202012 [math-ph]; A. Echeverría-Enríquez y col. (ene. de 2004). "Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory". En: *Journal of Mathematical Physics* 45 (ene. de 2004), págs. 360-380. eprint: math-ph/0212002.

Formalismo unificado en teorías de campo[1]

- Definimos $W := J^1\pi \times_E \mathscr{M}\pi$, con proyecciones

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[d, "\rho_M"] \arrow[dr, "\rho_2"] & \\ J^1\pi \arrow[dr, "\pi_1"'] & M & \mathscr{M}\pi \arrow[dl, "\nu"] \\ & & \end{tikzcd}$$

- Existen m-formas C, Θ_W sobre W tales que

$$C|_{(j^1_x s,\alpha)} := \rho_M^*\left((T_x s)^*\alpha\right), \qquad \Theta_W := \rho_2^*\Theta.$$

- Coordenadas locales $(x^\mu, u^A, u^A_\mu, p, p^\mu_A)$,

$$C = \left(p + p^\mu_A u^A_\mu\right)\eta, \qquad \Theta_W = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu.$$

- Definimos la *subvariedad hamiltoniana* $W_0 \subset W$ tal que $C = \rho_1^*\mathscr{L}$.

Teorema

Sea $\sigma_0 : M \to W_0$ *tal que* $\sigma_0^*(Z \lrcorner d\Theta_0) = 0$, *con* $Z \in \mathfrak{X}^{V\rho_M^0}(W_0)$. *Entonces*

- $\rho_1^0 \circ \sigma_0 = j^1 s$ *para alguna sección* $s : M \to E$ *solución de las ecs. de E-L para* $\mathscr{L}$.
- *Si* s *solución de las ecs. de E-L, entonces* $\sigma_0 := \left(j^1 s, \mathbb{F}\mathscr{L} \circ j^1 s\right)$ *solución del problema unificado.*

[1] M. de León, J. C. Marrero y D. Martin de Diego (2003). "A New geometric setting for classical field theories". En: *Banach Center Publ.* 59, págs. 189-209. arXiv: math-ph/0202012 [math-ph]; A. Echeverría-Enríquez y col. (ene. de 2004). "Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory". En: *Journal of Mathematical Physics* 45 (ene. de 2004), págs. 360-380. eprint: math-ph/0212002.

Formalismo unificado en teorías de campo[1]

- Definimos $W := J^1\pi \times_E \mathscr{M}\pi$, con proyecciones

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\rho_2"] \arrow[dd, "\rho_M"] & \\ J^1\pi \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathscr{M}\pi \arrow[dl, "\nu"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

- Existen m-formas C, Θ_W sobre W tales que

$$C|_{(j^1_x s,\alpha)} := \rho_M^*\left((T_x s)^*\alpha\right), \qquad \Theta_W := \rho_2^*\Theta.$$

- Coordenadas locales $\left(x^\mu, u^A, u^A_\mu, p, p^\mu_A\right)$,

$$C = \left(p + p^\mu_A u^A_\mu\right)\eta, \qquad \Theta_W = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu.$$

- Definimos la *subvariedad hamiltoniana* $W_0 \subset W$ tal que $C = \rho_1^*\mathscr{L}$.

Teorema

Sea $\sigma_0 : M \to W_0$ tal que $\sigma_0^*(Z \lrcorner d\Theta_0) = 0$, con $Z \in \mathfrak{X}^{V\rho^0_M}(W_0)$. Entonces

- *$\rho^0_1 \circ \sigma_0 = j^1 s$ para alguna sección $s : M \to E$ solución de las ecs. de E-L para $\mathscr{L}$.*
- *Si s solución de las ecs. de E-L, entonces $\sigma_0 := \left(j^1 s, \mathbb{F}\mathscr{L} \circ j^1 s\right)$ solución del problema unificado.*

---

[1] M. de León, J. C. Marrero y D. Martin de Diego (2003). "A New geometric setting for classical field theories". En: *Banach Center Publ.* 59, págs. 189-209. arXiv: math-ph/0202012 [math-ph]; A. Echeverría-Enríquez y col. (ene. de 2004). "Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory". En: *Journal of Mathematical Physics* 45 (ene. de 2004), págs. 360-380. eprint: math-ph/0212002.

Formalismo unificado en teorías de campo[1]

- Definimos $W := J^1\pi \times_E \mathscr{M}\pi$, con proyecciones

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\rho_2"] \arrow[dd, "\rho_M"] & \\
J^1\pi \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathscr{M}\pi \arrow[dl, "\nu"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

- Existen m-formas C, Θ_W sobre W tales que

$$C|_{(j^1_x s, \alpha)} := \rho_M^*\left((T_x s)^* \alpha\right), \qquad \Theta_W := \rho_2^* \Theta.$$

- Coordenadas locales $(x^\mu, u^A, u^A_\mu, p, p^\mu_A)$,

$$C = \left(p + p^\mu_A u^A_\mu\right)\eta, \qquad \Theta_W = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu.$$

- Definimos la *subvariedad hamiltoniana* $W_0 \subset W$ tal que $C = \rho_1^* \mathscr{L}$.

Teorema

Sea $\sigma_0 : M \to W_0$ *tal que* $\sigma_0^*(Z \lrcorner d\Theta_0) = 0$*, con* $Z \in \mathfrak{X}^{V\rho_M^0}(W_0)$*. Entonces*

- $\rho_1^0 \circ \sigma_0 = j^1 s$ *para alguna sección* $s : M \to E$ *solución de las ecs. de E-L para* $\mathscr{L}$.
- *Si* s *solución de las ecs. de E-L, entonces* $\sigma_0 := \left(j^1 s, \mathbb{F}\mathscr{L} \circ j^1 s\right)$ *solución del problema unificado.*

[1] M. de León, J. C. Marrero y D. Martin de Diego (2003). "A New geometric setting for classical field theories". En: *Banach Center Publ.* 59, págs. 189-209. arXiv: math-ph/0202012 [math-ph]; A. Echeverría-Enríquez y col. (ene. de 2004). "Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory". En: *Journal of Mathematical Physics* 45 (ene. de 2004), págs. 360-380. eprint: math-ph/0212002.

Formalismo unificado en teorías de campo[1]

- Definimos $W := J^1\pi \times_E \mathscr{M}\pi$, con proyecciones

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\rho_2"] \arrow[dd, "\rho_M"] & \\ J^1\pi \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathscr{M}\pi \arrow[dl, "\nu"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

- Existen m-formas C, Θ_W sobre W tales que

$$C|_{(j^1_x s, \alpha)} := \rho_M^*\left((T_x s)^*\alpha\right), \qquad \Theta_W := \rho_2^*\Theta.$$

- Coordenadas locales $(x^\mu, u^A, u^A_\mu, p, p^\mu_A)$,

$$C = \left(p + p^\mu_A u^A_\mu\right)\eta, \qquad \Theta_W = p\eta + p^\mu_A du^A \wedge \eta_\mu.$$

- Definimos la *subvariedad hamiltoniana* $W_0 \subset W$ tal que $C = \rho_1^*\mathscr{L}$.

Teorema

Sea $\sigma_0 : M \to W_0$ *tal que* $\sigma_0^*(Z \lrcorner d\Theta_0) = 0$, *con* $Z \in \mathfrak{X}^{V\rho^0_M}(W_0)$. *Entonces*

- $\rho^0_1 \circ \sigma_0 = j^1 s$ *para alguna sección* $s : M \to E$ *solución de las ecs. de E-L para* $\mathscr{L}$.
- *Si* s *solución de las ecs. de E-L, entonces* $\sigma_0 := \left(j^1 s, \mathbb{F}\mathscr{L} \circ j^1 s\right)$ *solución del problema unificado.*

---

[1] M. de León, J. C. Marrero y D. Martin de Diego (2003). "A New geometric setting for classical field theories". En: *Banach Center Publ.* 59, págs. 189-209. arXiv: math-ph/0202012 [math-ph]; A. Echeverría-Enríquez y col. (ene. de 2004). "Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory". En: *Journal of Mathematical Physics* 45 (ene. de 2004), págs. 360-380. eprint: math-ph/0212002.

Otra manera de construir el formalismo unificado[2]

- Sobre $J^1\pi$ consideramos el subfibrado

$$I_{\mathrm{con}} := \left\{ \left(du^A - u^A_\mu dx^\mu \right) \wedge \beta_A : \beta_A \in \wedge^{m-1}_1 \left(J^1\pi \right) \right\} \subset \wedge^m_2 \left(J^1\pi \right).$$

- Consideramos

$$W_{\mathscr{L}} := \pi_1^* \mathscr{L} + I_{\mathrm{con}} \subset \wedge^m_2 \left(J^1\tau \right)$$

En coordenadas locales

$$\alpha \in W_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = L\eta + p^\mu_A \left(du^A - u^A_\nu dx^\nu \right) \wedge \eta_\mu .$$

- $\Theta_{\mathscr{L}}$:= pullback de la m-forma canónica sobre $\wedge^m_2 \left(J^1\pi \right)$ a $W_{\mathscr{L}}$.

Lema

$W_{\mathscr{L}}$ es isomorfo a W_0 como fibrado sobre E, y el isomorfismo aplica Θ_0 en $\Theta_{\mathscr{L}}$.

$\Rightarrow$ Podemos reconstruir el formalismo unificado!

[2] M.J. Gotay (1991). "An exterior differential system approach to the Cartan form". En: *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990*. Ed. por P. Donato y col. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, págs. 160-188.

Otra manera de construir el formalismo unificado[2]

- Sobre $J^1\pi$ consideramos el subfibrado

$$I_{\text{con}} := \left\{ \left(du^A - u^A_\mu dx^\mu \right) \wedge \beta_A : \beta_A \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\pi\right) \right\} \subset \wedge_2^m\left(J^1\pi\right).$$

- Consideramos

$$W_{\mathscr{L}} := \pi_1^* \mathscr{L} + I_{\text{con}} \subset \wedge_2^m\left(J^1\tau\right)$$

En coordenadas locales

$$\alpha \in W_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = L\eta + p^\mu_A \left(du^A - u^A_\nu dx^\nu \right) \wedge \eta_\mu.$$

- $\Theta_{\mathscr{L}}$:= pullback de la m-forma canónica sobre $\wedge_2^m\left(J^1\pi\right)$ a $W_{\mathscr{L}}$.

Lema

$W_{\mathscr{L}}$ es isomorfo a W_0 como fibrado sobre E, y el isomorfismo aplica Θ_0 en $\Theta_{\mathscr{L}}$.

$\Rightarrow$ Podemos reconstruir el formalismo unificado!

[2] M.J. Gotay (1991). "An exterior differential system approach to the Cartan form". En: *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990*. Ed. por P. Donato y col. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, págs. 160-188.

Otra manera de construir el formalismo unificado[2]

- Sobre $J^1\pi$ consideramos el subfibrado

$$I_{\mathrm{con}} := \left\{ \left(du^A - u^A_\mu dx^\mu \right) \wedge \beta_A : \beta_A \in \wedge^{m-1}_1 \left(J^1\pi \right) \right\} \subset \wedge^m_2 \left(J^1\pi \right).$$

- Consideramos

$$W_{\mathscr{L}} := \pi_1^* \mathscr{L} + I_{\mathrm{con}} \subset \wedge^m_2 \left(J^1\tau \right)$$

  En coordenadas locales

$$\alpha \in W_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = L\eta + p^\mu_A \left(du^A - u^A_\nu dx^\nu \right) \wedge \eta_\mu.$$

- $\Theta_{\mathscr{L}} :=$ pullback de la m-forma canónica sobre $\wedge^m_2 \left(J^1\pi \right)$ a $W_{\mathscr{L}}$.

Lema

$W_{\mathscr{L}}$ es isomorfo a W_0 como fibrado sobre E, y el isomorfismo aplica Θ_0 en $\Theta_{\mathscr{L}}$.

$\Rightarrow$ Podemos reconstruir el formalismo unificado!

---

[2] M.J. Gotay (1991). "An exterior differential system approach to the Cartan form". En: *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990*. Ed. por P. Donato y col. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, págs. 160-188.

Otra manera de construir el formalismo unificado[2]

- Sobre $J^1\pi$ consideramos el subfibrado
$$I_{\text{con}} := \left\{ \left(du^A - u^A_\mu dx^\mu \right) \wedge \beta_A : \beta_A \in \wedge^{m-1}_1 \left(J^1\pi \right) \right\} \subset \wedge^m_2 \left(J^1\pi \right).$$
- Consideramos
$$W_{\mathscr{L}} := \pi_1^* \mathscr{L} + I_{\text{con}} \subset \wedge^m_2 \left(J^1\tau \right)$$
En coordenadas locales
$$\alpha \in W_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = L\eta + p^\mu_A \left(du^A - u^A_\nu dx^\nu \right) \wedge \eta_\mu.$$
- $\Theta_{\mathscr{L}} :=$ pullback de la m-forma canónica sobre $\wedge^m_2 \left(J^1\pi \right)$ a $W_{\mathscr{L}}$.

Lema

$W_{\mathscr{L}}$ es isomorfo a W_0 como fibrado sobre E, y el isomorfismo aplica Θ_0 en $\Theta_{\mathscr{L}}$.

$\Rightarrow$ Podemos reconstruir el formalismo unificado!

[2] M.J. Gotay (1991). "**An exterior differential system approach to the Cartan form**". En: *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990*. Ed. por P. Donato y col. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, págs. 160-188.

Otra manera de construir el formalismo unificado[2]

- Sobre $J^1\pi$ consideramos el subfibrado

$$I_{\mathrm{con}} := \left\{ \left(du^A - u^A_\mu dx^\mu \right) \wedge \beta_A : \beta_A \in \wedge_1^{m-1} \left(J^1\pi \right) \right\} \subset \wedge_2^m \left(J^1\pi \right).$$

- Consideramos

$$W_{\mathscr{L}} := \pi_1^* \mathscr{L} + I_{\mathrm{con}} \subset \wedge_2^m \left(J^1\tau \right)$$

En coordenadas locales

$$\alpha \in W_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = L\eta + p_A^\mu \left(du^A - u^A_\nu dx^\nu \right) \wedge \eta_\mu.$$

- $\Theta_{\mathscr{L}} :=$ pullback de la m-forma canónica sobre $\wedge_2^m \left(J^1\pi \right)$ a $W_{\mathscr{L}}$.

Lema

$W_{\mathscr{L}}$ es isomorfo a W_0 como fibrado sobre E, y el isomorfismo aplica Θ_0 en $\Theta_{\mathscr{L}}$.

$\Rightarrow$ Podemos reconstruir el formalismo unificado!

[2] M.J. Gotay (1991). "**An exterior differential system approach to the Cartan form**". En: *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990.* Ed. por P. Donato y col. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, págs. 160-188.

Dónde estamos...

Problema variacional de Einstein-Hilbert

- Sea M *espacio-tiempo*, $[\tau]:\Sigma\to M$ el *fibrado de métricas sobre* M.
- Hallar sección $g:M\to\Sigma$ extremal para el funcional

$$S_{\mathrm{EH}}[g]:=\int_M R(g)\,\eta_g$$

  donde η_g es el volumen asociado a la métrica g y $R(g)$ es la curvatura escalar de dicha métrica.
- Como

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}:=\frac{1}{2}g^{\rho\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}:=\frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

y $R_{\sigma\nu}:=R^{\mu}_{\sigma\mu\nu}, R(g)=g^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu}$, entonces la teoría de campos subyacente es de *segundo orden*.

Geometría local sobre variedades

- **Bases móviles (Rèpere mobile)[3]:** Se cubre M con pares $\left(X_i,\omega^i_j\right)$, cada uno definido sobre U, de manera tal que si $\left(Y_i,\nu^j_i\right)$ es otro par definido sobre V y
$$Y_i = a^j_i X_j$$
con $a : U\cap V \to GL(m)$, entonces
$$\nu^j_i = b^p_i\,\omega^q_p\,a^j_q + b^k_i\,da^j_k,$$
tomando $b := a^{-1}$. Curvatura y torsión:
$$\Omega^j_i := d\omega^j_i + \omega^k_i\wedge\omega^j_k, \qquad T^i := d\theta^i + \omega^i_k\wedge\theta^k.$$

- **Cálculo de Ricci:** Se cubre M con cartas, y
$$X_i := \delta^\mu_i\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \omega^j_i := \delta^\nu_i\,\delta^j_\mu\,\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\,dx^\sigma.$$
Curvatura y torsión: Escribiendo $\Omega^i_j := \delta^i_\mu\,\delta^\nu_j\,R^\mu_{\nu\sigma\rho}\,dx^\sigma\wedge dx^\rho, T^i = \delta^i_\mu\,T^\mu$,
$$R^\mu_{\nu\sigma\rho}\,dx^\sigma\wedge dx^\rho = d\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\wedge dx^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa}\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,dx^\kappa\wedge dx^\rho, \qquad T^\mu = \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\,dx^\sigma\wedge dx^\rho.$$

[3] É. Cartan (1937). *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle: traitées par la méthode du repère mobile.* Cahiers scientifiques. Gauthier-Villars.

Teorías de calibre en RG

- Usando bases móviles $\left(X_i, \omega^i_j\right)$ tales que
  1. $\{X_i\}$ es una base de TM,
  2. $d\theta^i + \omega^i_j \theta^j = 0$, y
  3. $\eta^{ij}\omega^k_j + \eta^{kj}\omega^i_j = 0$.
- La curvatura se obtiene de la *segunda ecuación de estructura*

$$\Omega^l_k := d\omega^l_k + \omega^l_p \wedge \omega^p_k.$$

- Esta descripción tiene como fibrado $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases sobre M,

$$\begin{tikzcd}
LM \arrow[rr, "p_{LM}^{SO(m-\mathbf{1},\mathbf{1})}"] \arrow[dr, "\tau"] & & \Sigma := LM/SO(m-1,1) \arrow[dl, "{[\tau]}"] \\
& M \arrow[ul, dashed, bend left, "\{X_i\}"] &
\end{tikzcd}$$

- La densidad Lagrangiana resulta

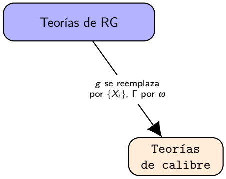
$$\mathscr{L} := \eta^{kl}\theta_{kp} \wedge \Omega^p_l,$$

donde $\theta_{kp} := \star\left(\theta^k \wedge \theta^p\right)$ y la estrella se calcula respecto de la métrica $g := \eta_{kl}\theta^k \otimes \theta^l$.

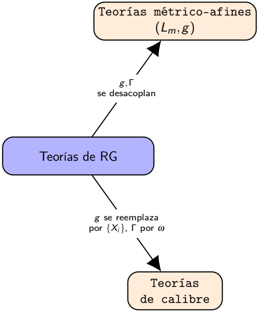
Clasificación

Teorías de RG

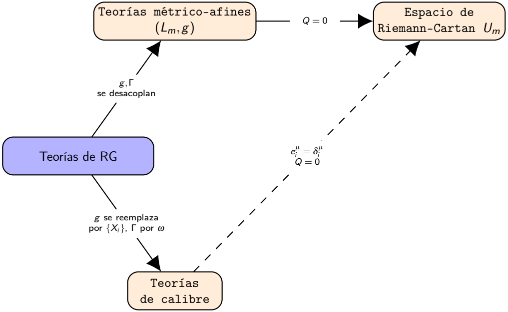
Clasificación



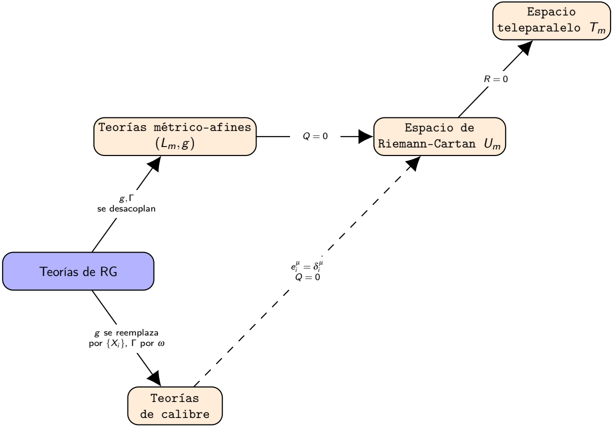
Clasificación



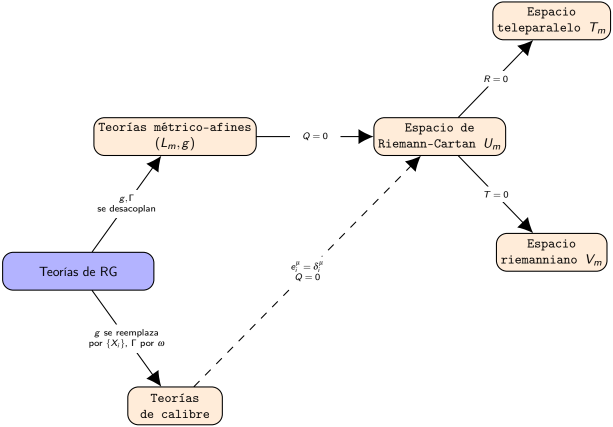
Clasificación



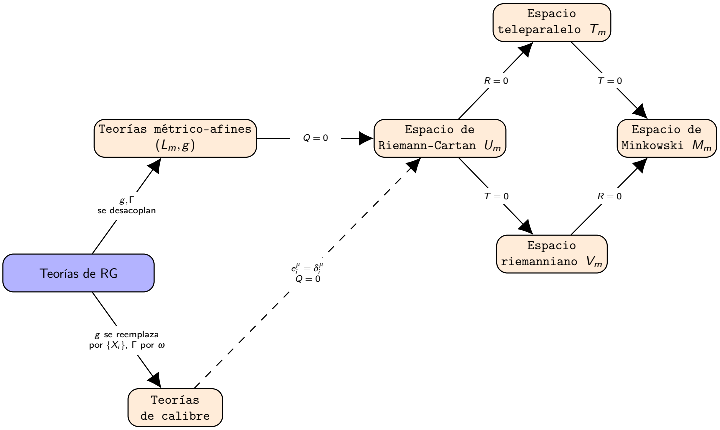
Clasificación



Clasificación



Clasificación



Dónde estamos...

Espacio de jets[4] $J^1\tau$

- Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & J^{1}\tau \arrow[loop above, "GL(m)"] \arrow[dl, "p^{GL(m)}_{J^{1}\tau}"'] \arrow[dd, "\tau_{1}"] \arrow[dr, "\tau_{10}"] & \\
C(LM) \arrow[dr, "\overline{\tau}"'] & & LM \arrow[loop right, "GL(m)"] \arrow[dl, "\tau"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

- Podemos definir

$$\omega|_{j^{1}_{x}s} := \left[T_{j^{1}_{x}s}\tau_{10} - T_{x}s \circ T_{j^{1}_{x}s}\tau_{1} \right]_{\mathfrak{gl}(m)}, \qquad \theta \text{``}=\text{''} \tau_{10}^{*}\theta.$$

- Con ellas armamos

$$\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega, \qquad T = d\theta + \omega \wedge \theta.$$

- Además cada conexión $\Gamma : M \to C(LM)$ induce

$$\sigma_{\Gamma} : LM \to J^{1}\tau : u \longmapsto \left[Z \mapsto Z^{h_{\Gamma}(u)} \right],$$

donde $Y^{h_{\Gamma}(u)}$ es el levantamiento horizontal de $Y \in T_{x}M$ a $T_{u}(LM)$ correspondiente a Γ.

Teorema

Las formas $\Omega_{\Gamma} := \sigma_{\Gamma}^{*}\Omega, T_{\Gamma} := \sigma_{\Gamma}^{*}T$ son la curvatura y la torsión de Γ.

---

[4] M. Castrillón López y J. Muñoz Masqué (2001). "**The geometry of the bundle of connections**". En: *Mathematische Zeitschrift* 236 (4 2001). 10.1007/PL00004852, págs. 797-811.

Bases móviles, $J^1\tau$ y gravedad de Palatini[5]

- Tenemos que
$$J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$$
via $j^1_x s \mapsto \left(\left[j^1_x s\right], s(x)\right)$.
- Interpretamos $\{X_i\}$ como una sección local $s : U \subset M \to LM$.
- Entonces ω^i_j son las formas componentes de $s^*(\sigma^*_\Gamma \omega)$.
- Problema variacional para gravedad de Palatini:
  - Fibrado

$$\left(J^1\tau\,,\ \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} := \eta^{kl}\theta_{kp} \wedge \Omega^p_l\,,\ \mathscr{I}_{\mathrm{PG}} := \left\langle \eta^{ij}\omega^k_j + \eta^{kj}\omega^i_j \right\rangle \right)$$

  - Lagrangiano de la teoría
  - Restricciones

[5] S. Capriotti (2014). "Differential geometry, Palatini gravity and reduction". En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.

Bases móviles, $J^1\tau$ y gravedad de Palatini[5]

- Tenemos que
$$J^1\tau \simeq C\left(LM\right) \times_M LM$$
via $j^1_x s \mapsto \left(\left[j^1_x s\right], s\left(x\right)\right)$.
- Interpretamos $\{X_i\}$ como una sección local $s : U \subset M \to LM$.
- Entonces ω^i_j son las formas componentes de $s^*\left(\sigma_\Gamma^*\omega\right)$.
- Problema variacional para gravedad de Palatini:
  - Fibrado

$$\left(J^1\tau, \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} := \eta^{kl}\theta_{kp}\wedge\Omega^p_l, \mathscr{I}_{\mathrm{PG}} := \left\langle \eta^{ij}\omega^k_j + \eta^{kj}\omega^i_j \right\rangle\right)$$

  - Lagrangiano de la teoría
  - Restricciones

[5] S. Capriotti (2014). “Differential geometry, Palatini gravity and reduction”. En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.

Bases móviles, $J^1\tau$ y gravedad de Palatini[5]

- Tenemos que
$$J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$$
via $j_x^1 s \mapsto \left(\left[j_x^1 s\right], s(x)\right)$.
- Interpretamos $\{X_i\}$ como una sección local $s : U \subset M \to LM$.
- Entonces ω_j^i son las formas componentes de $s^*(\sigma_\Gamma^* \omega)$.
- Problema variacional para gravedad de Palatini:
  - Fibrado
$$\left(J^1\tau, \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} := \eta^{kl}\theta_{kp} \wedge \Omega_l^p, \mathscr{I}_{\mathrm{PG}} := \left\langle \eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i \right\rangle\right)$$
  - Lagrangiano de la teoría
  - Restricciones

[5] S. Capriotti (2014). "Differential geometry, Palatini gravity and reduction". En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.

Bases móviles, $J^1\tau$ y gravedad de Palatini[5]

- Tenemos que
$$J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$$
via $j^1_x s \mapsto \left(\left[j^1_x s\right], s(x)\right)$.
- Interpretamos $\{X_i\}$ como una sección local $s : U \subset M \to LM$.
- Entonces ω^i_j son las formas componentes de $s^*\left(\sigma^*_\Gamma \omega\right)$.
- Problema variacional para gravedad de Palatini:
  - Fibrado

$$\left(\boxed{J^1\tau}, \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} := \eta^{kl}\theta_{kp} \wedge \Omega^p_l, \mathscr{I}_{\mathrm{PG}} := \left\langle \eta^{ij}\omega^k_j + \eta^{kj}\omega^i_j \right\rangle\right)$$

  - Lagrangiano de la teoría
  - Restricciones

[5] S. Capriotti (2014). "Differential geometry, Palatini gravity and reduction". En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.

Bases móviles, $J^1\tau$ y gravedad de Palatini[5]

- Tenemos que
$$J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$$
via $j^1_x s \mapsto \left(\left[j^1_x s\right], s(x)\right)$.
- Interpretamos $\{X_i\}$ como una sección local $s : U \subset M \to LM$.
- Entonces ω^i_j son las formas componentes de $s^*(\sigma^*_\Gamma \omega)$.
- Problema variacional para gravedad de Palatini:
  - Fibrado

$$\left(\boxed{J^1\tau}, \boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{PG}} := \eta^{kl}\theta_{kp} \wedge \Omega^p_l}, \mathscr{I}_{\mathrm{PG}} := \left\langle \eta^{ij}\omega^k_j + \eta^{kj}\omega^i_j \right\rangle\right)$$

  - Lagrangiano de la teoría
  - Restricciones

[5] S. Capriotti (2014). "Differential geometry, Palatini gravity and reduction". En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.

Bases móviles, $J^1\tau$ y gravedad de Palatini[5]

- Tenemos que
$$J^1\tau \simeq C(LM)\times_M LM$$
via $j^1_x s \mapsto \left(\left[j^1_x s\right], s(x)\right)$.
- Interpretamos $\{X_i\}$ como una sección local $s : U \subset M \to LM$.
- Entonces ω^i_j son las formas componentes de $s^*\left(\sigma^*_\Gamma \omega\right)$.
- Problema variacional para gravedad de Palatini:
  - Fibrado

$$\left(\boxed{J^1\tau}, \boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{PG}} := \eta^{kl}\theta_{kp}\wedge\Omega^p_l}, \boxed{\mathscr{I}_{\mathrm{PG}} := \left\langle \eta^{ij}\omega^k_j + \eta^{kj}\omega^i_j \right\rangle}\right)$$

  - Lagrangiano de la teoría
  - Restricciones

[5] S. Capriotti (2014). "Differential geometry, Palatini gravity and reduction". En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.

Formalismo unificado para gravedad de Palatini

- Definimos

$$I_{\mathrm{PG}} := \left\{ \boxed{\eta^{ij}\omega_j^k} \wedge \beta_{ik} : \beta_{ik} \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\tau\right), \quad \beta_{ik} - \beta_{ki} = 0 \right\}$$

$$\wedge_2^m\left(J^1\tau\right) \supset W_{\mathrm{PG}} := \boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{PG}}} + \boxed{I_{\mathrm{PG}}} \xrightarrow{\rho_1} \boxed{J^1\tau}$$

- Como antes, Θ_{PG} es el pullback de la m-forma canónica a este subfibrado.
- Ecuaciones de movimiento:

$$\eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i = 0, \qquad T^i = \beta_{jk} = 0,$$

$$\theta_{il} \wedge \Omega_k^l + \theta_{kl} \wedge \Omega_i^l - \eta_{ik}\left(\eta^{pq}\theta_{pl} \wedge \Omega_q^l\right) = 0.$$

- Algunas particularidades:
  - Equivalentes a las ecuaciones de la RG en el vacío.
  - Forman un EDS involutivo[6], al menos si $\dim M = 4$.
  - Restringiéndonos a una $SL(m)$-estructura, se puede utilizar para gravedad unimodular.

[6] Frank B. Estabrook (2005). "Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity". En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Formalismo unificado para gravedad de Palatini

- Definimos

$$I_{\mathrm{PG}} := \left\{ \eta^{ij}\omega_j^k \wedge \beta_{ik} : \beta_{ik} \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\tau\right), \quad \beta_{ik} - \beta_{ki} = 0 \right\}$$

$$\wedge_2^m\left(J^1\tau\right) \supset W_{\mathrm{PG}} := \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} + I_{\mathrm{PG}} \xrightarrow{\rho_1} J^1\tau$$

- Como antes, Θ_{PG} es el pullback de la m-forma canónica a este subfibrado.
- Ecuaciones de movimiento:

$$\eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i = 0, \qquad T^i = \beta_{jk} = 0,$$

$$\theta_{il} \wedge \Omega_k^l + \theta_{kl} \wedge \Omega_i^l - \eta_{ik}\left(\eta^{pq}\theta_{pl} \wedge \Omega_q^l\right) = 0.$$

- Algunas particularidades:
  - Equivalentes a las ecuaciones de la RG en el vacío.
  - Forman un EDS involutivo[6], al menos si $\dim M = 4$.
  - Restringiéndonos a una $SL(m)$-estructura, se puede utilizar para gravedad unimodular.

---

[6] Frank B. Estabrook (2005). "Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity". En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Formalismo unificado para gravedad de Palatini

- Definimos

$$I_{\mathrm{PG}} := \left\{ \eta^{ij}\omega_j^k \wedge \beta_{ik} : \beta_{ik} \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\tau\right), \quad \beta_{ik} - \beta_{ki} = 0 \right\}$$

$$\wedge_2^m\left(J^1\tau\right) \supset W_{\mathrm{PG}} := \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} + I_{\mathrm{PG}} \xrightarrow{\rho_1} J^1\tau$$

- Como antes, Θ_{PG} es el pullback de la m-forma canónica a este subfibrado.
- Ecuaciones de movimiento:

$$\eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i = 0, \qquad T^i = \beta_{jk} = 0,$$

$$\theta_{il} \wedge \Omega_k^l + \theta_{kl} \wedge \Omega_i^l - \eta_{ik}\left(\eta^{pq}\theta_{pl} \wedge \Omega_q^l\right) = 0.$$

- Algunas particularidades:
  - Equivalentes a las ecuaciones de la RG en el vacío.
  - Forman un EDS involutivo[6], al menos si $\dim M = 4$.
  - Restringiéndonos a una $SL(m)$-estructura, se puede utilizar para gravedad unimodular.

---

[6] Frank B. Estabrook (2005). “Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity”. En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Formalismo unificado para gravedad de Palatini

- Definimos

$$I_{\mathrm{PG}} := \left\{ \boxed{\eta^{ij}\omega_j^k} \wedge \beta_{ik} : \beta_{ik} \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\tau\right), \quad \beta_{ik} - \beta_{ki} = 0 \right\}$$

$$\wedge_2^m\left(J^1\tau\right) \supset W_{\mathrm{PG}} := \boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{PG}}} + \boxed{I_{\mathrm{PG}}} \xrightarrow{\rho_1} \boxed{J^1\tau}$$

- Como antes, Θ_{PG} es el pullback de la m-forma canónica a este subfibrado.
- Ecuaciones de movimiento:

$$\eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i = 0, \qquad T^i = \beta_{jk} = 0,$$
$$\theta_{il} \wedge \Omega_k^l + \theta_{kl} \wedge \Omega_i^l - \eta_{ik}\left(\eta^{pq}\theta_{pl} \wedge \Omega_q^l\right) = 0.$$

- Algunas particularidades:
    - Equivalentes a las ecuaciones de la RG en el vacío.
    - Forman un EDS involutivo[6], al menos si $\dim M = 4$.
    - Restringiéndonos a una $SL(m)$-estructura, se puede utilizar para gravedad unimodular.

[6] Frank B. Estabrook (2005). "Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity". En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Formalismo unificado para gravedad de Palatini

- Definimos

$$I_{\mathrm{PG}} := \left\{ \boxed{\eta^{ij}\omega_j^k} \wedge \beta_{ik} : \beta_{ik} \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\tau\right), \quad \beta_{ik} - \beta_{ki} = 0 \right\}$$

$$\wedge_2^m\left(J^1\tau\right) \supset W_{\mathrm{PG}} := \boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{PG}}} + \boxed{I_{\mathrm{PG}}} \xrightarrow{\rho_1} \boxed{J^1\tau}$$

- Como antes, Θ_{PG} es el pullback de la m-forma canónica a este subfibrado.
- Ecuaciones de movimiento:

$$\eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i = 0, \qquad T^i = \beta_{jk} = 0,$$

$$\theta_{il} \wedge \Omega_k^l + \theta_{kl} \wedge \Omega_i^l - \eta_{ik}\left(\eta^{pq}\theta_{pl} \wedge \Omega_q^l\right) = 0.$$

- Algunas particularidades:
  - Equivalentes a las ecuaciones de la RG en el vacío.
  - Forman un EDS involutivo[6], al menos si $\dim M = 4$.
  - Restringiéndonos a una $SL(m)$-estructura, se puede utilizar para gravedad unimodular.

[6] Frank B. Estabrook (2005). “Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity”. En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Formalismo unificado para gravedad de Palatini

- Definimos

$$I_{\mathrm{PG}} := \left\{ \eta^{ij}\omega_j^k \wedge \beta_{ik} : \beta_{ik} \in \wedge_1^{m-1}\left(J^1\tau\right), \quad \beta_{ik} - \beta_{ki} = 0 \right\}$$

$$\wedge_2^m\left(J^1\tau\right) \supset W_{\mathrm{PG}} := \mathscr{L}_{\mathrm{PG}} + I_{\mathrm{PG}} \xrightarrow{\rho_1} J^1\tau$$

- Como antes, Θ_{PG} es el pullback de la m-forma canónica a este subfibrado.
- Ecuaciones de movimiento:

$$\eta^{ij}\omega_j^k + \eta^{kj}\omega_j^i = 0, \qquad T^i = \beta_{jk} = 0,$$

$$\theta_{il} \wedge \Omega_k^l + \theta_{kl} \wedge \Omega_i^l - \eta_{ik}\left(\eta^{pq}\theta_{pl} \wedge \Omega_q^l\right) = 0.$$

- Algunas particularidades:
  - Equivalentes a las ecuaciones de la RG en el vacío.
  - Forman un EDS involutivo[6], al menos si $\dim M = 4$.
  - Restringiéndonos a una $SL(m)$-estructura, se puede utilizar para gravedad unimodular.

[6] Frank B. Estabrook (2005). "Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity". En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Bibliography I

- Capriotti, S. (2014). "Differential geometry, Palatini gravity and reduction". En: *Journal of Mathematical Physics* 55.1, 012902, pág. 012902.
- Cartan, É. (1937). *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle: traitées par la méthode du repère mobile*. Cahiers scientifiques. Gauthier-Villars.
- Castrillón López, M. y J. Muñoz Masqué (2001). "The geometry of the bundle of connections". En: *Mathematische Zeitschrift* 236 (4 2001). 10.1007/PL00004852, págs. 797-811.
- Echeverría-Enríquez, A. y col. (ene. de 2004). "Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory". En: *Journal of Mathematical Physics* 45 (ene. de 2004), págs. 360-380. eprint: `math-ph/0212002`.
- Estabrook, Frank B. (2005). "Mathematical structure of tetrad equations for vacuum relativity". En: *Phys. Rev. D* 71 (4 2005), pág. 044004.

Bibliography II

Gotay, M.J. (1991). “An exterior differential system approach to the Cartan form”. En: *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990.* Ed. por P. Donato y col. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, págs. 160-188.

León, M. de, J. C. Marrero y D. Martin de Diego (2003). “A New geometric setting for classical field theories”. En: *Banach Center Publ.* 59, págs. 189-209. arXiv: `math-ph/0202012 [math-ph]`.