Modelos de Cuantización en Variedades y matrices de Vandermonde

Guillermo Capobianco

29 de septiembre de 2017

CONICET BAHIA BLANCA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR UNS BAHÍA BLANCA
Departamento de Matemática

Introducción: Parte 1

- Mecánica cuántica en variedades riemannianas como espacios de configuración. Cuantización holomorfa. Transformada de Segal–Bargmann generalizada.
    - Espacios de Hilbert de funciones holomorfas definidas en el fibrado cotangente. Ecuación del calor.
    - Propagador infinitesimal.
    - Espacios de Hilbert con núcleo reproductor. Integral de Feynman coincide con las expresiones conocidas para el caso euclidiano.

Introducción: Parte 2

- Cuantización en variedades Riemannianas de curvatura cero.
  - Isomorfismo entre $L^2(Q, \rho_t^{x_0})$ y el espacio $\mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$.
  - Solución fundamental de la ecuación del calor en la complexificación del espacio a cuantizar.
  - Espacios de Hilbert con núcleo reproductor. Matrices de Vandermonde. Propagador de Feynman (G.C., W. Reartes 2015).

Cuantización holomorfa

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Definición

Sea $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable con respecto a la medida definida por $\alpha(z)$

$$\mathcal{H}L^2(U,\alpha) = \left\{ F \in \mathcal{H}(U) | \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}.$$

Teorema

$\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U,\alpha)$ y por lo tanto un espacio de Hilbert.

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Teorema

Sea $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, existe una función $K(z,w)$, $z,w\in U$ que verifica

1. *$K(z,w)$ es holomorfa en z y antiholomorfa en w y satisface*
$$K(w,z)=\overline{K(z,w)}.$$
2. *Para cada z fijo perteneciente a U, $K(z,w)$ es de cuadrado integrable con respecto a $\alpha(w)$. Para todo $F\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ vale*
$$F(z)=\int_U K(z,w)F(w)\alpha(w)dw.$$
3. *Sea $\{e_j\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Luego para todo $z,w\in U$, $\sum_j\left|e_j(z)\overline{e_j(w)}\right|<\infty$*
$$K(z,w)=\sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}.$$

Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

Definición

El espacio de Segal-Bargmann es el espacio de funciones holomorfas

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t),$$

donde

$$\mu_t(z) = (\pi t)^{-d} e^{-|z|^2/t}$$

y donde $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_d|^2$.

Teorema

El kernel reproductor del espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ *es*

$$K(z, w) = e^{z.\overline{w}/t}$$

donde $z.\overline{w} = z_1\overline{w}_1 + \ldots + z_d\overline{w}_d$.

Transformada de Segal–Bargmann

Teorema

Considérese el mapa $A_\hbar : L^2(\mathbb{R}^d, dx) \to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_\hbar)$ *dado por*

$$A_\hbar f(z) = (\pi\hbar)^{-d/4} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(-z^2+2\sqrt{2}x.z-x^2)/(2\hbar)} f(x)dx.$$

1. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, $A_\hbar f(z)$ *es convergente y es holomorfa en* $z \in \mathbb{R}^d$.
2. $A_\hbar$ *es un mapa unitario de* $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ *en* $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_\hbar)$.
3. *Para todo* $k = 1, .., d$

$$A_\hbar \left(\frac{X_k + iP_k}{\sqrt{2}} \right) A_\hbar^{-1} = \hbar \frac{\partial}{\partial z_k}$$

$$A_\hbar \left(\frac{X_k - iP_k}{\sqrt{2}} \right) A_\hbar^{-1} = z_k,$$

donde X_k *y* P_k *son los operadores de posición y de momento.*

Transformada generalizada

$\mathbb{R}^n \Rightarrow K$(grupo de lie conexo compacto)

ρ_t (solución de $\frac{d\rho_t}{dt} = \frac{1}{2}\Delta\rho_t) \Rightarrow \rho_t$ (solución de $\frac{d\rho_t}{dt} = \frac{1}{2}\Delta_K\rho_t)$

$$\mathbb{C}^n \Rightarrow K_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_\nu : L^2(K,\mu) \Rightarrow \mathcal{H}L^2(K_{\mathbb{C}},\nu).$$

Transformada generalizada

Sea dx la medida de Haar en K. Se define
$\mathcal{A}_t : L^2(K, \rho_t(x)dx) \to \mathcal{H}L^2\left(K_{\mathbb{C}}, \mu_t(g)dg\right)$

$$\mathcal{A}_t f(g) = \int_K \rho_t(gx^{-1}) f(x) dx$$

con $g \in K_{\mathbb{C}}$.

Teorema

Para todo $t > 0$, $\mathcal{A}_t$ es una isometría de $L^2(K, \rho_t(x)dx)$ en $\mathcal{H}L^2\left(K_{\mathbb{C}}, \mu_t(g)dg\right)$, donde dg es la medida de Haar en el grupo complexificado $K_{\mathbb{C}}$.

$\mathcal{A}_t f$ es siempre convergente y es una función holomorfa de g, (Hall 1994).

Levantamiento de la métrica σ a T^*Q

Sea Q variedad riemanniana.
Métrica en T^*Q

$$G_m(V,W) = \sigma_q\left(T\pi V, T\pi W\right) + \sigma_q\left(\sigma_q^\sharp \frac{Dp_1}{dt}(0), \sigma_q^\sharp \frac{Dp_2}{dt}(0)\right)$$

$$G(V,W) = \omega(V, JW)$$

$$T^{\mathbb{C}}T^*Q = T^{(1,0)}T^*Q \oplus T^{(0,1)}T^*Q$$

$$\Pi^{\pm} = \frac{1 \mp \mathrm{i}J}{2}.$$

Levantamiento de la métrica σ a T^*Q

Sea $V = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n) \in T_m T^*Q$, luego Π^+ es un isomorfismo entre $T_m T^*Q$ y $T_m^{(1,0)} T^*Q$.

$$\Pi^+ V = \dot{z}^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

donde $\dot{z}^i = \dot{q}^i + \mathrm{i}\sigma^{im}(\dot{p}_m - p_k \Gamma^k_{ml} \dot{q}^l)$

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + p_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial p^j} - i\sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial p^j}\right)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = iR^m_{kij} p_m \sigma^{lk}\left(\frac{\partial}{\partial z^l} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\right)$$

Producto escalar de funciones holomorfas en T^*Q

Sean $m \in T^*Q$, $\exp_m : T_mT^*Q \to T^*Q$.

El pull-back por el mapa exponencial de la medida de volumen en T^*Q es $d\mu(z) = g(m)d^nz$.

Sean ϕ, ψ funciones holomorfas en T^*Q

$$\langle \phi, \psi \rangle_m = \int_{T_mT^*Q} \overline{\phi(\exp_m z)}\psi(\exp_m z)e^{-|z|^2}\, d\mu(z). \qquad (1)$$

Teorema

El conjunto de funciones holomorfas de cuadrado integrable con el producto escalar (1) es un espacio de Hilbert. Llamamos a este espacio $\mathcal{H}L^2(T^*Q, d\mu(z))$.

Evolución temporal de la función de onda

Sea K el siguiente núcleo reproductor

$$\phi(m) = \int_{T_m T^*Q} K(m, \exp_m z)\phi(\exp_m z)e^{-|z|^2}\, d\mu(z).$$

Sea H el operador hamiltoniano en $\mathcal{H}L^2(T^*Q, d\mu(z))$, representado por el núcleo integral K_H.

$$H\phi(m) = \int_{T_m T^*Q} K_H(m, \exp_m z)\phi(\exp_m z)e^{-|z|^2}\, d\mu(z).$$

Operador de evolución

$$U_t = e^{-iHt}$$

Evolución temporal de la función de onda

Para intervalos pequeños vale la siguiente aproximación:

$$U_\epsilon \cong 1 - iH\epsilon$$

Propagador infinitesimal de evolución

$$u_\epsilon \phi(m) = \int_{T_m T^*Q} K(m, \exp_m z)\phi(\exp_m z)e^{-|z|^2} e^{-i\epsilon K_H/K}\, d\mu(z).$$

Operador de evolución:

$$U_t \phi(m) = \lim_{n\to\infty} {u_{t/n}}^n \phi(m).$$

Integrales de Feynman en *Euclidean Space Forms*

Integrales de Feynman en *Euclidean Space Forms*

- Estructura compleja compatible si la variedad es de curvatura cero.
- Variedad riemanniana compacta y de curvatura cero (*euclidean space form*) orientable. Isomorfismo entre $L^2(Q, \rho_t^{x_0})$ y $\mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$. Solución fundamental de la ecuación del calor.
- Espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Integral de Feynman.
- Caso S^1. Núcleo reproductor. Algoritmo adecuado para invertir una matriz infinita de Vandermonde.

Integrales de Feynman en *Euclidean Space Forms*

Teorema (W. Killing - H. Hopf)

Sea M una variedad riemanniana de dimensión $n \geq 2$ de curvatura nula. Luego M es completa, conexa si y solo si es isométrica al cociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ con $\Gamma \subset E(n)$ donde la acción de Γ es libre y propiamente discontinua.

Estas variedades se conocen como *euclidean space forms*.

- $\mathbb{R}$, S^1
- $\mathbb{R}^2$, el cilindro, la cinta de Möebius infinita, el toro y la botella de Klein.
- En dimensión 3: 18 tipos.
- 74 compactas en dimensión 4.

Integrales de Feynman en *Euclidean Space Forms*

- Volumen de una *euclidean space form* compacta. El volumen de $\mathbb{R}^n/\Gamma$ se define como el volumen de cualquier región fundamental.

$$c_\gamma := \left\{x \in \mathbb{R}^n; \|\gamma(0) - x\| \leq \|\gamma'(0) - x\| \text{ para todo } \gamma' \in \Gamma\right\}$$

- Variedades compactas riemannianas de curvatura cero de dimensión n son cocientes de poliedros en $\mathbb{R}^n$ mediante la identificación de caras (región fundamental).
- El interior de estos poliedros puede tomarse como carta (Q°).

Solución fundamental de la ecuación del calor en ESF

En el caso $\mathbb{R}^n$, la ecuación del calor

$$\frac{\partial \rho_t^{x_0}(x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta \rho_t^{x_0}(x),$$

$$\rho_t^{x_0}(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/2t}.$$

$$\lim_{t\to 0^+} \rho_t^{x_0}(x) = \delta(x - x_0).$$

En el caso compacto orientable, esta ecuación puede resolverse en la carta Q°

$$\rho_t^{x_0}(x) = \frac{1}{V} \sum_{K\in\mathcal{L}} c_K(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\cdot(x-x_0)},$$

$\rho_t^{x_0}(x)$ debe ser invariante por la acción de Γ.

$$\rho_t^{x_0}(x) = \frac{1}{V} \sum_{K\in\mathcal{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\cdot(x-x_0) - K^2 t/2}.$$

Solución fundamental de la ecuación del calor en ESF

$$
\begin{aligned}
(\gamma\rho_t)^{x_0}(x) &= \frac{1}{V}\sum_{K\in\mathcal{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\cdot\gamma(x-x_0)-K^2t/2} \\
&= \frac{1}{V}\sum_{K\in\mathcal{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\cdot A(x-x_0)+\mathrm{i}K\cdot a-K^2t/2} = \rho_t^{x_0}(x).
\end{aligned}
$$

Producto escalar en Q

$$
\langle f,g\rangle_Q = \int_Q \overline{f(x)}g(x)\rho_t^{x_0}(x)\mathrm{d}x.
$$

Espacio de Hilbert $L^2(Q,\rho_t^{x_0})$.

Representación holomorfa

Carta en el fibrado cotangente $Q^\circ \times \mathbb{R}^n$. $Q^\circ_{\mathbb{C}} = Q^\circ \times \mathbb{R}^n$.
Sea la ecuación del calor en $Q^\circ_{\mathbb{C}}$

$$\frac{\partial \nu_t^{z_0}(z)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta \nu_t^{z_0}(z),$$

En el caso Euclidiano,

$$\nu_t^{z_0}(z) = \frac{1}{(2\pi t)^n} \mathrm{e}^{-|z-z_0|^2/2t}.$$

Para $Q^\circ_{\mathbb{C}} = Q^\circ \times \mathbb{R}^n$

$$\nu_t^{z_0}(z) = \frac{1}{V(2\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|\Im(z-z_0)|^2/2t} \sum_{K\in\mathcal{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\cdot\Re(z-z_0)-K^2 t/2}.$$

Representación holomorfa

Producto de funciones holomorfas $\phi(z)$ y $\psi(z)$ en $Q_{\mathbb{C}}$

$$\langle \psi, \phi \rangle_{Q_{\mathbb{C}}} = \int_{Q_{\mathbb{C}}} \overline{\psi(z)} \phi(z) \nu_{t/2}^{x_0}(z) \mathrm{d}z.$$

- $\mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$
- $Q = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ espacio de Segal–Bargmann.

Para todo $\phi \in \mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$ vale

$$\phi(z) = \int_{Q_{\mathbb{C}}} K(z, \bar{w}) \phi(w) \nu_{t/2}^{x_0}(w) \mathrm{d}w.$$

En el caso euclidiano el kernel reproductor es

$$K(z, \bar{w}) = \mathrm{e}^{z\bar{w}/t}.$$

Isometría entre los espacios de Hilbert

Los espacios $L^2(Q, \rho_t^{x_0})$ y $\mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$ son isomorfos. El isomorfismo está dado por

$$\mathcal{A}_t \colon\; L^2(Q, \rho_t^{x_0}) \to \mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$$

$$\mathcal{A}_t f(z) = \int_Q \rho_t^z(x) f(x) \mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_t f, \mathcal{A}_t g \rangle_{Q_{\mathbb{C}}} &= \int_{Q_{\mathbb{C}}} \overline{\mathcal{A}_t f(z)} \mathcal{A}_t g(z) \nu_{t/2}^{x_0}(z) \mathrm{d}z \\ &= \langle f, g \rangle_Q . \end{aligned}$$

Caso S^1

Sea $Q = S^1$. La solución $\rho_t^{\theta_0}(\theta)$, satisface

$$\frac{\partial \rho_t^{\theta_0}(\theta)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_{S^1}\rho_t^{\theta_0}(\theta)$$

y converge a la delta de Dirac $\delta(\theta - \theta_0)$, para $t \to 0^+$.
La función $\rho_t^{\theta_0}(\theta)$ está dada por

$$\rho_t^{\theta_0}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta-\theta_0)},$$

luego la función $\rho_k(t)$ satisface

$$\frac{\mathrm{d}\rho_k(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}k^2\rho_k(t),$$

y se obtiene

$$\rho_t^{\theta_0}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta-\theta_0)-\frac{1}{2}k^2 t}.$$

Caso S^1

El producto escalar entre dos funciones f y g en S^1 es

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_m d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(n-m)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta-\theta_0)-k^2 t/2}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{c}_j d_{j-k} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta_0 - k^2 t/2}$$

El espacio cotangente es $S^1 \times \mathbb{R}$.
$(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$, carta en $S^1_{\mathbb{C}}$.

$$\psi(w) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}.$$

Caso S^1

La medida $\nu_t^{z_0}(z)$ en este caso es

$$\nu_t^{z_0}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{\Im(z-z_0)^2}{2t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Re(z-z_0)-n^2t/2}.$$

La transformada de Segal–Bargmann (2) de una función f puede obtenerse a partir de sus coeficientes de Fourier.

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-z)-n^2t/2} \mathrm{d}\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz-m^2t/2}.$$

Caso S^1

Dado que $\{\mathrm{e}^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$, usando (2) obtenemos $\{\phi_n\}$ (base ortonormal de $\mathcal{H}L^2(S^1 \times \mathbb{R}, \nu_t^{x_0})$),

$$\phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{inx} \rho_t^z(x)}{\sqrt{\rho_t^{x_0}(x)}} \mathrm{d}x.$$

Núcleo reproductor

$$K(z, \overline{w}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-iky}}{\sqrt{\rho_t^{x_0}(x) \rho_t^{x_0}(y)}} \rho_t^z(x) \rho_t^{\overline{w}}(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho_t^z(x) \rho_t^{\overline{w}}(x)}{\rho_t^{x_0}(x)} \mathrm{d}x.$$

Caso S^1 - Matriz de Vandermonde

El kernel reproductor en el cilindro se escribe como

$$K(z,\bar{w}) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{imz} e^{in\bar{w}}.$$

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \int_{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}} K(z,\bar{w})\psi(w)\nu_{t/2}^{z_0}(w)\,dw \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imz} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{-nlt/2},\end{aligned}$$

Caso S^1 - Matriz de Vandermonde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{-nlt/2} = \delta_{ml}.$$

Resolver k_{mn} implica invertir una matriz infinita de Vandermonde generalizada.

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1^{-n} & \dots & x_1^{-2} & x_1^{-1} & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^{-n} & \dots & x_2^{-2} & x_2^{-1} & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n+1}^{-n} & \dots & x_{2n+1}^{-2} & x_{2n+1}^{-1} & 1 & x_{2n+1} & x_{2n+1}^2 & \dots & x_{2n+1}^n \end{pmatrix}$$

Mediante un algoritmo puede obtenerse el kernel $K(z,\bar{w})$ hasta el orden r deseado

$$K_r(z,\bar{w}) = \sum_{m,n=-r}^{r} k_{mn} e^{imz} e^{in\bar{w}}.$$

Caso S^1 - Matriz de Vandermonde

En este caso $x_i^j = e^{(-t/2)ij} = \xi^{ij}$.

$$V^r = \begin{pmatrix} \xi^{-n(-n)} & \cdots & 1 & \cdots & \xi^{-nn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi^{n(-n)} & \cdots & 1 & \cdots & \xi^{nn} \end{pmatrix}$$

- Algoritmos de matrices de Vandermonde generalizadas (Gohberg 1997, Knuth2011 , Rabe 2007, Bella 2009).
- Existencia y unicidad (Rabe 2007). Convergencia (Ran - Sereny 2012).

Caso S^1 - Matriz de Vandermonde

Polinomios de Horner para la base $\{x^{-n}, ..., x^{-1}, 1, x, ..., x^n\}$.

Definición

Sea $Q(x)$ el polinomio maestro cuyos ceros $(x_1, x_2, ..., x_{2n+1})$ son los nodos de la matriz de Vandermonde $V(x)$,

$$\begin{aligned} Q(x) =& a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 + a_{-1}x^{-1} + ... + a_{-n}x^{-n} \\ =& (x - x_1)...(x - x_{n+1})(x^{-1} - x_{n+2}^{-1})(x^{-1} - x_{n+3}^{-1})...(x^{-1} - x_{2n+1}^{-1}), \end{aligned}$$

Luego se definen los polinomios $\{p_{-n}(x), ..., p_{-1}(x), p_0(x), ..., p_n(x)\}$ como los polinomios de Horner de la base $\{x^{-n}, ..., x^{-1}, 1, x, ..., x^n\}$ por medio de

$$\frac{Q(t) - Q(x)}{t - x} = p_{-n}t^{-n} + ... + p_{-1}t^{-1} + p_0 + p_1 t + ... + p_n t^n$$

Caso S^1 - Matriz de Vandermonde

Puede obtenerse por medio de un algoritmo $V^{-1}(x)$:

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_{2n+1}) \\ p_2(x_1) & p_2(x_2) & \cdots & p_2(x_{2n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{2n+1}(x_1) & p_{2n+1}(x_2) & \cdots & p_{2n+1}(x_{2n+1}) \end{pmatrix} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{Q'(x_i)}\right)_{i=1}^{2n+1}$$

Kernel $K(z,\bar{w})$ aproximado hasta el orden r

$$K_r(z,\bar{w}) = \sum_{m,n=-r}^{r} k_{mn} e^{imz} e^{in\bar{w}}.$$

Integral de Feynman

Propagación de la función de onda ϕ para un tiempo ϵ, con operador Hamiltoniano H.

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon H}\phi(z) = \int_{Q_{\mathbb{C}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\epsilon)^n}{n!} K_{H^n}(z,\bar{w}) \right) \phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)\mathrm{d}w$$

$$= \int_{Q_{\mathbb{C}}} K(z,\bar{w})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon K_H(z,\bar{w})/K(z,\bar{w})}\phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)\mathrm{d}w + \epsilon^2\psi(z,\epsilon).$$

Sea $U_\epsilon\phi(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon H}\phi(z)$ y $\tilde{U}_\epsilon\phi(z)$ la última integral, se obtiene

$$U_\epsilon\phi(z) = \tilde{U}_\epsilon\phi(z) + \epsilon^2\psi(z,\epsilon).$$

Sea $T = n\epsilon$, se tiene

$$\mathcal{U}_T = \lim_{n\to\infty} U_{T/n}^n,$$

Integral de Feynman

Definimos un propagador de Feynman para tiempo finito T

$$G(z_T, z_0; T) = \lim_{n\to\infty} \int_{Q_{\mathbb{C}}^{n-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{T}{n}\sum_{j=1}^{n} h(z_j, \bar{z}_{j-1})} \prod_{j=1}^{n} K(z_j, \bar{z}_{j-1}) \prod_{j=1}^{n-1} \nu_{t/2}^{x_0}(z_j)\mathrm{d}z_j, \quad (3)$$

donde

$$h(z, \bar{w}) = \frac{K_H(z, \bar{w})}{K(z, \bar{w})}.$$

En el caso Euclidiano,

$$H = z\frac{\partial}{\partial z},$$

Integral de Feynman

El propagador de Feynman (3) es en este caso

$$G(z_T, z_0; T) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_{j-1} - \mathrm{i}\frac{T}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_{j-1} - \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}z_j}{2\pi}.$$

Luego,

$$G(z_T, z_0; T) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \mathrm{e}^{z_n \bar{z}_{n-1} - \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} z_j \frac{(\bar{z}_j - \bar{z}_{j-1})}{\epsilon} - \mathrm{i}\epsilon \sum_{j=1}^{n-1} z_j \bar{z}_{j-1} - \mathrm{i}\epsilon z_n \bar{z}_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}z_j}{2\pi},$$

Coincide con integral de Feynman (Deligne et al. 1999, Zinn–Justin 2005).

$$G(z_T, z_0; T) = \int \mathrm{e}^{z(T)\bar{z}(T)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_0^T (\mathrm{i}z(s)\dot{\bar{z}}(s) - h(z(s), \bar{z}(s)))\mathrm{d}s} \mathcal{D}[z(s)].$$

Conclusiones y futuras líneas de investigación

Conclusiones

Cuantización holomorfa. Transformada de Segal-Bargmann. Propagador infinitesimal.

Conclusiones

Cuantización holomorfa. Transformada de Segal-Bargmann. Propagador infinitesimal.

Mapa exponencial. Integrales en el espacio tangente. Evolución infinitesimal. Integral de Feynman.

Conclusiones

Cuantización holomorfa. Transformada de Segal-Bargmann. Propagador infinitesimal.

Mapa exponencial. Integrales en el espacio tangente. Evolución infinitesimal. Integral de Feynman.

Cuantización en variedades orientables compactas riemannianas de curvatura cero (*euclidean space forms*). Ecuación del calor. RKHS. Propagador de Feynman.

Futuras líneas de investigación

- Formulación de una integral de Feynman holomorfa para el caso de *space forms* no euclidianas.
- Integrabilidad de la estructura casi-compleja (Gorbunov et al. (2005)).
- Tubos de Grauert (Guillemin, Stenzel (1991) - Lempert, Szoke (1991) - Hall, Kirwin (2011)). Estructuras complejas compatibles con la estructura simpléctica.
- Matrices de Vandermode.
- Propiedades espectrales de las variedades riemannianas de curvatura cero. *Heat trace function*.
- Relación con la cuantización geométrica.

¡Muchas gracias!

Referencias

G. Capobianco, W. Reartes, Path Integrals on Euclidean Space Forms, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* (SIGMA) 11 (2015), 071, 12 pages, http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2015.071.

G. Capobianco, W. Reartes, Geometric quantization of a particle in a perpendicular magnetic field, *J. Geom. Symmetry Phys.*, 41, 17-32 (2016).

G. Capobianco, W. Reartes, Holomorphic path integrals in tangent space for flat manifolds. *arXiv*, https://arxiv.org/abs/1703.10311 (2017).