Sobre las desigualdades de Bell, un teorema de von Neumann y la diferenciabilidad de ciertas funciones de correlación

Alejandro Cabrera

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Encuentro Argentino de Mecánica Geométrica y Física-Matemática – 2017

(colaboradores: E. de Faria, E. Pujals y C. Tresser)

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Mecanica cuantica (**QM**) : probabilidades, incertezas, ...

Pregunta

Hay una teoria deterministica (o **realista**) subyacente? (eg: variables ocultas,...)

Intentos de respuesta:

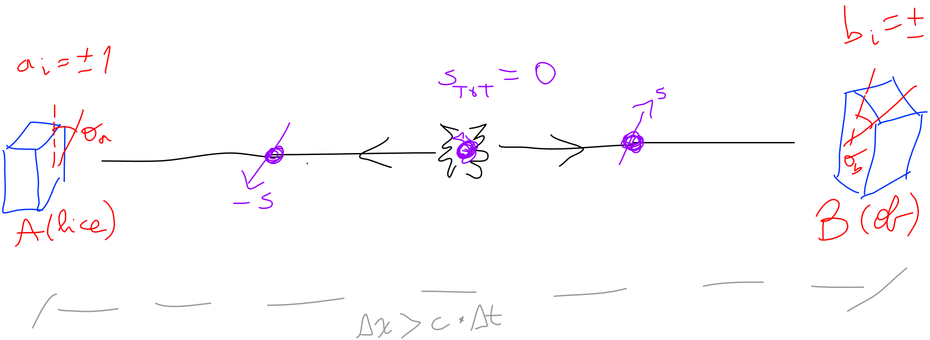
von Neumann '32: no hidden variables theorem (error en la demostracion)

Bell '64: hipotesis extra **localidad** $\Rightarrow$ inconsistencia logica $(1 > 3)$

Kochen, Specker '67: asumiendo no-contextualidad (mas fuerte que localidad) [Charla del Solo!]

Charles: El culpable de las inconsistencias es el realismo (como queria probar von Neumann)

La situacion EinsteinPodolskyRosen:



secuencia de experimentos: $a = (a_1, a_2, \ldots), b = (b_1, \ldots) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β':
  $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β':
  $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha,\beta), B(\alpha,\beta) \in \{+1,-1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β':
  $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β':
  $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β':
  $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β':
  $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Supongamos que tenemos una teoria subyacente $\mathcal{T}$. Vamos a imponer hipotesis sobre $\mathcal{T}$ y eventualmente llegar en una contradiccion.

- **compatibilidad con QM** : correlaciones $\langle a, b\rangle := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -cos(\theta_a - \theta_b) \sim -1 + \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b)^2$ (si fuera clasica: $-1 + |\theta_a - \theta_b|$)
- **realismo (CMR)**: $\mathcal{T}$ responde secuencias de ± 1 incluso 'qué hubiera medido si, *en el mismo experimento*, hubiera orientado los detectores en angulos α, β': $\alpha, \beta \mapsto A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta) \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (counterfactual)
- **principio efecto-despues-de-causa restricto** (REACP): una medicion *fisica* no cambia por elecciones/eventos futuros, para cualquier observador de Lorentz.

Obs: mas debil que localidad, permite no-localidad counterfactual, permite contextualidad; [relatividad cinematica $\Rightarrow$ REACP]

Herramienta matematica: **desigualdades de Boole** (1862):

$$|\langle u, x\rangle + \langle v, x\rangle| + |\langle u, y\rangle - \langle v, y\rangle| \leq 2$$

donde $u, v, x, y \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ y $\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Herramienta matematica: **desigualdades de Boole** (1862):

$$|\langle u, x\rangle + \langle v, x\rangle| + |\langle u, y\rangle - \langle v, y\rangle| \leq 2$$

donde $u, v, x, y \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ y $\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Idea: fijamos angulos fisicos θ_a, θ_b y variamos contrafactuales α, β.

Lema: de las hipotesis, sigue que

$$\langle a, b\rangle = -cos(\theta_a - \theta_b),\ \langle a, B(\theta_a, \beta)\rangle = -cos(\theta_a - \beta),$$

$$\langle A(\alpha, \theta_b), b\rangle = -cos(\theta_b - \alpha)$$

Usando las desigualdades de Boole llegamos:

$$|-cos(\theta_1) \mp cos(\theta_2)| + |-cos(\theta_3) \mp \langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle| \leq 2$$

$\langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ **indeterminada**

(notacion: $\theta_1 = \theta_a - \theta_b,\ \theta_2 = \alpha - \theta_b,\ \theta_3 = \theta_a - \beta$)

Idea: fijamos angulos fisicos θ_a, θ_b y variamos contrafactuales α, β.

Lema: de las hipotesis, sigue que

$$\langle a, b\rangle = -cos(\theta_a - \theta_b),\ \langle a, B(\theta_a, \beta)\rangle = -cos(\theta_a - \beta),$$

$$\langle A(\alpha, \theta_b), b\rangle = -cos(\theta_b - \alpha)$$

Usando las desigualdades de Boole llegamos:

$$|-cos(\theta_1) \mp cos(\theta_2)| + |-cos(\theta_3) \mp \langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle| \leq 2$$

$\langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ **indeterminada**

(notacion: $\theta_1 = \theta_a - \theta_b,\ \theta_2 = \alpha - \theta_b,\ \theta_3 = \theta_a - \beta$)

Idea: fijamos angulos fisicos θ_a, θ_b y variamos contrafactuales α, β.

Lema: de las hipotesis, sigue que

$$\langle a, b\rangle = -cos(\theta_a - \theta_b),\ \langle a, B(\theta_a, \beta)\rangle = -cos(\theta_a - \beta),$$

$$\langle A(\alpha, \theta_b), b\rangle = -cos(\theta_b - \alpha)$$

Usando las desigualdades de Boole llegamos:

$$|-cos(\theta_1) \mp cos(\theta_2)| + |-cos(\theta_3) \mp \langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle| \leq 2$$

$\langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ **indeterminada**

(notacion: $\theta_1 = \theta_a - \theta_b,\ \theta_2 = \alpha - \theta_b,\ \theta_3 = \theta_a - \beta$)

Idea: fijamos angulos fisicos θ_a, θ_b y variamos contrafactuales α, β.

Lema: de las hipotesis, sigue que

$$\langle a, b \rangle = -cos(\theta_a - \theta_b),\ \langle a, B(\theta_a, \beta)\rangle = -cos(\theta_a - \beta),$$

$$\langle A(\alpha, \theta_b), b\rangle = -cos(\theta_b - \alpha)$$

Usando las desigualdades de Boole llegamos:

$$|-cos(\theta_1) \mp cos(\theta_2)| + |-cos(\theta_3) \mp \langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle| \leq 2$$

$\langle A(\alpha, \theta_b), B(\theta_a, \beta)\rangle = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ **indeterminada**

(notacion: $\theta_1 = \theta_a - \theta_b,\ \theta_2 = \alpha - \theta_b,\ \theta_3 = \theta_a - \beta$)

Teorema 1

la funcion f es diferenciable en $(0,0,0)$ con diferencial cero.

Teorema 2

Si, ademas, f es 2 veces diferenciable en $(0,0,0)$ entonces $3 = 1$ (!)

Teorema 1

la funcion f es diferenciable en $(0, 0, 0)$ con diferencial cero.

Teorema 2

Si, ademas, f es 2 veces diferenciable en $(0, 0, 0)$ entonces $3 = 1$ (!)

Consecuencias/moralejas:

- Estamos a 1 grado de diferenciabilidad de un analogo del teorema de von Neumann (**obs**: en este contexto, las funciones son analiticas o no-diferenciables!)
- cualquier teoria realista (eg: mecanica Bohmiana) debe predecir este tipo 'rough' de funcion de correlacion: 1 vez diferenciable pero no 2 veces. (sirve para descartar la mecanica Bohomiana? se puede calcular f en ese contexto?)

Obrigado!!!!!!!

Consecuencias/moralejas:

- Estamos a 1 grado de diferenciabilidad de un analogo del teorema de von Neumann (**obs**: en este contexto, las funciones son analiticas o no-diferenciables!)
- cualquier teoria realista (eg: mecanica Bohmiana) debe predecir este tipo 'rough' de funcion de correlacion: 1 vez diferenciable pero no 2 veces. (sirve para descartar la mecanica Bohomiana? se puede calcular f en ese contexto?)

Obrigado!!!!!!!

Consecuencias/moralejas:

- Estamos a 1 grado de diferenciabilidad de un analogo del teorema de von Neumann (**obs**: en este contexto, las funciones son analiticas o no-diferenciables!)
- cualquier teoria realista (eg: mecanica Bohmiana) debe predecir este tipo 'rough' de funcion de correlacion: 1 vez diferenciable pero no 2 veces. (sirve para descartar la mecanica Bohomiana? se puede calcular f en ese contexto?)

Obrigado!!!!!!!

Consecuencias/moralejas:

- Estamos a 1 grado de diferenciabilidad de un analogo del teorema de von Neumann (**obs**: en este contexto, las funciones son analiticas o no-diferenciables!)
- cualquier teoria realista (eg: mecanica Bohmiana) debe predecir este tipo 'rough' de funcion de correlacion: 1 vez diferenciable pero no 2 veces. (sirve para descartar la mecanica Bohomiana? se puede calcular f en ese contexto?)

Obrigado!!!!!!!

Consecuencias/moralejas:

- Estamos a 1 grado de diferenciabilidad de un analogo del teorema de von Neumann (**obs**: en este contexto, las funciones son analiticas o no-diferenciables!)
- cualquier teoria realista (eg: mecanica Bohmiana) debe predecir este tipo 'rough' de funcion de correlacion: 1 vez diferenciable pero no 2 veces. (sirve para descartar la mecanica Bohomiana? se puede calcular f en ese contexto?)

Obrigado!!!!!!!